

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт астрономии Российской академии наук

На правах рукописи

Гладышева Юлия Геннадьевна

**Аэрономия водородно-гелиевых верхних атмосфер
горячих экзопланет-гигантов**

1.3.1. Физика космоса, астрономия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Жилкин Андрей Георгиевич

Москва — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Аэрономическая модель верхних атмосфер	
экзопланет-гигантов	9
1.1 Верхние атмосферы экзопланет-гигантов	9
1.2 Базовая модель верхней атмосферы	12
1.2.1 Математическая модель	12
1.2.2 Химические процессы	15
1.2.3 Нагрев и охлаждение	23
1.3 Учет дополнительных эффектов	26
1.3.1 Приливная сила	26
1.3.2 Диффузия	28
1.3.3 Теплопроводность	30
1.4 Численный метод	33
1.5 Заключение к Главе 1	36
1.6 Положения, выносимые на защиту по результатам первой главы .	36
Глава 2. Структура верхней атмосферы экзопланет-гигантов,	
вращающихся вокруг солнцеподобных звезд	38
2.1 Структура верхней атмосферы горячего юпитера	38
2.2 Структура верхней атмосферы теплого нептона	43
2.3 Влияние химического состава на структуру атмосферы горячего юпитера	47
2.3.1 Реакции фотоионизации	47
2.3.2 Расчеты параметров атмосферы	49
2.4 Обсуждение результатов расчетов	51
2.4.1 Эффективные показатели политропы	51
2.4.2 Формирование облачного слоя	54
2.4.3 Анализ тепловой неустойчивости в верхних атмосферах горячих юпитеров	56
2.5 Заключение к Главе 2	60

2.6	Положения, выносимые на защиту по результатам второй главы .	61
Глава 3. Влияние приливной силы и потока излучения звезды		
	на структуру верхней атмосферы горячего юпитера . .	62
3.1	Влияние приливной силы	62
3.2	Влияние потока жесткого излучения звезды	64
3.3	Влияние вспышечной активности звезды	72
3.3.1	Одиночная вспышка	74
3.3.2	Повторная вспышка	82
3.4	Заключение к Главе 3	85
3.5	Положения, выносимые на защиту по результатам третьей главы	86
Заключение		87
Список литературы		89
Список рисунков		98
Список таблиц		103
Приложение А. Гидростатическая модель водородно-гелиевой		
	атмосферы горячего юпитера	104
Приложение Б. Образование энергетических нейтральных		
	атомов в оболочках горячих юпитеров	110
Б.1	Реакция перезарядки водорода	111
Б.2	Реакция перезарядки для произвольного числа компонентов . . .	113
Б.3	Численное моделирование	116
Приложение В. Описание численных методов		
В.1	Метод конечного объема для сферических координат	123
В.2	Схема Роу-Эйнфельдта-Ошера	127
В.3	Теплопроводность	138
В.4	Диффузия	142

Введение

Исследование физики и химии верхних атмосфер экзопланет представляет собой одно из наиболее динамично развивающихся направлений современной астрофизики. Это направление ключевым образом связано с решением фундаментальных проблем формирования и эволюции планетных систем, механизмов потери атмосфер и, в конечном счете, определения потенциальной обитаемости внесолнечных миров. С момента открытия первых экзопланет [117], [139] стало ясно, что наблюдаемые характеристики планетных атмосфер формируются сложными физико-химическими процессами, включающими нагрев, охлаждение, ионизацию и гидродинамические выбросы вещества. Особенно значимым становится изучение водородно-гелиевых верхних атмосфер, так как водород и гелий составляют основную массу газовых гигантов. Аэрономия — наука о физике верхних слоев атмосферы — позволяет понять, каким образом воздействие жесткого ультрафиолетового (УФ) и рентгеновского излучения звезд приводит к нагреву, химическим реакциям и потере массы атмосферы.

В этом контексте особый интерес представляют горячие юпитеры и теплые нептун — классы планет-гигантов, находящихся на экстремально тесных орбитах. Их близкое расположение обуславливает интенсивное воздействие потока звездного излучения, что делает верхние атмосферы этих планет объектами для изучения процессов фотохимии, нагрева и гидродинамического оттока вещества в условиях, не встречающихся в Солнечной системе.

Целью данной работы является исследование структуры и динамики водородно-гелиевых верхних атмосфер горячих экзопланет-гигантов на основе усовершенствованной одномерной аэрономической модели и определение ключевых параметров, влияющих на процесс гидродинамического убегания.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построение аэрономической модели в эйлеровых переменных, учитывающей процессы нагрева и охлаждения, приливную силу, диффузию и теплопроводность.
2. Решение полученной нестационарной системы путем разбиения задачи на физические процессы и моделировании каждого процесса соответствующими численными методами.

3. Проведение и анализ численных расчетов рассматриваемых моделей для различных конфигураций граничных и начальных условий.

Научная новизна: В диссертационной работе впервые:

1. Построена одномерная аэрономическая модель верхней водородно-гелиевой атмосферы горячих экзопланет-гигантов, которая учитывает химический состав, функции нагрева и охлаждения, диффузию и теплопроводность.
2. Проведены расчеты влияния потока излучения звезды на структуру верхней атмосферы в условиях вспышечной активности звезды.
3. Обнаружен облачный слой, формирующийся в результате тепловой неустойчивости в химически реагирующем газе.

Практическая значимость Одномерная аэрономическая модель для горячих экзопланет позволит впоследствии проводить интерпретацию спектральных наблюдений верхних атмосфер на планируемой к запуску космической обсерватории Спектр-УФ.

Полученные с помощью разработанной модели результаты важны с точки зрения граничных условий для последующего трехмерного моделирования оболочек горячих экзопланет-гигантов.

Методология и методы исследования. В ходе выполнения диссертационной работы создан программный комплекс для проведения расчетов аэрономической модели. Комплекс включает следующие алгоритмы:

1. Разработан химический модуль, позволяющий учитывать химические процессы, включая процессы фотоионизации и фотодиссоциации. Химический модуль включает следующие этапы: формирование сетки реакций по заданным параметрам, генерация системы обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики и блок для численного решения полученной системы (пакет CVODE).
2. Разработан модуль расчета коэффициентов скоростей реакций фотопроцессов, а также проведена аппроксимация полученных значений аналитическими выражениями.
3. Для интерпретации полученных результатов разработаны программные пакеты на языке Python для построения графиков.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработана оригинальная одномерная аэрономическая модель водородно-гелиевых верхних атмосфер горячих экзопланет-гигантов,

- основанная на приближении одножидкостной многокомпонентной гидродинамики в эйлеровых переменных. Модель наиