

Если мы возьмем возмущение в виде $e^{i(\sigma t + kx)}$, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \left\{ k^2 + \frac{i(\sigma + k\beta y)}{\nu} \right\} S, \quad (6)$$

где

$$S = \Delta_1 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - k^2 \psi, \quad (7)$$

причем показательная функция как множитель опущена.

Так как условия (1) должны иметь место и на границе, то должно быть

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ или}$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

для $y=0$ и для $y=h$.

Если обозначим через S полное решение уравнения (6), то интеграция уравнения (7) по методу „вариации постоянных“ дает

$$\psi = \frac{1}{2k} \left\{ e^{ky} \int e^{-ky} S dy - e^{-ky} \int e^{ky} S dy \right\}, \quad (9)$$

а отсюда следует

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2} \left\{ e^{ky} \int e^{-ky} S dy + e^{-ky} \int e^{ky} S dy \right\}. \quad (10)$$

Благодаря неопределенным интегралам войдут, конечно, еще две произвольные добавочные постоянные кроме двух, уже содержащихся в S .

Условия (8) будут выполнены для $y=0$, если мы возьмем в качестве нижнего предела для интеграла значение нуль. Условия для $y=h$ приведутся к виду

$$\int_0^h e^{-kh} S dy = 0, \quad \int_0^h e^{kh} S dy = 0. \quad (11)$$

Если положим теперь

$$S = C_1 S_1 + C_2 S_2, \quad (12)$$

где S_1, S_2 — два независимых решения уравнения (6), то после исключения произвольных постоянных C_1, C_2 будем иметь уравнение

$$\int_0^h e^{ky} S_1 dy \cdot \int_0^h e^{-ky} S_2 dy - \int_0^h e^{-ky} S_1 dy \cdot \int_0^h e^{ky} S_2 dy = 0, \quad (13)$$

которое получили Orr ¹⁾ и позднее независимо от него Зоммерфельд ²⁾. Это уравнение определяет значения σ , когда k дано. Для устойчивости существенно, чтобы, если $\sigma = p + iq$, q было положительным.

Если положить

$$k^2 + \frac{i(\sigma + k\beta y)}{\nu} = \left(\frac{k\beta}{\nu} \right)^{3/2} \eta, \quad (14)$$

то уравнение (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \eta S = 0; \quad (15)$$

¹⁾ Orr, см. выше, стр. 850.

²⁾ Sommerfeld, Atti del IV. Congr. intern. dei matematici, Рим, 1909, II, 116.

это уравнение интегрируется рядами ¹⁾. Таким способом получим

$$S = A_1 \left\{ 1 - \frac{\eta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\eta^6}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6} - \frac{\eta^9}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots \right\} + \\ + A_2 \eta \left\{ 1 - \frac{\eta^3}{3 \cdot 4} + \frac{\eta^6}{3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{\eta^9}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots \right\} \quad (16)$$

или

$$S = B_1 \eta^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \eta^{3/2} \right) + B_2 \eta^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \eta^{3/2} \right) \quad (17)$$

в обозначениях бесселевых функций ²⁾.

Дальнейшее исследование проблемы представляет трудности. Оно было значительно продвинуто Орром и в более позднее время Рэлеем ³⁾; в работах последних авторов имеются также и дальнейшие литературные указания.

Профессор Соутвелл совсем недавно в своем исследовании этого вопроса ⁴⁾, отправляясь от уравнения (5), предположил снова $\sigma = p + iq$, так что множитель, зависящий от времени, представлялся в виде $e^{-qt + i(pt + kx)}$, и затем приступил к тому, чтобы показать, что если $p = 0$, т. е. если возмущение не носит характера колебаний, то допустимые значения q необходимо должны быть положительными, и пока это будет иметь место, движение сдвига будет устойчиво. Он изучил, далее, характер соответствующих видов затухания и иллюстрировал их целым рядом интересных рисунков относительных линий тока.

§ 369. Рейнольдс в своей замечательной работе ⁵⁾ рассматривает общую задачу с другой точки зрения. Он предполагает, что турбулентное движение уже имеет место, и старается установить критерий, на основании которого можно решить, возрастает турбулентность, убывает, или остается стационарной.

Для этой цели скорость (u, v, w) разлагается на две составляющие. Положим на момент

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-1/2\tau}^{t+1/2\tau} u dt, \\ \bar{v} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-1/2\tau}^{t+1/2\tau} v dt, \\ \bar{w} &= \frac{1}{\tau} \int_{t-1/2\tau}^{t+1/2\tau} w dt, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹⁾ Cp. Stokes, Camb. Trans., X, 106 (1857) (Papers, IV, 77).

²⁾ По поводу связи уравнения (15) с уравнением Риккати и с уравнением Бесселя см. Forsyth, Differential Equations, § 111.

³⁾ Rayleigh, Stability of Viscous Fluid Motion, Phil. Mag. (6), XXVIII (1914); On the Stability of the Simple Shearing Motion of a Viscous Incompressible Fluid, Phil. Mag. (6), XXX, 329 (1915) (Papers, VI, 266, 341).

⁴⁾ Southwell, Phil. Trans. A, CCIX, 205 (1930).

⁵⁾ Reynolds, On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion, Phil. Trans. A, CLXXVI, 123 (1894) (Papers, II, 535).

несущей с собой свое собственное количество движения. Поток проекции на ось x количества движения через единичные площадки, перпендикулярные к Ox , Oy , Oz , равен соответственно $\rho u \cdot u$, $\rho v \cdot u$, $\rho w \cdot u$. Если мы составим разность потоков количества движения через противоположные грани элемента $\delta x \delta y \delta z$, то и получим изменение за единицу времени слагающей по оси x количества движения в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \delta y \delta z \cdot u) \delta x - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \delta z \delta x \cdot u) \delta y - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \delta x \delta y \cdot u) \delta z.$$

Составим теперь осредненное значение каждого члена уравнений (5), используя соотношения (3). Мы будем предполагать, что без существенной ошибки можно положить осредненные значения величин \bar{u} , $\bar{u}'u'$, $\bar{v}'v'$, $\bar{w}'w'$. . . соответственно равными \bar{u} , 0, 0, 0, . . . Хотя такое предположение и не вполне точно, однако, оно допустимо в тех случаях, когда колебания u , v , w около их средних значений в течение промежутка времени τ достаточно часты. Отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}u &= \bar{u} \bar{u} + \overline{u'u'}, \\ \bar{v}v &= \bar{v} \bar{v} + \overline{v'v'}, \\ \bar{w}w &= \bar{w} \bar{w} + \overline{w'w'}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким способом получим

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \rho X + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}_{xx} - \rho \bar{u}u - \rho \overline{u'u'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}_{yx} - \rho \bar{u}v - \rho \overline{u'v'}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p}_{zx} - \rho \bar{u}w - \rho \overline{u'w'}) , \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

между тем как уравнение непрерывности дает

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) суть уравнения осредненного движения¹⁾. Следует заметить, что эти уравнения движения примут ту же форму, что и точные уравнения (5), если только мы введем добавочные компоненты напряжения

$$P_{xx} = -\overline{\rho u'u'}, \quad P_{yx} = -\overline{\rho u'v'}, \quad P_{zx} = -\overline{\rho u'w'}. \quad (10)$$

Эти формулы несколько напоминают объяснение вязкости в газах, данное Максвеллом (см. выше).

¹⁾ Или скорее „осредненного от среднего движения“, пользуясь выражением Рейнольдса. Он применяет выражение „осредненное движение“ для системы скоростей (u, v, w) , чтобы отличить рассматриваемое движение от „молекулярного движения“. Турбулентное движение (u', v', w') он называет „относительным средним движением“.

Формула (14) представляет скорость изменения энергии осредненного движения $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. Первый член в правой части представляет рассеяние, происходящее только от одного осредненного движения, и является величиной, существенно отрицательной. Второй же член представляет работу, которую производят фиктивные напряжения (10) в единицу времени.

Если теперь обозначим через T истинную кинетическую энергию, то можем на основании уже сделанного предположения считать

$$\bar{T} = T_0 + \bar{T}', \quad (17)$$

где

$$T' = \frac{1}{2} \rho \iiint (u'^2 + v'^2 + w'^2) dx dy dz, \quad (18)$$

т. е. T' — кинетическая энергия пульсационного движения. При помощи метода § 344 можно показать, что при рассматриваемом предположении неподвижности границ, вдоль которых имеет место прилипание, полное рассеяние в среднем равно сумме рассеяний, происходящих от осредненного движения и от пульсационного движения. Поэтому имеем

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = - \iiint \Phi_0 dx dy dz - \iiint \bar{\Phi}' dx dy dz, \quad (19)^1$$

где

$$\Phi' = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\}. \quad (20)$$

Из сравнения с формулой (14) получается

$$\frac{dT'}{dt} = - \iiint \bar{\Phi}' dx dy dz - \iiint \Psi dx dy dz. \quad (21)$$

Знак выражения в правой части показывает, будет ли средняя энергия \bar{T}' пульсационного движения (u', v', w') возрастать или убывать.

Первый интеграл, который только один содержит коэффициент вязкости μ , существенно отрицателен; второй интеграл зависит от инерции жидкости и, смотря по обстоятельствам, может быть положительным или отрицательным.

Если в расчет будут приняты внешние силы X, Y, Z и если скорости u, v, w на границе рассматриваемой области не обязательно должны исчезать, то уравнение (14) потребует поправки, а именно добавления членов, которые частью выражают передачу кинетической энергии осредненного движения границам, частью представляют работу, которую производят силы X, Y, Z , и, наконец, работу, которую производят на границе области средние напряжения $\bar{p}_{xx}, \bar{p}_{yy}, \bar{p}_{zz}, \dots$ и фиктивные напряжения $\bar{p}_{xx'}, \bar{p}_{yy'}, \bar{p}_{zz'}, \dots$.

Уравнение же (21) требует добавления только одного члена, который выражает переход энергии турбулентного движения через границу.

Вывод замечательных формул (14) и (21) и только что намеченные преобразования их при сделанных предположениях кажутся безукоризненными. Однако, при приложении этих формул к действительным случаям

¹⁾ Следует заметить, что мы, собственно говоря, принимаем здесь, что дифференциал dt элемента времени имеет тот же порядок величины, как и взятый в определениях (1) интервал τ . Способ, примененный в тексте, позволяет избежать рассмотрения некоторых очень длинных уравнений, которые встречаются в оригинале.

следует всегда иметь в виду те предположения и ограничения относительно характера турбулентного движения, которые были сделаны.

Приведем здесь некоторые следствия из формулы (21)¹⁾. Прежде всего относительная величина членов в правой части не изменится, если изменить знаки при u' , v' , w' или умножить эти величины на произвольный постоянный множитель. Устойчивость заданного состояния осредненного движения не должна поэтому зависеть от абсолютной величины возмущения. С другой стороны, некоторые комбинации u' , v' , w' кажутся более благоприятными для устойчивости, чем другие. Так, например, в случае возмущенного ламинарного движения, параллельного оси Ox и происходящего между двумя твердыми плоскими стенками $y = \pm b$, формула (16) приводится к виду

$$\Psi = \rho \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (22)$$

так что будут иметь стремление возрастать те возмущения, в которых для $y > 0$ преобладают комбинации u' , v' с одинаковыми знаками. Это указывает на стремление к выравниванию скоростей в различных слоях. Далее, относительное значение второго члена правой части формулы (21), от которого только и зависит возрастание \bar{T}' становится тем больше, чем больше значения скоростей деформаций $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, ... в осредненном движении. Здесь-то мы и получаем указание на причину того, почему данный вид осредненного движения начинает нарушаться лишь в тот момент, когда будет достигнута определенная критическая скорость.

Если мы применим (видоизмененные) формулы к течению в цилиндрической трубе постоянного сечения при условии, что градиент давления $\left(-\frac{dp}{dx}\right)$ равен нулю, то получим

$$\frac{dT_0}{dt} = \rho X \bar{u} \pi a^2 - 2\pi \int_0^a \Phi_0 r dr + 2\pi \int_0^a \Psi r dr \quad (23)$$

и

$$\frac{d\bar{T}'}{dt} = - \iint \bar{\Phi}' dy dz - 2\pi \int_0^a \Psi r dr, \quad (24)$$

где

$$\Phi_0 = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)^2, \quad \Psi = \rho \overline{u'q'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}. \quad (25)$$

Рассматриваемая здесь область лежит между двумя поперечными сечениями трубы (с площадью πa^2), находящимися друг от друга на расстоянии *единицы длины*; ось x совпадает с осью трубы и q обозначает составляющую скорости, перпендикулярную к этой оси. При этом, конечно, предполагается, что $\bar{q} = 0$ и $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$, так что осредненное состояние для каждого сечения трубы во всех отношениях одно и то же. Условия установившегося движения мы получим, если члены в правой части формул (23) и (24) положим равными нулю.

Рейнольдс подробно рассматривает задачу для двух измерений, а именно, тот случай, когда течение, параллельное оси x , происходит между двумя неподвижными стенками $y = \pm b$. Он предполагает в согласии с § 330, что \bar{u}

¹⁾ Ср. Lorentz, Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluss dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren, Abh. über theoret. Physik, Leipzig, 1907, 1, 43. Эта работа представляет в исправленном виде работу, опубликованную в 1897 г.

изменяется по закону $b^2 - y^2$, и старается найти для потока минимум, совместимый с условием $\frac{dT'}{dt} = 0$; но за всем, что относится к этому исследованию, мы отсылаем к оригинальной статье. Рейнольдс получает следующий результат: критическое значение отношения $\frac{u_0 b}{\nu}$, где u_0 — осредненное значение \bar{u} в интервале $y = \pm b$, должно превосходить значение 258 ¹⁾).

Сопротивление жидкостей.

§ 370. Сопротивление жидкостей имеет значение во многих практических вопросах, например, в вопросах, относящихся к движению судов, к полету снарядов и к действию ветра на сооружения. Хотя вопрос о сопротивлении жидкостей благодаря своему значению для авиации разрабатывался в последнее время с возросшей энергией, все же наши знания в этой области все еще имеют, главным образом, эмпирический характер.

Мы видели следующее: если изолированное тело движется в идеальной жидкости в некотором удалении от границы (если последняя вообще существует), то не происходит никакой потери энергии; если в частности движение жидкости начинается из состояния покоя и, следовательно, является движением невихревым и нециклическим, то влияние его может быть вполне охарактеризовано изменением массы твердого тела ²⁾ (§§ 92, 117).

Первая попытка при помощи точных теоретических рассуждений получить результат, менее противоречащий обычному опыту, содержится в исследованиях Кирхгофа и Рэлея, относящихся к плоской задаче о движении плоской пластинки (§§ 76, 77). Следует заметить, что движение жидкости в такого рода задачах уже нельзя считать совершенно свободным от вихрей, так как поверхность разрыва равносильна вихревому слою (§ 151).

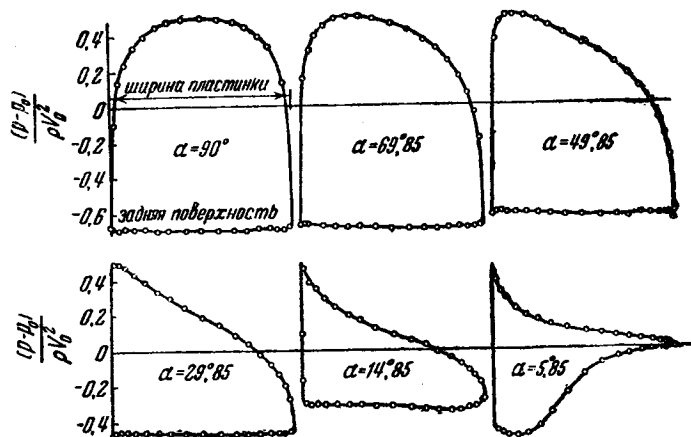
Помимо того факта, что вязкость здесь не учитывается, эта теория встречает еще то возражение, что следующая за пластинкой неограниченная масса „мертвой воды“ должна обладать бесконечно большой кинетической энергией, и потому, а также и по другим соображениям, необходимо будет признать, что методы Гельмгольца

¹⁾ Другой результат получил Sh a r p e, On the Stability of the Motion of a Viscous Liquid, Trans. Amer. Math. Soc., VI, 496 (1905), который исследовал также течение в цилиндрических трубах. Эта задача, так же как задача равномерного движения сдвига между параллельными плоскостями, подробнее была рассмотрена Орром, см. выше, стр. 850. Расхождения в числовых результатах происходят, повидимому, от разницы в формах рассматривавшихся возмущений. Последняя из названных задач рассматривалась также Лоренцом (см. выше).

²⁾ Отсутствие сопротивления в собственном смысле авторами континента часто обозначается как „парадокс Даламбера“. Рэлей показал способом последовательных приближений, что этот парадокс имеет место также и в случае сжимаемой (идеальной) жидкости, пока скорость переноса остается меньше, чем скорость звука, Phil. Mag. (6), XXXII, 1 (1913).

и Кирхгофа собственно можно применять только к случаю *свободной* поверхности, такой, как струя¹⁾.

Вычисления Кирхгофа и Рэлея дают верный результат, что сопротивление пропорционально квадрату скорости, как это и требуется на основе их допущений по теореме импульсов²⁾ и как это подтверждается внутри некоторых пределов и практикой, но распределение давления по поверхности пластинок оказывается совершенно различным. Имеется не только избыток давления на передней стороне, но и недостаток давления, или подсос, на задней; оба обстоятельства способствуют увеличению общего сопротивления. Эти результаты иллюстрируются на прилагаемых диаграммах (фиг. 83)³⁾,



Фиг. 83.

где ордината указывает распределение давления и подсоса по ширине пластинки при различных углах α наклона ее к направлению потока.

Были попытки со стороны некоторых авторов распространить методы Кирхгофа на случай криволинейной пластинки⁴⁾, но по указанной выше причине они имели малое значение для практических вопросов.

§ 370а. Двойная цепочка вихрей с противоположными направлениями вращений, следующая в хвосте за вытянутой (в поперечном направлении) пластинкой или вообще за цилиндрическим телом, изображалась

¹⁾ Kelvin, Nature, I, 524 (1894) (Papers, IV, 215).

²⁾ Ср. Newton, Principia, lib. II, prop. 33.

³⁾ Из работы Fage и Johannsen, On the Flow of Air behind an Inclined Flat Plate of Infinite Span, Aeronautical Research Committee, R. and M. № 1104 (Proc. Roy. Soc., CXVI, 170 (1927)). За некоторыми более ранними измерениями можно отослать к Стантону, On the Resistance of Plane Surfaces in a Uniform Current of Air, Proc. Inst. Civ. Eng., CLVI, 78 (1904); Эйфель, La Résistance de l'Air, Paris (1910).

⁴⁾ Ссылки были даны на стр. 133.

многими исследователями, и иногда очень удачно, с помощью фотографии¹⁾. При некоторой, достаточно умеренной скорости вихри последовательно отделяются с двух сторон тела, и общее расположение вихрей оказывается аналогичным тому случаю шахматного расположения, который был исследован Карманом (§ 156); исключение составляло только то обстоятельство, что вихри не являлись концентрированными в точках, что принималось для упрощения исследования. Эти исследования и послужили основой теории сопротивления для плоского случая. Предполагая движение всюду, за исключением изолированных вихрей, безвихревым, Карман из рассмотрения количеств движения выводит формулу²⁾

$$\frac{\rho k b}{a}(U - 2V) + \frac{\rho k^2}{2\pi a}, \quad (1)$$

где U обозначает скорость тела относительно жидкости, а остальные обозначения те же, что и в § 156. В частности V обозначает скорость цепочки вихрей относительно невозмущенной жидкости. В устойчивом случае мы нашли, что

$$\frac{b}{a} = 0,281, \quad k = \sqrt{8} \cdot Va. \quad (2)$$

Если мы подставим эти значения в (1), то все еще останутся неизвестными отношение $\frac{V}{U}$ и зависимость между b (или a) и размерами препятствия. Формула (1) только тогда становится полной формулой сопротивления, когда эти неизвестные будут как-то определены. В силу диффундирующей природы реальных вихрей точное наблюдение их затруднено, но все же оно было выполнено Карманом для воды и Фаге для воздуха.

Прежде чем оставить эту тему, следует указать, что и для объяснения многих явлений акустики мы должны обращаться к образованию двойной цепочки вихрей. Известным примером является тот характерный звук, который вызывается действием порыва ветра на деревья. Здесь мы имеем образование при соответствующих условиях тонов³⁾ различной силы. В авиации мы встречаемся с завыванием троссов аэропланов⁴⁾ и ревом пропеллера различной силы.

¹⁾ Например, Ahlborn, Ueber den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes, Hamburg (1902); Bénard, Comptes Rendus, CXLVII, 839 (1908); Kármán and Rubach, Phys. Zeitschr. (1913), стр. 49; Prandtl, The generation of vortices..., London (1927); Rosenhead, Proc. Roy. Soc. A, CXXIX, 115 (1930).

²⁾ Независимое вычисление проф. Syngé, Proc. Roy. Irish. Acad., XXXVI, A, 95 (1929) в предположении существования только „полубесконечной“ цепочки вихрей приводит к аналогичному результату. Соответствующая формула для случая движения жидкости между параллельными стенками получена Rosenhead и (приближенно) Glauegt, см. выше, стр. 288.

³⁾ Rayleigh, Phil. Mag. (6), VI, 29 (1915) (Papers, VI, 315).

⁴⁾ Reif, Phil. Mag. (6) XLII, 173 (1921).

На основе рассмотрения размерностей Рэлей заметил, что частота тона N , производимого воздухом, набегаящим на цилиндрический провод диаметра D , должна удовлетворять формуле типа

$$N = \frac{U}{D} f\left(\frac{v}{UD}\right). \quad (3)$$

Эмпирическая же формула, которую он построил на основании некоторых наблюдений Струхаля, имеет вид

$$\frac{ND}{U} = 0,195 \left(1 - \frac{20,1v}{UD}\right). \quad (4)$$

Теперь мы можем сравнить этот результат с частотой, с которой вихри отделяются от круглого цилиндра в потоке воды по наблюдениям Кармана. Его результаты для двух различных скоростей эквивалентны формулам

$$N = 0,207 \frac{U}{D} \text{ и } 0,198 \frac{U}{D}.$$

Фаге, экспериментируя в воздухе, нашел, что для значительного интервала скоростей частота вихрей, отделяющихся с одного края *плоского лезвия*, перпендикулярного к потоку, может быть представлена хорошо согласующейся с наблюдениями формулой

$$N = 0,146 \frac{U}{D},$$

где D — ширина лезвия. Аналогичные наблюдения Кармана для воды дают числовой множитель в пределах от 0,139 до 0,145.

§ 370b. Единственный случай, когда действие *равномерного*¹⁾ потока идеальной жидкости на погруженное в него тело дает результирующую силу, есть случай плоского контура с циркуляцией вокруг него. Эта результирующая сила есть подъемная сила, перпендикулярная к скорости потока и равная на единицу длины

$$L = k\rho U, \quad (1)^2$$

где U — скорость потока, а k — циркуляция. Эта теорема, содержание которой совершенно не зависит от вида и размера поперечного сечения, и составляет основу современной теории подъемной силы крыла аэроплана³⁾. Доказательство этой теоремы было уже дано отдельно в § 72b, но важность этого вопроса может оправдать включение дополнительного доказательства, которое имеет менее искусственный характер.

¹⁾ Необходимость такого ограничения иллюстрировалась в §§ 72b, 143.

²⁾ Kutta, см. выше, стр. 102; теорема была дана в неопубликованной диссертации в 1902 г. Первое опубликованное сообщение принадлежит Жуковскому (1906).

³⁾ Lanchester, *Aerodynamics*, London (1907); Prandtl, *Gött. Nachr. math. phys. Classe* (1918), (1919).

Если (u, v) суть составляющие скорости жидкости, исчезающие в бесконечности, то формула для давления представляется в виде

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} - \frac{1}{2} \{ (u-U)^2 + v^2 \}, \quad (2)$$

так как движение относительно тела является установившимся. Предполагая, что l, m суть направляющие косинусы внешней нормали к элементу ds контура поперечного сечения, результирующую давлений на тело в направлении оси x получим в виде

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \rho \int (u^2 + v^2) l \, ds - \rho U \int ul \, ds = \\ &= -\rho \iint \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \, dy - \rho U \int ul \, ds = \\ &= \rho \int (lu + mv) u \, ds - \rho U \int ul \, ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы здесь опускаем два криволинейных интеграла, взятых по бесконечно большому контуру; они обращаются в нуль, так как скорость в бесконечности имеет порядок $\frac{1}{r}$, где r — расстояние от начала.

Таким же способом мы найдем

$$Y = \rho \int (lu + mv) v \, ds - \rho U \int um \, ds. \quad (4)$$

Но на поверхности контура мы имеем

$$lu + mv = lU, \quad (5)$$

следовательно, $X = 0$ и

$$Y = \rho U \int (lv - mu) \, ds = \rho k U. \quad (6)$$

Случай эллиптического цилиндра, который содержит в себе как предельную форму случай плоской пластинки, может быть исследован на основании формулы, данной в конце § 72. При указанных там обозначениях давления жидкости на эллиптический цилиндр с полуосями a и b (когда $\omega = 0$) приводятся к силе

$$X = -\pi \rho k V, \quad Y = \pi \rho k U \quad (7)$$

и к паре

$$N = -\pi \rho UV (a^2 - b^2). \quad (8)$$

§ 371. Замечательно то, что формула

$$R = k \rho U^2 \quad (1)$$

для сопротивления на единицу поверхности [§ 366 (6)] с приблизительно тем же значением коэффициента k имеет силу для обширного класса случаев турбулентного течения вдоль неподвижной граничной поверхности большой протяженности. Она, например, применима для трения ветра, дующего¹⁾ над ровной поверхностью, и для сопротивления морского дна приливным течениям. Основываясь на этом, Тэйлор в своей интересной работе²⁾ вычислил по известным ско-

¹⁾ G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, XCII, 196 (1915).

²⁾ Taylor, см. выше, стр. 710 и Monthly Notices R. A. S., LXXX, 308 (1920).

ростам течения скорость рассеяния энергии в Ирландском море. Эту скорость можно также вычислить совершенно другим способом, а именно по скоростям и высотам приливных течений в северном и южном проходах при входе и выходе и по работе, произведенной силами притяжения луны. Результаты обоих этих способов вычисления были порядка $3 \cdot 10^{17}$ эргов в секунду. Жеффри¹⁾ на основании тех же соображений произвел оценку приливного рассеяния для всего океана и получил при этом результат $2,2 \cdot 10^{19}$. Рассеяние же, которое оказывается необходимым, чтобы объяснить ускорение среднего движения луны, равно $1,41 \cdot 10^{19}$.

Что же касается полного сопротивления жидкости (или газа, когда сжатие его незначительно) при поступательном движении в соответствующих направлениях подобных между собою тел произвольной формы, то на основании рассмотрения размерностей можно прийти к формуле вида

$$F = \rho U^2 l^2 f\left(\frac{Ul}{\nu}\right), \quad (2)$$

где l обозначает какую-либо длину, определяющую размеры тела (например, радиус в случае шара). Приблизительная пропорциональность U^2 , найденная во многих случаях, указывает на то, что в этих случаях функция f оказывается приблизительно постоянной и что сопротивление поэтому почти не зависит от вязкости. Как и в рассмотренных ранее случаях, это не означает, что вязкость не оказывает никакого влияния; это влияние сказывается наряду с сопротивлением скольжению на поверхности в установлении того режима, который в конце концов в действительности наступает.

Формула (2) служит основанием метода, при помощи которого определяют силы, действующие на воздушный корабль или крыло аэроплана, по опытам над уменьшенной моделью в аэродинамической трубе. Множитель $f\left(\frac{Ul}{\nu}\right)$ представляет в действительности то, что определяется как коэффициент сопротивления. Если значение числа Рейнольдса $\frac{Ul}{\nu}$ взять одинаковым как в случае модели, так и в случае натуральных размеров, то силы будут пропорциональны соответствующим значениям $\rho U^2 l^2$.

Относительная малость линейных размеров l в модели может компенсироваться до некоторого предела увеличением скорости U или, как это делается в трубах больших скоростей, применением сильно сжатого воздуха, так как для газа при данной температуре значение ν обратно пропорционально плотности.

Возрастание коэффициента сопротивления от нуля носит произвольный характер; с некоторого момента он начинает уменьшаться и затем возрастать, обнаруживая несомненное стремление к постоянному значению.

¹⁾ Jeffreys, Phil. Trans. A, CCXXI, 239 1920).

Форма тела наименьшего сопротивления может быть определена лишь опытным путем. При обычном очертании воздушного корабля, профиль которого тупой спереди и суживается к концу, центральные линии тока плотно прилегают к профилю, и турбулентность оказывается заметной только в тонком слое около поверхности тела и в кильватере. Подобная „обтекаемая“ форма, как ее называют, применяется также и для поперечных сечений аэропланных стоек и троссов.

Метод „размерностей“, который был использован в §§ 365, 366, может быть представлен в иной форме¹⁾. Возьмем одно из динамических уравнений движения несжимаемой жидкости, например,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (3)$$

и представим себе другое состояние движения той же или другой жидкости, отличающееся только масштабами линейных размеров и времени. Отличая штрихами буквы, относящиеся к этому состоянию, мы полагаем, что x' , y' , z' находятся в постоянном отношении соответственно к x , y , z , а t' — в постоянном отношении к t . Члены в том уравнении, которое соответствует уравнению (3), будут отличаться все от соответствующих членов уравнения (3) на один и тот же множитель только тогда, когда будут существовать следующие равенства отношений:

$$\frac{u'}{t'} : \frac{u}{t} = \frac{u'^2}{x'} : \frac{u^2}{x} = \frac{p'}{\rho' x'} : \frac{p}{\rho x} = \frac{\nu' u'}{x'^2} : \frac{\nu u}{x^2}. \quad (4)$$

Эти равенства эквивалентны

$$u' : u = \frac{x'}{t'} : \frac{x}{t}; \quad p' : p = \rho' u'^2 : \rho u^2; \quad \frac{u' x'}{\nu} = \frac{u x}{\nu}. \quad (5)$$

Уравнение неразрывности будет, очевидно, также удовлетворено новыми переменными. Мы заключаем отсюда, что видоизмененное состояние движения будет динамически возможным при условии, что значения чисел Рейнольдса $\frac{U l}{\nu}$ будут одинаковыми, где U и l будут представлять соответственно характерную скорость и характерный линейный размер. Тогда давления в соответствующих точках будут пропорциональны ρU^2 , а силы на соответствующие площадки — $\rho U^2 l^2$.

Пограничный слой.

§ 371а. Совершенно ясно, что всякая рациональная теория сопротивления должна также учитывать и то абсолютное сопротивление, которое тело противопоставляет скольжению жидкости вдоль его

¹⁾ Ср. Helmholtz, Berl. Ber., июнь 26, 1873 (Wiss. Abh., I, 158), где приведены некоторые интересные применения принципов динамического подобия.

поверхности. С другой стороны, небольшого наблюдения достаточно, чтобы заметить, что переход от скорости на поверхности к скорости жидкости вблизи нее часто совершается на очень коротком расстоянии. В самом деле, когда тело достаточно плавной формы, такое, как шар или цилиндр, или крыло аэроплана, движется в такой подвижной жидкости, как вода, со скоростью, значительно превышающей те скорости, которые имелись в виду в исследованиях §§ 337—343, то оказывается, что вихри сосредоточиваются почти только в узкой полоске вдоль передней части поверхности и в хвосте. К изучению этой переходной области как с математической, так и с экспериментальной стороны и были направлены в течение некоторого времени усилия многих исследователей. Конечно, здесь не предполагается существование определенной поверхности раздела между слоем и прилегающей жидкостью, ибо сам переход должен быть непрерывным, но обычно бывает возможно указать предел, и зачастую очень тесный, внутри которого этот переход полностью практически завершается.

Для последующего удобнее представлять тело покоящимся, а жидкость обтекающей его со скоростью U , постоянной до тех пор, пока она не претерпевает возмущений от присутствия тела.

Условия будут наиболее простыми, если рассматривать плоскую задачу о пластинке или плоскости, помещенных по потоку. Пограничный слой здесь начинается в самом переднем крае или вблизи него и постепенно утолщается с возрастанием расстояния (x) от края. До тех пор пока местное число Рейнольдса $\frac{Ux}{\nu}$ будет ниже некоторого предела (приблизительно порядка 10^6), движение внутри слоя будет установившимся и часто обозначается как „ламинарное“ в том смысле, что линии тока будут идти почти параллельно поверхности. Когда же этот предел будет превзойден, тогда слой становится турбулентным, и его толщина возрастает значительно быстрее.

Ламинарное течение в слое изучалось математически различными авторами. Точные уравнения установившегося движения, а именно

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + \nu \Delta_1 u, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + \nu \Delta_1 v_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

едва ли могут быть подвергнуты разрешению, если не прибегать к различным возможным упрощениям.

Возьмем начало на переднем крае, а ось x вдоль пластинки в направлении течения. Так как ν сравнительно мало, то второе уравнение показывает, что p практически не зависит от y . Затем мы пренебрегаем $\frac{\partial p}{\partial x}$, так как оно обращается в нуль для больших зна-

чений u , где поток не возмущается присутствием пластинки. Далее, так как $u \frac{\partial u}{\partial x}$ обращается в нуль на поверхности пластинки, то значением $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ внутри пограничного слоя можно пренебречь по сравнению со значением $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Уравнения (1), таким образом, приводятся к одному уравнению

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3)$$

к которому, конечно, надо присоединить уравнение (2). Эти рассуждения и составляют исходную точку зрения работы Прандтля и Блазиуса ¹⁾. Эти приближения более подробно были разъяснены Блазиусом; в конечном счете они могут быть проверены в получаемых решениях. Пограничные же условия представлялись в виде $u=0, v=0$ для $y=0$ и $u=U$ для $y \rightarrow \infty$.

После несколько сложных вычислений Блазиус для тангенциального напряжения на пластинку получает следующий результат:

$$(p_{xy})_{y=0} = 0,332 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}. \quad (4)$$

Предполагается, конечно, что условия для ламинарного движения в слое выполнены, т. е. что значение $\frac{Ux}{\nu}$ не превышает ранее указанного предела. Если это имеет место для всей ширины (l) пластинки, то полное сопротивление одной ее стороны будет равно

$$\int_0^l p_{xy} dx = 0,664 U^2 l \sqrt{\frac{\nu}{Ul}}; \quad (5)$$

следовательно, это сопротивление пропорционально $U^{3/2}$.

Несколько иным путем подошел к этому вопросу Карман ²⁾. Он вычислил изменение количества движения в направлении оси x в области, ограниченной пластинкой ($y=0$), двумя соседними ординатами кривой

$$y = \eta(x), \quad (6)$$

¹⁾ Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung mit kleiner Reibung (1904), напечатано в Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik..., Göttingen (1927); Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung (Dissertation), Leipzig (1907). Интересное независимое рассмотрение вопроса смотреть у R. Mises, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., VII, 425 (1927).

²⁾ Kármán, Abh. des aerodynamischen Instituts, Aachen (1921).

которая представляет границу пограничного слоя, и прилегающей дугой этой кривой.

На фиг. 84 имеем

$$QQ' = \delta x, \quad PQ = \eta, \quad P'Q' = \eta + \delta\eta.$$

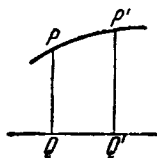
Поток количества движения через грань $P'Q'$ превосходит такой же поток через грань PQ на величину

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\eta} \rho u^2 dy \cdot \delta x.$$

Далее, поток протекающей жидкости через $P'Q'$ превосходит такой же поток через PQ на величину

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\eta} \rho u dy \cdot \delta x,$$

и эта величина в точности должна быть равна количеству жидкости, протекшей в единицу времени внутрь слоя через PP' , где скорость почти равна U и параллельна оси x . Следовательно, полное изменение количества движения в единицу времени через все границы области будет



Фиг. 84.

$$\left\{ \frac{d}{dx} \int_0^{\eta} \rho u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\eta} \rho u dy \right\} \delta x.$$

Эта величина должна быть приравнена тем силам, которые действуют в направлении оси x на жидкость, занимающую в данный момент рассматриваемую область. Они состояются из компоненты давления

$$- \frac{dp}{dx} \eta \delta x$$

и силы трения на самой пластинке

$$- \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \delta x.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\eta} u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\eta} u dy = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (7)$$

которое и представляет „интегральное соотношение“ Кармана¹⁾. Следует заметить, что до сих пор кривая (6) могла быть проведена, как угодно внутри той области, где переход от скорости нуль на пластинке до скорости U потока полностью завершается. Таким образом, это уравнение еще ничего не говорит о „толщине“ пограничного слоя или о характере его изменения с x . Для последнего мы должны будем сделать более или менее правдоподобное предположение о распределении скорости u внутри интервала от 0 до η , благодаря чему результат по необходимости будет зависеть до некоторой степени от сделанного частного предположения. При этом должны быть удовлетворены условия: $u = U$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ для $y = \eta$ и $u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ для $y = 0$; последнее условие вытекает из уравнения (3). Эти условия могут быть удовлетворены, например, функцией

$$u = U \sin \frac{\pi y}{2\eta}. \quad (8)$$

Подставляя в (7), где член $\frac{\partial p}{\partial x}$ должен быть опущен, мы найдем

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\pi^2}{4-\pi} \frac{v}{U\eta}, \quad (9)$$

и, следовательно,

$$\eta = 4,80 \sqrt{\frac{vx}{U}} \quad (10)$$

в предположении, что слой начинается у переднего края.

Тогда получаем

$$(\rho xy)_{y=0} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu U}{\eta} = 0,328 \rho U^2 \sqrt{\frac{v}{Ux}}, \quad (11)$$

что хорошо приближается к результату (4) Блазиуса.

Принятое частное допущение дает

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\pi U y}{2\eta^2} \cos \frac{\pi y}{2\eta} \frac{d\eta}{dx},$$

откуда

$$v = U \frac{d\eta}{dx} \left\{ \frac{y}{\eta} \sin \frac{\pi y}{2\eta} - \frac{2}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2\eta} \right) \right\}. \quad (12)$$

¹⁾ Оно может быть также получено из уравнения (1) с помощью интегрирования по y от 0 до η с учетом уравнения неразрывности. Так, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\eta \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy &= \int_0^\eta u \frac{\partial u}{\partial x} + [uv]_0^\eta - \int_0^\eta u \frac{\partial v}{\partial y} dy = \\ &= \int_0^\eta \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + U(v)_\eta = \int_0^\eta \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dy + U \int_0^\eta \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial x} (u^2 - Uu) dy. \end{aligned}$$

Последняя часть эквивалентна левой части уравнения (7).

§ 371b. Если нетурбулентный поток набегаёт на тело с непрерывной кривизной, то в области перед телом, вблизи по крайней мере передней части поверхности, движение остается, несомненно, безвихревым и имеет в общем тот же характер, который указан на фигурах 13 и 29¹⁾. В частности, имеется центральная линия тока, примыкающая к телу в передней „точке застоя“, характеризуемой нулевой скоростью. Здесь начинается пограничный слой, который, будучи ламинарным, стелется по поверхности с обеих сторон до некоторого расстояния; в случае круглого цилиндра, например, он даже доходит до 70 или 80° от точки застоя. В случае же крыла аэроплана он может распространяться почти до задней кромки. Обстоятельства, конечно, меняются в зависимости от формы тела, а также от скорости U потока. Обычно встречается такая точка, в которой слой становится турбулентным и отрывается от поверхности, оставляя между собой и телом область сильной турбулентности с возвратным потоком вдоль поверхности.

Плоский случай был изучен теоретически Блазиусом и другими при помощи криволинейных координат: дуги s профиля и нормали n , проведенной от поверхности внутрь жидкости. Уравнения, принятые для пограничного слоя, тогда принимают вид

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{\partial p}{\rho \partial s} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad (14)$$

причем эффектом от кривизны мы пренебрегаем²⁾. Мы пренебрегаем попрежнему величиной $\frac{\partial p}{\partial n}$, но величина $\frac{\partial p}{\partial s}$ здесь уже не обращается в нуль, как это предполагалось в случае плоской пластинки. В безвихревой области вблизи поверхности имеет место уравнение Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 = \text{const.}, \quad (15)$$

и, следовательно,

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = U \frac{\partial U}{\partial s}. \quad (16)$$

Положение точки на поверхности, в которой происходит „отрыв“ слоя, определяется из условия $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

¹⁾ Сравнение результатов экспериментальных измерений нормальных давлений в различных точках вытянутого эллипсоида вращения с теоретическими данными, вычисленными в §§ 104, 105, было выполнено R. I o p e s. Phil. Trans. A, CCXXXVI, 231 (1927). Когда эллипсоид был направлен острым концом к потоку, совпадение получилось очень хорошим почти по всей длине.

²⁾ Сравнить то, что получится при $r \rightarrow \infty$ в уравнениях § 328a в полярных координатах.

Блазиус в названной работе применил эти уравнения к случаю цилиндра (произвольной формы сечения), расположенного симметрично по отношению к скорости потока, и затем далее более подробно рассмотрел частный случай кругового сечения. При установившемся *режиме* было найдено, что отрыв происходит где-то около 90° от передней точки застоя. С другой стороны, если цилиндр приходит в движение из состояния покоя либо внезапно, либо с постоянным ускорением, отрыв начинается при 180° и затем переходит вперед. В последнем случае он установил формулу для сопротивления, обусловленного отчасти нормальными давлениями, а отчасти тангенциальными напряжениями ¹⁾.

Эти вычисления выполнены с замечательным аналитическим искусством, но все же результаты нуждаются в некотором уточнении в силу того допущения, что скорость U вне пограничного слоя такая же, как если бы жидкость свободно скользила вдоль поверхности. Строгой точности на самом деле для этого не требуется. Последующие авторы принимали для U то алгебраическое выражение от s — дуги профиля, которое можно поставить в соответствие с экспериментальными значениями p^2).

В приведенных выше исследованиях §§ 337, 342 и др. предполагалось, что число Рейнольдса ($R = \frac{U l}{\nu}$) не превосходит очень малое числовое значение. В тех же случаях, которые мы теперь рассматриваем, напротив, значения R могут быть очень большими и в силу линейных размеров, и в силу малой кинематической вязкости обыкновенных жидкостей. В связи с этим очень интересный вопрос поставил Озеен: каков будет предельный характер движения жидкости в любом данном случае, если $\nu \rightarrow 0$ или $R \rightarrow \infty$? Конечно, нельзя будет ожидать, что в этом случае будет иметь место совпадение с тем результатом, который мы получим, когда s *самого начала* предположим $\nu = 0$.

Вопрос этот кажется очень трудным и почти безнадежным, если исходить из точных уравнений гидродинамики. Озеен же взял за основу линеаризированные уравнения (6) § 342, но здесь мы встречаем а priori то затруднение, что сами эти уравнения получены в результате пренебрежения квадратичными членами, что, как известно, можно делать только в случаях, когда число Рейнольдса очень мало. Поэтому они едва ли могут быть приняты без каких-либо опасений в качестве основы для установления того, что будет в случае реальной жидкости, когда R неограниченно возрастает.

Если оставить это в стороне, то исследования Озеена имеют значительный математический интерес. Они не могут быть здесь воспроиз-

¹⁾ Аналогичные вычисления для трехмерного случая тела вращения, ось которого совпадает с направлением потока, были выполнены Boltze, Göttingen (1908) (Dissertation). Подробное применение сделано для шара.

²⁾ Pohlhausen, Abh. d. aerodynam. Inst. Aachen (1921); Goldstein, Camb. Proc., XXVI, 1 (1930).

ведены¹⁾, но на общих заключениях можно коротко остановиться. Рассматривая, например, установившееся перемещение тела в неограниченной массе жидкости, он нашел, что решение в той цилиндрической области, которую уже прорезало само тело (и которую мы можем на момент называть „хвостом“), будет иметь совершенно другой аналитический характер, чем в остальной безграничной области. Во всей последней области движение оказывается безвихревым, и жидкость, следовательно, плавно скользит вдоль передней стороны тела. В хвосте, напротив, нет скольжения на задней стороне поверхности, и движение является вихревым (но не чисто „турбулентным“). Вдоль той цилиндрической поверхности, где смыкаются эти две области, имеет место непрерывность нормальной компоненты скорости и разрыв тангенциальной компоненты, сопровождающийся недопустимым разрывом давления. Аналитическое решение в этом направлении было получено Цейлоном²⁾ для частных случаев круглого цилиндра, круглого диска и полусферы, перемещающейся вперед либо искривленной частью, либо плоским дном; при этом автор прибегает к некоторым искусственным приемам с целью избежания того недопустимого разрыва, который был указан выше. Как и требуется, результаты дают почти адекватную картину того, что имеет место в действительных случаях. В частности для давлений обнаруживается тот факт, что теоретическое распределение давлений по передней части цилиндра находится в общем согласии с экспериментальными данными. Это и должно получаться почти для всякой приемлемой конфигурации безвихревого движения в примыкающей области (ср. § 371а). Но точка, в которой хвост отделяется от тела, граница хвоста и его внутреннее строение совершенно отличны от того, что наблюдается в действительности. Еще более сильное расхождение, несомненно, будет обнаруживаться, если этот метод применить к дирижаблю или к крылу аэроплана³⁾.

§ 371с. Когда мы переходим к рассмотрению *турбулентного* движения вокруг тела, обозначения u , v должны пониматься в некотором статистическом смысле, как, например, осредненные по времени за очень короткий интервал. Отмечая этот измененный смысл обозначений, как и в § 369, черточкой над соответствующими буквами, перепишем уравнение (7) § 371а в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta} \bar{u}^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta} \bar{u} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \eta - \nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (1)$$

¹⁾ Полное изложение дано со ссылками в руководстве, цитированном выше, на стр. 775.

²⁾ Zeilon, On potential problems in the theory of fluid resistance, Stockholm (1924). См. также добавление Цейлона к книге Озеена, упомянутой выше, на стр. 775.

³⁾ Я нашел, что аналогичная критика, но еще с большими подробностями была высказана F. Noether, Handb. d. phys. u. techn. Mechanik, Leipzig (1928), стр. 792.

Здесь же следует заметить, что среднее значение (\bar{u}^2) от квадрата скорости не тождественно значению квадрата средней скорости (\bar{u}). Это различие, каково бы ни было его практическое значение, не отмечалось авторами работ по рассматриваемому вопросу. Тогда, как можно заметить, если скорость турбулентного потока определяется комбинацией трубки Пито с трубкой статического давления (§ 24), эта комбинация вернее всего показывает скорость „среднего квадрата“.

На основе уравнения (1) были сделаны попытки рассмотреть случаи турбулентного течения, но всякий раз требовалось по необходимости какое-либо предположение о распределении средней скорости в пограничном слое или другие эквивалентные допущения. Принимаемая обычно формула

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\eta}\right)^n \quad (2)$$

нуждалась в уточнении, так как она обращает $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ либо в нуль, либо в бесконечность при $y \rightarrow 0$, за исключением того недопустимого случая, когда $n = 1$ ¹⁾.

Здесь мы находимся уже на границах теории. Дальнейшие наши знания по этой части предмета могут быть извлечены из эксперимента, и за этим необходимо будет обращаться к опубликованным работам различных аэродинамических лабораторий. Литература эта очень обширна и непрерывно увеличивается в своем объеме; она не может быть изложена здесь в сжатом виде.

К ранее рассмотренному вопросу о подъемной силе крыла аэроплана можно добавить одно замечание. Характер обтекания *идеальной* жидкостью крыла аэроплана показан на фиг. 85, причем показана только одна центральная линия тока, но представление о



Фиг. 85.

полной картине может быть составлено из фиг. 18 на стр. 110. Реальная жидкость не может обтекать подобным способом в силу наличия сопротивления скольжению, а из-за этого получается бесконечная скорость и, следовательно, бесконечное отрицательное давление на остром конце задней кромки. Предположение наличия тонкого пограничного слоя, устраняя эти бесконечности, не улучшает значительно

¹⁾ Формула, свободная от этого недостатка, например,

$$y = \frac{\bar{u}}{a} + \left(\eta - \frac{U}{a}\right) \left(\frac{\bar{u}}{U}\right)^n,$$

где

$$a = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)_{y \rightarrow 0},$$

принималась в работе He g g e (при $n=7$), Publications of the Delft aeronautical laboratory, № 6 (1924).

общей картины; влияние вязкости, а следовательно, и образование вихрей вблизи острой кромки слишком велико, чтобы им можно было пренебречь.

Но если на безвихревое движение фиг. 85 наложить циркуляцию в направлении вращения часовой стрелки, то возможно последнюю подобрать так, что скорость на задней кромке будет конечной¹⁾. В этом случае элементарные струйки с обеих сторон встречаются и сходят плавно с кромки, без разрыва. Результат показан на фиг. 86; теперь становится возможным уяснить, как можно мысленно представить себе поведение реальной жидкости при помощи введения пограничного слоя и тонкого хвоста.



Фиг. 86.

Несмотря на попытки, которые были сделаны, пока еще не вполне легко чисто логическим путем обнаружить те стадии, которые должны быть пройдены, прежде чем установится указанная выше картина, после того, как начнется относительное движение²⁾. К счастью, на помощь нам приходят некоторые прекрасные эксперименты³⁾ с малыми моделями в канале. Вначале образуется вихрь с вращением против часовой стрелки и отделяется от кромки, затем он переходит в поток по течению, вызывая дополнительную циркуляцию вокруг крыла с противоположным вращением. С обеих сторон поверхности сползают пограничные слои и заполняют хвост вихрями с противоположными вращениями, которые постепенно диффундируют и погашают друг друга.

Влияние сжимаемости.

§ 371d. Течение сжимаемой жидкости вокруг препятствия, повидимому, впервые математически изучалось Рэлеем⁴⁾. Принимая адиабатический закон, будем иметь

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}, \quad (1)$$

где c обозначает скорость звука, соответствующую местному значению ρ , а значок нуль относится к невозмущенной части потока. Далее, если движение является безвихревым, то из § 24а будем иметь

$$q^2 - U^2 = \frac{2}{\gamma-1} (c_0^2 - c^2). \quad (2)$$

¹⁾ Это показано на примере в § 70, в случае дуги круга.

²⁾ Однако должна быть сделана ссылка на исследование Jeffreys Proc. Roy. Soc. A, CXXVII, 376 (1930).

³⁾ Prandtl, см. выше, стр. 860; Walker, Aeronautical Research Comm., R. and M., 1402 (1932). (Сообщения об экспериментах, проведенных под руководством проф. В. М. Jones и W. S. Farren).

⁴⁾ Rayleigh, Phil. Mag. (6), XXXII, I (1916) (Papers, VI, 402).

Отсюда получаем

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d(c^2)}{c^2} = -\frac{1}{2c^2} d(q^2). \quad (3)$$

Уравнение неразрывности § 7 при установившемся движении принимает вид

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial(q^2)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial(q^2)}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial(q^2)}{\partial z} \right\}, \quad (4)$$

где c выражается через q формулой (2).

Для плоского случая это уравнение в полярных координатах представляется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = \frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial(q^2)}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \frac{\partial(q^2)}{r\partial\theta} \right\}, \quad (5)$$

где

$$q^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} \right)^2. \quad (6)$$

Последнее уравнение и было применено Рэлеем к течению вокруг круглого цилиндра. Вначале в правую часть уравнения (5) он подставляет значения φ и q , соответствующие случаю несжимаемости, и затем интегрирует уравнение. Оказывается, что в этом первом приближении не появляется результирующая сила сопротивления цилиндра, и легко заметить, что это будет иметь место и далее по мере продолжения процесса, ибо значения q^2 будут всегда симметричными по отношению к плоскости, проходящей через ось цилиндра под прямым углом к направлению потока.

Однако, это заключение справедливо при условии сходимости получаемых последовательных приближений, а имеются данные, более чем достаточные, что это не имеет места для случая, когда значение $\frac{U}{c_0}$ превышает некоторый предел. Оставляя пока этот вопрос в стороне, легко распространить метод Рэля на случай цилиндра с произвольной формой сечения, включая также и эффект циркуляции¹⁾. Если бы c было равно бесконечности, то значение φ на большом расстоянии стремилось бы к виду

$$\varphi_1 = -Ur \cos\theta + \frac{k\theta}{2\pi}, \quad (7)$$

где начало r взято в непосредственной близости от самого препятствия, а начальная линия θ параллельна общему направлению потока. Мы принимаем это выражение как первое приближение и подставляем его в правую часть уравнения (5). Мы можем также, для совмест-

¹⁾ L a m b, Aeronautical Research. Comm., R. and M., 1156 (1928).

ности, в следующем приближении заменить величину c ее постоянным значением (c_0) в бесконечности. Из формулы (7) получим

$$q_1^2 = U^2 + \frac{kU}{\pi r} \sin \theta, \quad (8)$$

$$\frac{\partial (q_1^2)}{\partial r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial (q_1^2)}{r \partial \theta} \frac{\partial \varphi_1}{r \partial \theta} = \frac{kU^2}{\pi r^2} \sin 2\theta, \quad (9)$$

оставляя только те члены, которые надо будет рассмотреть при возрастании r до бесконечности. Подставляя в (5), интегрируя и принимая во внимание условия в бесконечности, будем иметь для удаленных областей

$$\varphi = -Ur \cos \theta + \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{kU^2}{8\pi c_0^2} \sin 2\theta. \quad (10)$$

Здесь опущены те дополнительные члены, которые содержат только отрицательные степени от r и, следовательно, не могут влиять на последующие вычисления сил. Отсюда с достаточным приближением получаем радиальную и трансверсальную составляющие скорости

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos \theta, \quad -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -U \sin \theta - \frac{k}{2\pi r} + \frac{kU^2}{4\pi c_0^2 r} \cos 2\theta; \quad (11)$$

следовательно,

$$q^2 = U^2 + \frac{kU}{2\pi r} \left(1 - \frac{U}{2c_0^2} \cos 2\theta\right) \sin \theta. \quad (12)$$

Составляющие же скорости, параллельная и перпендикулярная к потоку, будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= U + \frac{k}{2\pi r} \left(1 - \frac{U^2}{2c_0^2} \cos 2\theta\right) \sin \theta, \\ v &= -\frac{k}{2\pi r} \left(1 - \frac{U^2}{2c_0^2} \cos 2\theta\right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Силы, действующие на препятствие, могут теперь быть определены из видоизмененного потока в бесконечности так, как это сделано в оригинальном доказательстве теоремы Кутта-Жуковского. Изменение количества движения в единицу времени в направлении, перпендикулярном к направлению потока, массы жидкости, заключенной в какой-то момент внутри круга бесконечно большого радиуса r , согласно формулам (10) и (13), будет равно

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) \rho v r d\theta = -\frac{1}{2} k \rho_0 U \left(1 - \frac{U^2}{4c_0^2}\right). \quad (14)$$

Кроме того, из (3) имеем

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \int_q^U \frac{d(q^2)}{2c_0^2} = \frac{U^2 - q^2}{2c_0^2}, \quad (15)$$

а следовательно, согласно с принятым приближением,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{U^2 - q^2}{2c_0^2}. \quad (16)$$

Так как для больших значений r плотность стремится к значению ρ_0 , то мы можем положить

$$p = p_0 + c_0^2(\rho - \rho_0) = p_0 - \frac{k\rho_0 U}{2\pi r} \left(1 + \frac{U^2}{2c_0^2} \cos 2\theta\right) \sin \theta. \quad (17)$$

Следовательно, перпендикулярная к направлению потока результирующая сил давлений, приложенных к окружающей массе жидкости, будет равна

$$-\int_0^{2\pi} p \sin \theta r d\theta = \frac{1}{2} k\rho_0 U \left(1 + \frac{U^2}{4c_0^2}\right). \quad (18)$$

При сравнении с формулой (14) мы и получаем, что „подъемная“ сила, перпендикулярная к потоку, дается известной формулой Жуковского

$$L = k\rho_0 U, \quad (19)$$

причем ошибка приближения оказывается (почти) порядка $\left(\frac{U}{c_0}\right)^4$. По-прежнему очень легко показать, что при данном приближении сопротивление равно нулю.

Формула (19) была впервые обобщена на случай сжимаемой жидкости Глауэртом¹⁾. Его исследование предполагает ограниченность величины отношения $\frac{U}{c_0}$ без точного указания предела, лишь бы оно не превышало единицы. Полученные им формулы для движения в бесконечности эквивалентны выражению

$$\varphi = -Ur \cos \theta + \frac{k}{2\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{1 - \frac{U^2}{c_0^2}} \operatorname{tg} \theta \right\}, \quad (20)$$

которое можно сравнить с формулой (10).

§ 371e. Чтобы изучить, при каких пределах будет возможно установившееся движение сжимаемой жидкости около препятствия данной формы, проф. Тэйлор прибег к электрическому методу, отличающемуся от метода § 60a только тем, что толщина проводящего слоя берется переменной.

Кинематические условия плоского потенциального установившегося движения содержатся в равенствах

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \rho u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

¹ Glauert, Proc. Roy. Soc. A, CXVIII, 113 (1927).

Уравнения же электрического тока в проводящем слое переменной толщины h будут

$$\sigma f = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \sigma g = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad hf = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad hg = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (2)$$

где (f, g) есть плотность тока, σ — удельное сопротивление, V — электрический потенциал и W — функция тока. Эти два ряда равенств будут тождественно совпадать, если положить

$$\varphi = V, \quad \psi = W, \quad u = \sigma f, \quad v = \sigma g, \quad \varrho u = hf, \quad \varrho v = hg, \quad (3)$$

причем равенства (3) включают в себя $h = \varrho \sigma$; иначе мы можем положить

$$\varphi = W, \quad \psi = -V, \quad u = -hg, \quad v = hf, \quad \varrho u = -\sigma g, \quad \varrho v = \sigma f, \quad (4)$$

откуда следует $h = \frac{\sigma}{\varrho}$. До сих пор соответствие было чисто кинематическим, кроме того, должно удовлетворяться условие (2) § 371d. Отсюда, при первой форме аналогии, мы должны иметь

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} = \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{U^2}{c_0^2} \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (5)$$

где значок нуль относится к областям, в которых течение почти не возмущено. Фиксируя значение $\frac{U}{c_0}$, вначале из эксперимента с электропроводящим слоем постоянной толщины находим распределение значений $\frac{q}{U}$. Найденные значения подставляются в формулу (5) и таким способом определяется исправленное значение h , затем в сосуде изменяется дно в соответствии с полученным значением h , процесс повторяется, и так далее. За полными подробностями мы можем отослать к оригинальным работам¹⁾.

В случае течения около круглого цилиндра проф. Тэйлор нашел что последовательные конфигурации очень быстро сходятся для значений $\frac{U}{c_0}$, меньших, чем 0,45, и перестают сходиться после этого предела.

Вторая аналогия была применена в случае сечения крыла аэроплана при наличии циркуляции, подобранной так, чтобы избежать бесконечной скорости на задней кромке. В этом случае найденный предел сходимости составляет $\frac{U}{c_0} = 0,58$.

§ 371f. Следует указать и иную форму уравнений сжимаемой жидкости. Если мы допустим, что движение является только установившимся и необязательно будет потенциальным, то для случая двух измерений будем иметь (§ 165)

$$u \frac{\partial \chi}{\partial x} + v \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

¹⁾ Taylor a. Shearman, Proc. Roy. Soc. A, CXXI, 194 (1928); Taylor, Journal of the Lond. Math. Soc., v. 224 (1930).

где

$$\chi = \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} q^2. \quad (2)$$

Отсюда

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dq} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial (q^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (q^2)}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

Полагая $\frac{dp}{dq} = c^2$ и используя уравнение неразрывности, будем иметь

$$c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial (q^2)}{\partial x} + v \frac{\partial (q^2)}{\partial y} \right) = 0 \quad (4)$$

или, наконец,

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

В случае безвихревого движения это последнее уравнение принимает вид

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

что эквивалентно уравнению Рэля (5) § 371d.

Уравнение (6) обращается в линейное уравнение, если мы прибегнем к „принципу двойственности“¹⁾ и будем рассматривать u и v как независимые переменные. Полагая

$$\Phi = ux + vy - \varphi, \quad (7)$$

мы найдем

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0. \quad (8)$$

Некоторые интересные замечания о характере задач, связанных с этим уравнением, были сделаны Батеманом²⁾.

§ 371g. Если мы принимаем во внимание сжимаемость, то формулу (2) § 371 следует несколько изменить. Обозначим через k коэффициент объемной упругости; тогда по методу размерностей легко придти к формуле

$$F = \rho U^2 l^2 f \left(\frac{Ul}{v}, \rho \frac{U^2}{k} \right). \quad (1)$$

Если U мало в сравнении со скоростью звука в газах, т. е. в сравнении со значением $\sqrt{\frac{k}{\rho}}$, то эта формула приближается к уже рассмотренному виду

$$F = \rho U^2 l^2 f \left(\frac{Ul}{v}, 0 \right). \quad (2)$$

¹⁾ Forsyth, Differential Equations, § 242.

²⁾ Bateman, Proc. Roy. Soc. A, CXXV, 598 (1929).

Закон сопротивления, изменяющегося пропорционально квадрату скорости, достаточно хорошо оправдывается на опыте в случае снарядов, движущихся в воздухе со скоростью, не превышающей примерно 250 метров в секунду. Если же скорость приближается к скорости звука или превосходит ее, то, как и следовало ожидать, закон сопротивления видоизменяется. В этом случае, кроме сопротивления, обусловленного трением, возникает еще волновое сопротивление, подобное тому, о котором говорилось в § 249.

Если $U > c_0$, где c_0 обозначает обыкновенную скорость звука, то образуется волна (приблизительного) разрыва, как это видно из фотографий, полученных Махом, Бойсом¹⁾ и др. Формулы Ранкина (§ 284), справедливые для этого случая, Рэлей²⁾ применил для вычисления давления у носа снаряда.

Предполагая, что задача приведена к случаю установившегося движения, рассмотрим движение на линии симметрии. При этом должны быть рассмотрены две стадии. Если обозначить через q относительную скорость воздуха, то впереди волны будем иметь, например, $q = U$ и $p = p_0$, $\rho = \rho_0$. Соответствующие значения непосредственно за волной обозначим через q_1 , p_1 , ρ_1 . Отсюда, если положить в уравнениях (14) и (15) § 284 $m = q\rho$, будем иметь

$$\rho_1 q_1^2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)p_1 + \frac{1}{2}(\gamma + 1)p_0, \quad (3)$$

$$\rho_0 U^2 = \frac{1}{2}(\gamma + 1)p_1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)p_0. \quad (4)$$

Так как $c_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$, то второе уравнение дает

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{U^2}{c_0^2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (5)$$

и определяет таким образом $\frac{p_1}{p_0}$.

Далее, скорость воздуха в промежутке от задней стороны волны до носовой части снаряда непрерывно падает от q_1 до 0. Поэтому на основании формулы (1) § 25 имеем

$$q_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left\{ \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right\}, \quad (6)$$

где p_2 , ρ_2 относятся к носу снаряда. Подставляя вместо $\frac{\rho_1 q_1^2}{p_1}$ выражение этой величины из уравнения (3), получаем

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{(\gamma + 1)^2}{4\gamma} + \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma} \frac{p_0}{p_1}. \quad (7)$$

¹⁾ В о у s, Nature, XLVII, 440 (1893).

²⁾ Rayleigh, см. выше, стр. 601.

Эта формула в соединении с уравнением (5) и дает искомое значение p_2 .

Принимая $\gamma=1,41$, получим

$$\frac{p_2}{p_0} = 1,90, \quad 5,67 \quad 11,7 \quad 20,7$$

для случаев $\frac{U_0}{c_0} = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4.$

Обратно, этот способ можно применить для того, чтобы измерить скорости воздуха, превосходящие скорость звука. Отношение $\frac{p_2}{p_0}$ находят из отсчетов по трубке Пито, направленной отверстием против потока, и трубки „статического давления“. Уравнение (7) определяет тогда значение отношения $\frac{p_1}{p_0}$, а отсюда находят U при помощи формулы (5). Таким способом Стантон измерил скорости, превосходящие скорость звука в два-три раза, и нашел, что эти измерения очень точно совпадают с другими независимыми и тщательно выполненными экспериментальными определениями ¹⁾.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ВРАЩАЮЩИЕСЯ МАССЫ ЖИДКОСТИ.

§ 372. Содержание этой главы имеет свое начало в исследованиях о фигуре земли, которые были начаты еще Ньютоном и Маклореном и далее продолжены большой французской школой математиков, находившейся в расцвете в конце 18 и в начале 19-го столетий. В позднейшее время теория вращающихся жидких масс получила значительное развитие главным образом благодаря трудам Томсона и Тэта, Пуанкаре, Дарвина и Джинса.

Задача заключается в том, чтобы найти возможные формы относительного равновесия однородной гравитирующей жидкой массы, вращающейся с постоянной угловой скоростью около неподвижной оси, и затем определить устойчивость или неустойчивость такого рода форм.

Примем ось вращения за ось z и возьмем начало в центре масс, который, очевидно, должен лежать на этой оси. Если обозначить через ω угловую скорость вращения, то компоненты ускорения в точке

¹⁾ Stanton, Rep. of the Nat. Phys. Lab. for., 1921, стр. 146.

(x, y, z) будут равны $-\omega^2 x, -\omega^2 y, 0$, и уравнения движения приведутся к виду

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ -\omega^2 y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где Ω обозначает потенциальную энергию на единицу массы. Отсюда следует

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - \Omega + \text{const.} \quad (2)$$

На свободной поверхности мы должны иметь $p = \text{const.}$

Некоторые общие свойства форм равновесия были указаны Пуанкаре и Лихтенштейном.

Прежде всего, если внешнее давление равно нулю¹⁾, то для всякой заданной жидкости существует верхний предел для угловой скорости. Рассматривая произвольную область внутри жидкости, на основании формулы (3) § 42 будем иметь

$$\iint \frac{\partial p}{\partial n} dS = - \iiint \Delta p \, dx \, dy \, dz = 2\rho (2\pi\rho - \omega^2) \iiint dx \, dy \, dz, \quad (3)$$

где $\frac{\partial p}{\partial n}$ обозначает градиент p в направлении *внутренней* нормали, и ρ выражено в „астрономической“ мере²⁾.

Применяя эту формулу к какой-либо малой сферической области, мы увидим, что давление во внутренней точке не может иметь минимума, если $\omega^2 < 2\pi\rho$, и не может иметь максимума, если $\omega^2 > 2\pi\rho$. Если же давление на границе обращается в нуль, то в первом случае оно нигде внутри не может быть отрицательным, а во втором случае нигде не может быть положительным. В промежуточном случае $\omega^2 = 2\pi\rho$ имеем $\Delta p = 0$ во всех точках внутри жидкости и $p = 0$ на границе, а потому повсюду $p = 0$ (§ 40).

Отсюда следует, что в жидкости, которая не может выдерживать растягивающие усилия, существует верхняя граница для угловой скорости, равная $\sqrt{2\pi\rho}$ ³⁾. Если взять плотность равною средней плотности земли, т. е. положить $\rho = \frac{3}{4} \pi g a$, то наибольшее значение для ω , выраженное через угловую скорость ω_0 вращения земли, получится из формулы

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{3}{2} \frac{g}{\omega_0^2 a} = 433.$$

¹⁾ Вскоре будет показано, что это ограничение является излишним.

²⁾ Это определяет, конечно, специальную единицу и для давления.

³⁾ Poincaré, Bull. Astr. (1885); Figures d'Equilibre, Париж (1902), стр. 11. В тексте дано несколько измененное доказательство.

Кратчайший возможный период оказывается поэтому равным 1 ч. 7 мин.

Далее, форма равновесия необходимо должна быть симметричной относительно плоскости, проходящей через центр масс и перпендикулярной к оси вращения¹⁾. Представим себе жидкую массу составленной из колонн, параллельных оси z , с бесконечно малым поперечным сечением. Центры масс этих колонн будут лежать на некоторой поверхности (которая, однако, может состоять из различных отдельных частей). Если бы эта поверхность была неплоской, то на ней нашлась бы точка M , для которой z имеет наибольшее значение; пусть PQ есть отрезок в жидкости, параллельный оси Oz , который обоими концами лежит на граничной поверхности и в точке M делится пополам, и пусть $|z_P| > |z_Q|$. Из теории притяжения прямой линии легко получается, что значение потенциала (потенциальной энергии) на единицу массы, обусловленное воздействием какой-либо элементарной колонны, в точке P не может быть меньше, чем в точке Q , а будет, как правило, больше. А тогда получаем, что для всего потенциала имеет место неравенство $\Omega_P > \Omega_Q$ и вместе с тем на основании уравнения (2) $p_P < p_Q$, что противоречит допущению.

До сих пор предполагалось, что точки P и Q отличны друг от друга. Если же они совпадают, то из подобных соображений найдем, что в случае отсутствия плоскости симметрии для точки M должно было бы иметь место неравенство $\frac{\partial \Omega}{\partial z} > 0$ и вместе с тем $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$, причем точка M теперь уже принадлежала бы свободной поверхности. Но если касательная плоскость в точке M параллельна оси Oz , то в ней должно было бы быть $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, тогда как если M была бы особой точкой свободной поверхности, то все пространственные производные p обращались бы в нуль.

Заметим между прочим, что как следствие предыдущих рассуждений получается, что при отсутствии вращения *каждая* плоскость, проходящая через центр тяжести, должна быть плоскостью симметрии. Мы получаем, таким образом, простое доказательство того предложения, что единственная форма равновесия однородной жидкой массы, находящейся под действием сил собственного притяжения, есть шар²⁾.

Мы заключаем также, что точки средин всех параллельных оси вращения хорд свободной поверхности лежат в плоскости, перпендикулярной к этой оси; эту плоскость можно назвать экваториальной

¹⁾ Lichtenstein, Berl. Ber. (1918), стр. 1120. В тексте приведено несколько упрощенное доказательство.

²⁾ Carleman, Math. Zeitschr. III, 1 (1918). Принадлежащее Ляпунову доказательство того, что шар есть единственная устойчивая форма, приводит Пуанкаре, Figures d'Équilibre, гл. II.

плоскостью. Тогда каждая прямая, параллельная оси, пересекает свободную поверхность не более, чем в двух точках. Далее следует, что составляющая по оси z притяжения в произвольной внутренней или внешней точке, не лежащей в плоскости симметрии, будет направлена к этой плоскости. В самом деле, теория притяжения однородной прямой линии, на которую мы уже ссылались, показывает, что высказанное положение справедливо для каждой из элементарных колонн, на которые мы мысленно разделили всю жидкость.

Из высказанного заключения следует неравенство $\frac{\partial \Omega}{\partial z} > 0$, а тем самым и $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$ для всех точек, лежащих с положительной стороны плоскости симметрии. Далее следует, что $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$ для всех точек свободной поверхности и что $p > 0$ для всех внутренних точек. Первое из этих положений оказывается несовместимым с равенством (3) тогда, когда $\omega^2 > 2\pi\rho$. Таким образом, ограничение $\omega < \sqrt{2\pi\rho}$ имеет место совершенно независимо от каких-либо вопросов о внутренних напряжениях.

Меньший предел для ω был указан Круделем¹⁾. Его доказательство, слегка видоизмененное, состоит в следующем. Согласно теории притяжения оказывается, что функция, значение которой всюду в жидкости есть $p - p_0$ (где p_0 — давление на границе), а вне есть нуль, может рассматриваться как гравитационный потенциал соответственно распределенной (положительной или отрицательной) массы, а именно с поверхностной плотностью

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial p}{\partial n}$$

вдоль границы и с объемной плотностью

$$-\frac{1}{4\pi} \Delta p = \frac{\rho}{2\pi} (2\pi\rho - \omega^2)$$

всюду внутри. Тогда получаем

$$4\pi(p - p_0) = - \iint \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dS}{r} + 2\rho(2\pi\rho - \omega^2) \iiint \frac{dx dy dz}{r}. \quad (1)$$

Но для внутренних точек имеем

$$\iiint \frac{\rho dx dy dz}{r} = -\Omega = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \omega^2(x^2 + y^2) + \text{const.},$$

следовательно,

$$\frac{2\omega}{\rho} p = 4\pi p_0 - \iint \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dS}{r} - \omega^2(2\pi\rho - \omega^2)(x^2 + y^2) + \text{const.} \quad (5)$$

¹⁾ Crudele, Accad. d. Lincei, (5), XIX, 666 (1910).

Теперь рассмотрим касательную плоскость, перпендикулярную к оси вращения, именно ту, которая оставляет область, занятую жидкостью, всю по одну сторону от себя, и пусть P есть точка соприкосновения ¹⁾).

Составим теперь производные по внутренней нормали в точке P от обеих частей уравнения (5). Так как, как мы видели, $\frac{\partial p}{\partial n}$ должна быть положительной во всех точках границы, то из теории притяжения и из только что сделанных предположений следует, что производная по нормали от выражения

$$- \iint \frac{\partial p}{\partial n} \frac{dS}{r}$$

в точке P должна быть меньше, чем $2\pi \frac{\partial p}{\partial n}$, и тогда получаем

$$\frac{2\omega^2}{g} \frac{\partial p}{\partial n} < 2\pi \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (6)$$

или $\omega^2 < \pi g$. Это изменяет наименьший возможный период вращения жидкой массы с плотностью, равной средней плотности земли, до значения 1 час 35 мин.

§ 373. Мы переходим теперь к рассмотрению специальных форм и начнем с того случая, когда внешняя граница представляет собою поверхность эллипсоида. Прежде всего напомним некоторые формулы, относящиеся к притяжению эллипсоида.

Потенциал притяжения однородной массы, ограниченной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

для внутренних точек имеет вид

$$\Omega = \pi \rho abc \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 \right) \frac{d\lambda}{\Delta}, \quad (2) \text{ а)}$$

где

$$\Delta = \{ (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \}^{1/2}. \quad (3)$$

Это может быть написано в виде

$$\Omega = \pi \rho (a_0 x^2 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 z^2 - \chi_0), \quad (4)$$

¹⁾ Крудели, кажется, предполагал границу всюду конвексной. Из приведенного доказательства следует, что, повидимому, в этом нет необходимости. Например, кольцевая форма не исключается.

²⁾ Указания литературы см. на стр. 758. Знак у Ω по сравнению с обычным способом обозначения изменен.

где, как в § 114,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \Delta}, \\ \beta_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) \Delta}, \\ \gamma_0 &= abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) \Delta} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и

$$\chi_0 = abc \int \frac{d\lambda}{\Delta}. \quad (6)$$

Потенциальная же энергия притягивающей массы определяется выражением

$$V = \frac{1}{2} \iiint \Omega \rho \, dx \, dy \, dz, \quad (7)$$

причем интегрирование распространено на весь объем. Подставляя значение Ω из формулы (4), получим

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi^2 \rho^2 abc \left\{ \frac{1}{5} (\alpha_0 a^2 + \beta_0 b^2 + \gamma_0 c^2) - \chi_0 \right\} = \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \rho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{a^2}{a^2 + \lambda} + \frac{b^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2}{c^2 + \lambda} \right) - 1 \right\} \frac{d\lambda}{\Delta} = \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \rho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2}{5} \lambda d \left(\frac{1}{\Delta} \right) - \frac{2}{5} \frac{d\lambda}{\Delta} \right\} = \\ &= -\frac{8}{15} \pi^2 \rho^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\Delta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Это выражение отрицательно, так как нулевая точка отсчета соответствует состоянию бесконечного рассеяния массы. Если в качестве нулевого значения потенциальной энергии мы возьмем потенциал массы, имеющей форму шара с радиусом $R = (abc)^{1/3}$, то должны будем прибавить член

$$\frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 R^5. \quad (9)$$

Для эллипсоида вращения интегралы упрощаются. Если эллипсоид сплюснутый, то, применяя обозначения § 107, мы можем положить

$$a = b = \frac{(\zeta^2 + 1)^{1/2}}{\zeta} c \quad (10)$$

и получим ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 = \beta_0 &= (\zeta^2 + 1) \zeta \operatorname{arccctg} \zeta - \zeta^2, \\ \gamma_0 &= 2(\zeta^2 + 1)(1 - \zeta \operatorname{arccctg} \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$V = \frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 R^5 \left\{ 1 - \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2} \right)^{1/3} \zeta \operatorname{arccctg} \zeta \right\} \quad (12)$$

в предположении, что нулевое значение V отвечает сферической форме. Если обозначить через e эксцентриситет меридиана, то будем иметь

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{\zeta^2 + 1}, \quad (13)$$

и формулы могут быть тогда переписаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 = \beta_0 &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2}, \\ \gamma_0 &= \frac{2}{e^2} \left\{ 1 - \sqrt{1-e^2} \frac{\arcsin e}{e^2} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$V = \frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 R^5 \left\{ 1 - (1-e^2)^{1/6} \frac{\arcsin e}{e} \right\}. \quad (15)$$

В случае же *вытянутого* эллипсоида положим (§ 103)

$$a = b = \frac{(\zeta^2 - 1)^{1/2}}{\zeta} c; \quad (16)$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 = \beta_0 &= \zeta^2 - (\zeta^2 - 1) \zeta \operatorname{arccctgh} \zeta, \\ \gamma_0 &= 2(\zeta^2 - 1)(\zeta \operatorname{arccctgh} \zeta - 1), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$V = \frac{16}{15} \pi^2 \rho^2 R^5 \left\{ 1 - \left(\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} \right)^{1/3} \zeta \operatorname{arccctgh} \zeta \right\}. \quad (18)$$

Отметим также случай бесконечно длинного эллиптического цилиндра. Если в формулах (5) положим $c = \infty$, то получим

$$\alpha_0 = \frac{2b}{a+b}, \quad \beta_0 = \frac{2a}{a+b}, \quad \gamma_0 = 0. \quad (19)$$

Энергия, отнесенная к единице длины цилиндра, будет равна

$$V_1 = \frac{4}{15} \pi^2 \rho^2 a^2 b^2 \log \frac{(a+b)^2}{4ab}. \quad (20)$$

¹⁾ Проще будет положить $c^2 + \lambda = (a^2 - c^2) u^2$. Тогда результат, предложенный Томсоном и Тэтом (§ 771) и другими авторами, выразится через величину l , обратную величине ζ .

Эллипсоиды Маклорена.

§ 374. Предположим теперь, что эллипсоид, находясь в относительном равновесии, вращается около оси z с угловой скоростью ω . Так как

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - \Omega + \text{const.}, \quad (1)$$

то поверхности равного давления определяются уравнением

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right)x^2 + \left(\beta_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right)y^2 + \gamma_0 z^2 = \text{const.} \quad (2)$$

Для того чтобы одна из них совпадала с внешней поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3)$$

необходимо, чтобы

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right)a^2 = \left(\beta_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right)b^2 = \gamma_0 c^2. \quad (4)$$

В случае эллипсоида вращения ($a = b$) эти условия приводятся к одному, а именно, к условию

$$\left(\alpha_0 - \frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right)a^2 = \gamma_0 c^2. \quad (5)$$

Так как $\frac{a^2}{a^2 + \lambda}$ больше или меньше, чем $\frac{c^2}{c^2 + \lambda}$, смотря по тому, больше или меньше a , чем c , то из данных в § 373 выражений (5) для α_0 и γ_0 следует, что условие (5) при подходящем выборе ω может быть выполнено для каждого заданного сжатого эллипсоида, но не может быть выполнено для вытянутого эллипсоида. Этот важный результат принадлежит Маклорену¹⁾.

Подставляя выражения для α_0 , γ_0 из формул (11) § 373, приведем условие (5) к виду

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = (3\zeta^2 + 1)\zeta \operatorname{arccotg} \zeta - 3\zeta^2 \quad (6)$$

или, в обозначениях § 107, к виду

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \zeta q_2(\zeta). \quad (7)$$

¹⁾ Mac Laurin, см. выше, стр. 386.

Заметим, что значение ω , соответствующее произвольной заданной форме эллипсоида, зависит от плотности ρ , а не от действительных размеров эллипсоида. Легко усмотреть, что этот результат согласуется с теорией „размерности“.

Если обозначим через M общую массу и через H главный момент количеств движения относительно оси вращения, то будем иметь

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho a^2 c, \quad H = \frac{2}{5} M a^2 \omega; \quad (8)$$

отсюда следует

$$\frac{H^2}{M^2 R} = \frac{6}{25} \left(\frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2} \right)^{2/3} \{ (3\zeta^2 + 1) \zeta \operatorname{arccg} \zeta - 3\zeta^2 \}; \quad (9)$$

Формула (6) в различных видах исследовалась Симпсоном, Даламбером и (более исчерпывающим образом) Лапласом¹⁾. Легко можно показать, что правая часть формулы (6) обращается в нуль при $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$; для остальных же значений ζ она конечна и положительна; следовательно, для некоторого промежуточного значения ζ правая часть принимает наибольшее значение. Поэтому при заданной плотности ρ существует верхний предел для угловых скоростей, при которых эллипсоид вращения будет возможной формой относительного равновесия. Для того чтобы показать, что правые части формул (6) и (7) имеют только один максимум, а следовательно, не имеют минимума, потребовалось бы более подробное исследование.

Лаплас с той же точки зрения исследовал формулу для главного момента количеств движения. Оказывается, что правая часть формулы (9) непрерывно возрастает от 0 до ∞ , когда ζ уменьшается от ∞ до 0. Поэтому при заданном объеме определенной жидкости существует одна и только одна форма эллипсоида Маклорена, обладающая заданным наперед главным моментом количеств движения.

Эти вопросы можно также исследовать путем непосредственного вычисления функций, стоящих в правых частях формул (6) и (9). Следующая таблица, содержащая числовые данные для ряда эллипсоидов Маклорена, взята из книги Томсона и Тэта²⁾. Единица момента количеств движения в последнем столбце есть $M^{3/2} R^{1/2}$, причем конечно подразумеваются „астрономические“ единицы.

¹⁾ Laplace, *Mécanique Céleste*, кн. 3, гл. III. Дальнейшие указания литературы находятся у Тодгентера, *History of the Theories of Attraction...*, Лондон, 1873, гл. X, XVI.

²⁾ Thomson and Tait, *Natural Philosophy*, § 772.

e	$\frac{a}{R}$	$\frac{c}{R}$	$\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$	Момент количества движения
0	1,0000	1,0000	0	0
0,1	1,0016	0,9967	0,0027	0,0255
0,2	1,0068	0,9865	0,0107	0,0514
0,3	1,0159	0,9691	0,0243	0,0787
0,4	1,0295	0,9435	0,0436	0,1085
0,5	1,0491	0,9086	0,0690	0,1417
0,6	1,0772	0,8618	0,1007	0,1804
0,7	1,1188	0,7990	0,1387	0,2283
0,8	1,1856	0,7114	0,1816	0,2934
0,827	1,1973	0,6976	0,1868	0,3035
0,9	1,3189	0,5749	0,2203	0,4000
0,91	1,341	0,5560	0,2225	0,4156
0,92	1,367	0,5355	0,2241	0,4330
0,93	1,396	0,5131	0,2247	0,4525
0,94	1,431	0,4883	0,2239	0,4748
0,95	1,474	0,4603	0,2213	0,5008
0,96	1,529	0,4280	0,2160	0,5319
0,97	1,602	0,3895	0,2063	0,5692
0,98	1,713	0,3409	0,1890	0,6249
0,99	1,921	0,2710	0,1551	0,7121
1,00	∞	0	0	∞

Максимум величины $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ есть 0,2247 и соответствует значениям $e = 0,9299$, $\frac{a}{c} = 2,7198$. Для каждого меньшего значения $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ существует два возможных эллипсоида вращения: эксцентриситет одного из них меньше, а другого больше, чем 0,9299.

В случае однородной жидкой массы, плотность которой равна средней плотности земли, имеем

$$\frac{4}{3} \pi \rho R = 980, \quad R = 6,37 \cdot 10^8,$$

если за единицы длины и времени взяты сантиметр и секунда. Отсюда получается, что самое быстрое вращение, возможное в случае эллипсоида вращения, имеет период 2 ч. 25 мин.

Если значение ζ велико, то правую часть формулы (7) приближенно можно считать равной $\frac{4}{15} \zeta^{-2}$. Поэтому в случае сжатого эллипсоида вращения, бесконечно мало отличающегося от шара, сжатие будет равно

$$\varepsilon = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{2} \zeta^{-2} = \frac{15}{16} \frac{\omega^2}{\pi\rho}.$$

Обозначая через g силу притяжения на поверхности шара радиуса a с постоянной плотностью, будем иметь

$$g = \frac{4}{3} \pi \rho a,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \frac{\omega^2 a}{g}.$$

Если положить $\frac{\omega^2 a}{g} = \frac{1}{289}$, то окажется, что однородная жидкая масса, имеющая такую же величину и плотность, как Земля, должна иметь сжатие, равное $\frac{1}{231}$, чтобы вращаться с тем же периодом, как Земля.

Эллипсоиды Якоби.

§ 375. Чтобы установить, будет ли эллипсоид с тремя *неравными* осями возможной формой относительного равновесия, обратимся снова к условиям (4) § 374. Эти условия равносильны уравнениям

$$(a_0 - \beta_0) a^2 b^2 + \gamma_0 c^2 (a^2 - b^2) = 0 \quad (1)$$

и

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{\alpha_0 a^2 - \beta_0 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (2)$$

Подставляя значения α_0 , β_0 , γ_0 из § 373, приведем условие (1) к виду

$$(a^2 - b^2) \int_0^{\infty} \left\{ \frac{a^2 b^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} - \frac{c^2}{c^2 + \lambda} \right\} \frac{d\lambda}{\lambda} = 0. \quad (3)$$

Если положить первый множитель равным нулю, то придем к случаю эллипсоидов Маклорена, рассмотренному в предыдущем параграфе. Равенство нулю второго множителя дает условие

$$\int_0^{\infty} \left\{ a^2 b^2 - (a^2 + b^2 + \lambda) c^2 \right\} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2} = 0, \quad (4)$$

которое можно рассматривать как уравнение для определения c через a и b . Если $c^2 = 0$, то все элементы интеграла положительны, а если

$$c^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

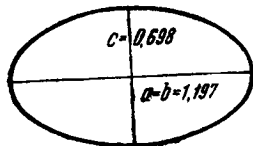
то все элементы отрицательны. Отсюда следует, что существует значение c , меньшее, чем наименьшая из полуосей a и b , для которого рассматриваемый интеграл будет исчезать.

Соответствующее значение ω определяется из формулы (2); это уравнение принимает теперь вид

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = abc \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\Delta}, \quad (5)$$

так что значение ω будет действительным. Следует заметить, что отношение $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$, так же как и выше, зависит только от формы, но не от абсолютных размеров эллипсоида ¹⁾.

Уравнения (4) и (5) были тщательно исследованы С. О. Мейером ²⁾, который показал, что при заданных a и b существует только одно значение c , удовлетворяющее уравнению (4), и далее, что при $a = b = 1,7161c$ величина $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ достигает наибольшего значения (именно $0,1871$)³⁾. Эллипсоид Якоби совпадает тогда с одной из форм эллипсоида Маклорена. Эта предельная форма, изображенная на фиг. 87, получится, если во втором множителе левой части равенства (3) положить



Фиг. 87.

$$a = b, \quad c^2 + \lambda = (a^2 - c^2)u^2, \quad c^2 = (a^2 - c^2)\zeta^2.$$

Таким образом, находим

$$\int_\zeta^\infty \left\{ \left(\frac{1 + \zeta^2}{1 + u^2} \right)^2 - \frac{\zeta^2}{u^2} \right\} \frac{du}{1 + u^2} = 0; \quad (6)$$

отсюда следует

$$\operatorname{arccctg} \zeta = \frac{13\zeta + 3\zeta^3}{3 + 14\zeta^2 + 3\zeta^4}. \quad (7) \quad ^4)$$

Это уравнение имеет только один конечный корень, именно $\zeta = 0,7171$; в этом случае для эксцентриситета меридиана получаем значение $e = 0,8127$.

Так как в общем случае два отношения $a : b : c$ подчинены условию (4), то фактически имеется только один переменный параметр, и эллипсоиды Якоби образуют так называемую „линейную серию“.

¹⁾ Возможность эллипсоидальной формы с тремя неравными осями в первый раз высказал Якоби в работе „Über die Figur des Gleichgewichts“, Pogg. Ann., XXXIII, 229 (1834) (Werke, II, 17); см. также Liouville, Sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation, Journ. de l'École Polytechn., XIV, 290 (1834).

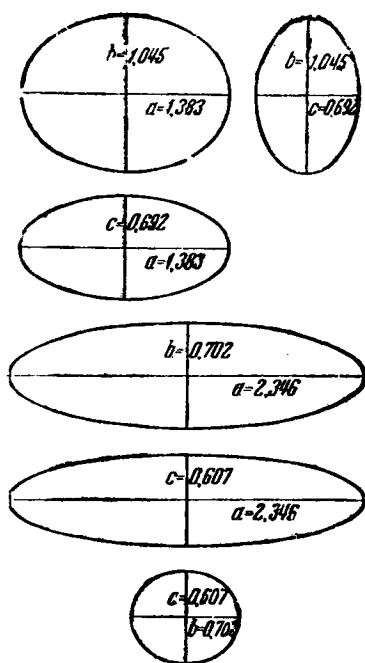
²⁾ С. О. Мейер, De aequilibrii formis ellipsoidicis, Crelle, XXIV (1842).

³⁾ Согласно Томсону и Тэту наибольшее значение было бы $0,1868$. См. таблицу предыдущего параграфа.

⁴⁾ Thomson a. Tait, § 778.

Последовательность фигур в этой серии иллюстрируется следующей таблицей, вычисленной Дарвином ¹⁾.

О с и			$\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$	Момент количества движения
$\frac{a}{R}$	$\frac{b}{R}$	$\frac{c}{R}$		
1,197	1,197	0,698	0,187	0,304
1,216	1,179	0,693	0,187	0,304
1,279	1,123	0,696	0,186	0,306
1,383	1,045	0,692	0,181	0,313
1,601	0,924	0,677	0,166	0,341
1,899	0,811	0,649	0,141	0,392
2,346	0,702	0,607	0,107	0,481
3,136	0,586	0,545	0,067	0,644
5,04	0,45	0,44	0,026	1,016
∞	0	0	0	∞



Фиг. 88.

Когда значения $\frac{\omega^2}{2\pi\rho}$ уменьшаются, начиная с верхней границы 0,1871, тогда отношение одной из экваториальных осей эллипсоида к полярной оси возрастает, а отношение другой — убывает; предельная форма представляет собою бесконечно длинный круговой цилиндр, вращающийся около оси, перпендикулярной к образующим ($a = \infty$, $b = c$). Фиг. 88 показывает две промежуточные формы; за единицу длины при этом принят радиус R шара, объем которого равен объему эллипсоида.

Следует заметить, что бесконечно длинный эллиптический цилиндр может находиться в относительном равновесии при вращении вокруг своей продольной оси. При помощи формул (19) § 373 можно легко показать, что в этом случае угловая скорость определится из формулы

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{2ab}{(a+b)^2}. \quad (8)^2$$

¹⁾ Darwin, On Jacobi's Figure of Equilibrium for a Rotating Mass of Fluid, Proc. Roy. Soc., XLI, 319 (1886) (Papers, III, 119).

²⁾ Matthiessen, Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten, Schriften d. Univ. zu Kiel, VI (1859). Эта работа содержит очень полный перечень ранее появившихся исследований в этой области.

Другие специальные формы.

§ 376. Проблема относительного равновесия, в которой эллипсоиды Маклорена и Якоби представляют лишь частные случаи, была предметом большого числа интересных исследований, о которых здесь следует кратко напомнить.

Случай кольца в первый раз был исследован Лапласом ¹⁾ в связи с теорией колец Сатурна.

Предположим, что кольцо есть тело вращения около оси z , и возьмем начало координат в точке пересечения этой оси с экваториальной плоскостью симметрии, относительно которой мы наверное знаем, что она должна существовать (§ 372). Далее, будем предполагать, что поперечное сечение представляет собою эллипс, полуоси которого, параллельные Ox и Oz , соответственно суть a и c . Обозначим через C центр этого поперечного сечения и положим $OC = D$; мы будем предполагать, что оба отношения $\frac{a}{D}$ и $\frac{c}{D}$ малы.

При этих условиях можно считать, что в первом приближении составляющие притяжения в произвольной точке кольца такие же, как в случае бесконечно большого радиуса D , так что в согласии с формулами (19) § 373 мы можем положить

$$\Omega = \pi \rho (a_0 x^2 + \gamma_0 z^2) + \text{const.}, \quad (1)$$

где

$$a_0 = \frac{2c}{a+c}, \quad \gamma_0 = \frac{2a}{a+c}, \quad (2)$$

и начало абсцисс x теперь перенесено в точку C . Уравнение давления для точек поперечного сечения будет в этом случае иметь вид

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (D+x)^2 - \Omega + \frac{S}{\sqrt{(D+x)^2 + z^2}} + \text{const.}, \quad (3)$$

где S обозначает массу притягивающего своим центром ядра в точке O . Это выражение можно разложить в ряд в виде

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 (D^2 + 2Dx + x^2) - \pi \rho (a_0 x^2 + \gamma_0 z^2) + \\ + \frac{S}{D} \left(1 - \frac{x}{D} + \frac{2x^2 - z^2}{2D^2} - \dots \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если p всюду по поперечному сечению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

¹⁾ Laplace, Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne, Mém. de l'Acad. des Sciences, 1789 (1787) (Mécanique Céleste, т. 3, гл. VI).

остается приблизительно постоянным, то члены с x необходимо приравнять нулю, а коэффициенты при x^2 и z^2 должны будут относиться, как $c^2 : a^2$. Отсюда получаем

$$\omega^2 D^3 = S \quad (6)$$

и

$$a^2 \left(\alpha_0 - \frac{3\omega^2}{2\pi\rho} \right) = c^2 \left(\gamma_0 + \frac{\omega^2}{2\pi\rho} \right). \quad (7)$$

Первое из этих уравнений показывает, что период вращения кольца должен быть равным периоду спутника, находящегося на таком же расстоянии; второе уравнение может быть написано в виде

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{2ac(a-c)}{(3a^2+c^2)(a+c)}, \quad (8)$$

откуда следует, что экваториальный диаметр должен быть наибольшим.

Выражение в правой части формулы (8) имеет максимум 0,1086, соответствующий значению $\frac{a}{c} = 2,594$. Тогда для жидкого кольца, находящегося на заданном расстоянии D от центрального ядра, существует нижняя граница плотности.

Лаплас отмечает, что кольцо такого рода, какое мы рассматриваем здесь, должно было бы быть неустойчивым, даже если бы оно было твердым, а тем более должно быть неустойчивым, когда оно жидкое. В настоящее время вообще принимают, что кольца Сатурна состоят из метеоров.

Если центрального ядра нет или если его масса относительно мала, то притяжение кольца в точках самого кольца можно вычислить с большою степенью точности. В этом случае легко получаем, что поперечное сечение приблизительно должно быть круговым, и угловая скорость должна быть значительно меньше, чем в предыдущем случае. Для $S=0$ находим приближенно

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{a^2}{2D^2} \left(\ln \frac{8D}{a} - \frac{5}{4} \right), \quad (9) ^1$$

если $\frac{a}{D}$ мало.

В справедливости формулы (9) можно убедиться следующим образом. Если возьмем начало координат в центре кольца и введем цилиндрические координаты, то потенциал во внешних точках будет удовлетворять уравнению вида (1) § 100, а именно

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \tilde{\omega}^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}} = 0. \quad (10)$$

Если в плоскости поперечного сечения ввести полярные координаты и положить

$$z = r \sin \theta, \quad \tilde{\omega} = D + r \cos \theta, \quad (11)$$

¹⁾ Несколько другой результат получил Маттиссен, см. выше. Формула (9) принадлежит Софье Ковалевской, *Astr. Nachr.*, CXI (1885). Poincaré, см. ниже; Dyson, см. выше, стр. 197. Ср. также Basset, *Amer. Journ. Math.*, XI (1888).

то уравнение (10) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{1}{D+r \cos \theta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \sin \theta \right) = 0. \quad (12)$$

Чтобы получить решение, которое должно иметь место для значений r , малых по сравнению с D , примем в качестве первого приближения $\Omega = \Omega_0$, где Ω_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

Таким образом, мы получаем

$$\Omega_0 = A + B \ln r. \quad (14)$$

В качестве второго приближения возьмем

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \cos \theta. \quad (15)$$

Подставляя, находим

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - \frac{\Omega_1}{r^2} = -\frac{1}{D} \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} = -\frac{B}{Dr}; \quad (16)$$

отсюда получаем

$$\Omega_1 = Cr + \frac{C'}{r} - \frac{B}{2D} r \ln r. \quad (17)$$

На расстояниях r , малых по сравнению с D , но больших по сравнению с радиусом поперечного сечения, полученный таким способом результат должен быть близок к потенциалу материальной окружности радиуса D и линейной плотности $\pi q a^2$. Этот потенциал определяется формулой

$$\Omega = -\pi q a^2 D \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 \cos^2 \frac{1}{2} x + r_2^2 \sin^2 \frac{1}{2} x}} = -\frac{4\pi q a^2 D}{r_2} F_1(k), \quad (18)$$

где r_1 и r_2 , как в § 161, обозначают наименьшее и наибольшее расстояния рассматриваемой точки от окружности, а модуль k эллиптического интеграла определяется из равенства

$$k^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (19)$$

Так как это [выражение приблизительно равно единице, то будем иметь ¹⁾

$$F_1(k) = \ln \frac{4r_2}{r_1} + \frac{1}{4} \frac{r_1^2}{r_2^2} \left(\pi \frac{4r_2}{r_1} - 1 \right) + \dots; \quad (20)$$

первый член этого ряда достаточен для наших целей.

В соответствии с применяемыми нами обозначениями положим приближенно

$$r_1 = r, \quad r_2 = \sqrt{4D^2 + 4rD \cos \theta + r^2} = 2D \left(1 + \frac{r}{2D} \cos \theta \right). \quad (21)$$

¹⁾ Cayley, Elliptic Functions, стр. 54.

Тогда получим

$$\Omega = -2\pi\varrho a^2 \left(\ln \frac{8D}{r} - \frac{r \cos \theta}{2D} \ln \frac{8D}{r} + \frac{r \cos \theta}{2D} \right). \quad (22)$$

Результат, выраженный формулами (15), (14) и (17), будет все больше приближаться к значению (22), по мере того как r возрастает, но остается еще малым по сравнению с D в предположении, что

$$B = 2\pi\varrho a^2 \quad C = \frac{\pi\varrho a^2}{D} (\ln 8D - 1). \quad (23)$$

Мы возьмем поэтому в качестве значения внешнего потенциала жидкого кольца для точек, лежащих вблизи поверхности, выражение

$$\Omega = -2\pi\varrho a^2 \left\{ \ln \frac{8D}{r} - \left(\ln \frac{8D}{r} - 1 \right) \frac{r \cos \theta}{2D} \right\} + \frac{C' \cos \theta}{r}. \quad (24)$$

Чтобы найти потенциал во внутренней точке, мы должны заменить правую часть уравнения (12) через $4\pi\varrho$. При помощи того же самого приближенного способа, как и раньше, находим, принимая во внимание условие конечности для $r=0$,

$$\Omega = \text{const.} + \pi\varrho r^2 + C'' r \cos \theta - \frac{\pi\varrho r^3}{4D} \cos \theta. \quad (25)$$

Значения Ω и $\frac{\partial \Omega}{\partial r}$, получаемые из формул (24) и (25), должны быть непрерывными при $r=a$. Это условие дает

$$C'' = \frac{\pi\varrho a^2}{D} \left(\ln \frac{8D}{a} - 1 \right), \quad C' = -\frac{\pi\varrho a^4}{4D}. \quad (26)$$

Условие для свободной поверхности требует, чтобы выражение

$$\frac{1}{2} \omega^2 (D + r \cos \theta)^2 - \Omega \quad (27)$$

имело постоянное значение для $r=a$. Пренебрегая квадратом величины $\frac{r}{D}$, получаем

$$\omega^2 D = C'' - \frac{\pi\varrho a^2}{4D}. \quad (28)$$

Если подставить сюда значение C'' из формулы (26), то придем к формуле (9).

Дейсон показал, что такого рода кольцо должно быть неустойчивым только по отношению к возмущениям, при которых площадь поперечного сечения изменяется по длине. Кольцо при этом стремится распасться на отдельные части.

Дарвин очень подробно исследовал тот случай¹⁾, когда две отдельные жидкие массы, находясь в относительном равновесии, вращаются около их общего центра тяжести как две составные части одной двойной звезды.

Если расстояние между обеими массами велико по сравнению с их размерами, то ряд, расположенный по сферическим функциям, через

¹⁾ Darwin, On Figures of Equilibrium of Rotating Masses of Fluid, Phil. Trans. A, CLXXVIII, 379 (1887) (Papers, III, 135).

который выражается решение, сходится очень быстро; во всех же остальных случаях приближенный способ оказывается довольно уютным¹⁾.

Особенно интересный случай, когда одна масса значительно меньше другой, впервые, повидимому, исследовал Рохе в 1847 г.²⁾.

Общая задача относительного равновесия.

§ 377. Вопрос о возможных фигурах относительного равновесия вращающейся однородной жидкой массы с более общей точки зрения был рассмотрен Пуанкаре в его знаменитой работе³⁾.

Рассмотрим сначала обыкновенную динамическую систему с n степенями свободы, строение которой зависит от переменного параметра λ , так что потенциальная энергия V есть функция от n обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n и от λ . Конфигурации равновесия, возможные при заданном значении λ , определяются n уравнениями вида

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = 0; \quad (1)$$

если мы будем изменять λ , то получим одну или несколько „линейных серий“ конфигураций равновесия. Каждая из таких серий может быть представлена при помощи кривой в пространстве n измерений, в котором q_1, q_2, \dots, q_n обозначают декартовы координаты.

Если мы рассмотрим малые отклонения от конфигурации равновесия, то будем иметь

$$V = c_{11} \delta q_1^2 + c_{22} \delta q_2^2 + \dots + 2c_{12} \delta q_1 \delta q_2 + \dots, \quad (2)$$

где $c_{11}, c_{22}, c_{12}, \dots$ суть „коэффициенты устойчивости“ (§ 168), определяемые соотношениями

$$c_{rr} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r^2}, \quad c_{rs} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s}. \quad (3)$$

При помощи линейного преобразования вариаций $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ выражение (2) можно бесконечным числом способов привести к сумме квадратов: но при любом способе приведения число положительных и число отрицательных коэффициентов по теореме Сильвестера остается неизменным. Коэффициенты в преобразованном выражении мы будем

¹⁾ Подробное изложение задач §§ 374—376 находится в курсе Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*, Париж, 1889—1896, II.

²⁾ См. Darwin, *On the Figure and Stability of a Liquid Satellite*, Phil. Trans. A, CCVI, 161 (1906) (Papers, III, 436). Относительно приложения к этой задаче метода Пуанкаре отсылаем к работе Schwarzschild, *Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts...*, Ann. d. Münch. Sternwarte, III, 233 (1897) и Jeans, *Problems of Cosmogony...*, Кембридж, 1919.

³⁾ Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, Acta Math., VII, 259 (1885). См. также его *Figures d'équilibre*. Относительно обзора более ранних исследований и некоторых указаний, встречающихся уже у Ляпунова, см. Lichtenstein, *Math. Zeitschr.*, I, 228 (1918).

называть главными коэффициентами устойчивости. Для того чтобы конфигурация была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все эти коэффициенты были положительными.

При изменении λ различные линейные серии остаются отличными друг от друга, пока дискриминант Δ квадратичной формы (2) не исчезает, т. е. пока не исчезает ни один из главных коэффициентов устойчивости. Если же в то время, когда пробегается некоторая линейная серия, дискриминант Δ при некотором частном значении λ исчезает и меняет знак, то соответствующая конфигурация оказывается „формой бифуркации“, т. е. эта конфигурация представляет точку пересечения рассматриваемой линейной серии с другой. Может даже случиться, что при некотором значении λ две линейные серии совпадают, а после этого становятся мнимыми. Если рассматриваемая конфигурация не принадлежит ни к какой другой линейной серии, то мы имеем так называемую „предельную форму“ равновесия, и можно показать, что Δ в обеих сериях вблизи от точки соединения имеет различные знаки. Особенно важным оказывается тот случай, когда две серии соединяются и после этого делаются мнимыми, в то время как третья серия непрерывно переходит через эту общую точку.

Высказанные положения можно пояснить на случае системы с одной степенью свободы. Положения равновесия определяются уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \quad (4)$$

из которого можно определить одно или несколько значений q , как функции от λ . Дифференцируя уравнение (4) по λ , получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \frac{dq}{d\lambda} + \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \lambda} = 0. \quad (5)$$

Это уравнение дает для каждой линейной серии одно единственное значение $\frac{dq}{d\lambda}$ и определяет, таким образом, последовательность конфигураций равновесия, за исключением того случая, когда $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$. Различные серии оказываются, таким образом, разделенными, пока коэффициент устойчивости не исчезает; если же $\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$, то $\frac{dq}{d\lambda}$ оказывается бесконечно большим или неопределенным, смотря по тому, отлична от нуля или нет производная $\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \lambda}$. В первом случае обе серии вообще совпадают.

Положим

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \varphi(\lambda, q) \quad (6)$$

и рассмотрим поверхность

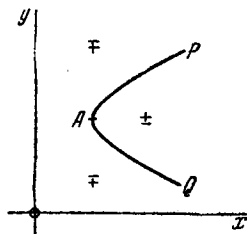
$$z = \varphi(x, y), \quad (7)$$

где x, y, z — обыкновенные декартовы координаты. Кривая $\varphi(x, y)$, отделяющая те части плоскости xy , для которых z положительно, от тех частей, для которых z отрицательно, представляет различные линейные серии форм равновесия. Далее, та часть кривой, для которой градиент $\frac{\partial z}{\partial y}$ положителен,

соответствует устойчивым конфигурациям, а та часть, для которой $\frac{\partial z}{\partial y}$ отрицательно, неустойчивым конфигурациям.

Критические точки ($\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = 0$) соответствуют условию $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; касательная к кривой в этом случае параллельна оси y , в противном случае рассматриваемая точка есть особая точка кривой.

В первом случае, если никакая другая ветвь кривой не проходит через точку касания, мы будем иметь „предельную форму“; без дальнейших рассуждений ясно, что в этой точке имеет место переход от устойчивости к неустойчивости. Этот случай представляет фиг. 89, на которой две серии PA и QA соединяются в предельную форму A . Если к значениям z в соответствующих областях относятся верхние знаки на фиг. 89, то PA соответствует неустойчивым положениям, а QA — устойчивым положениям. Если взять нижние знаки, то результаты получатся обратные.

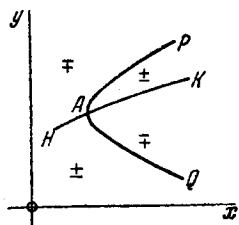


Фиг. 89.

Если же $\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial \lambda} = 0$ или $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, то мы имеем особую точку. Случай, когда две серии (PA и QA) соединятся и становятся мнимыми, в то время как третья серия (HA) проходит через общую точку и остается действительной, изображен на фиг. 90. В последней серии имеет место переход от устойчивости к неустойчивости или наоборот, тогда как две другие серии вблизи от точки A будут обе устойчивыми или обе неустойчивыми¹⁾.

Если мы имеем n степеней свободы, то уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0. \quad (8)$$



Фиг. 90.

Мы можем воспользоваться $n-1$ уравнениями, начиная со второго, чтобы выразить q_2, \dots, q_n через q_1 и λ . Обозначим результат подстановки этих значений в общее выражение для V через $\psi(q_1, \lambda)$. Тогда на основании уравнений (8) будем иметь

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_n} \frac{\partial q_n}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad (9)$$

¹⁾ В качестве простого примера рассмотрим случай матеральной точки, которая может двигаться внутри гладкой изогнутой трубочки (с точками перегиба), лежащей в вертикальной плоскости; положение трубочки в вертикальной плоскости может изменяться в результате вращения вокруг какой-либо оси, перпендикулярной к этой плоскости. Другие примеры доставляют исследования положений равновесия плавающего тела в их зависимости от плотности и исследования, касающиеся устойчивости этих положений равновесия. Случай бруска с квадратным сечением был исследован автором в Статике, Кембридж, 1912, стр. 221, 234.

Случай простого пересечения двух серий, когда обе серии по обе стороны от точки пересечения действительны, можно исследовать подобным же способом.

так что остающееся условие равновесия может быть написано в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0. \quad (10)$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1^2} \frac{\partial q_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1 \partial \lambda} = 0, \quad (11)$$

которое показывает, что последовательность конфигураций равновесия определяется однозначно, за исключением случая $\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1^2} = 0$. Дальнейший ход доказательства протекает так же, как и раньше, только вместо V нужно подставить ψ . Легко можно показать, что условие $\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_1^2} = 0$ аналитически равнозначно условию $\Delta = 0^1$.

§ 378. Покажем сейчас связь этих рассуждений с теорией относительного равновесия вращающейся системы.

В случае относительного равновесия по отношению к системе осей, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной оси, удобнее всего взять условия равновесия в виде

$$\frac{\partial}{\partial q_r} (V - T_0) = 0, \quad (1)$$

где V — потенциальная и T_0 — кинетическая энергия системы, когда эта система в заданной конфигурации (q_1, q_2, \dots, q_n) вращается как твердое тело; ср. § 205. Если мы будем изменять ω , то получим различные линейные серии конфигураций равновесия. Если система, кроме того, подвержена действию диссипативных сил, оказывающих влияние на *относительные* движения, то условие для вековой устойчивости заключается в том, что разность $V - T_0$ должна обращаться в минимум.

Напротив, когда случай, если система свободна, подходит под общую теорию гиростатических систем, тогда для условий равновесия оказывается более удобной форма

$$\frac{\partial}{\partial q_r} (V + K) = 0, \quad (2)$$

где K представляет кинетическую энергию системы в предположении, что она вращается как твердое тело в конфигурации (q_1, q_2, \dots, q_n) , и компоненты обобщенных импульсов, соответствующие игнорируемым координатам, остаются постоянными (§ 254). Условие для вековой устойчивости заключается в этом случае в том, что $V + K$ должно иметь минимальное значение. В нашем случае единственная игнорируемая координата, которую мы должны иметь в виду, есть угол, определяющий положение плоскости отсчета, проходящей

¹⁾ Доказательство с небольшими изменениями взято из руководства Пуанкаре.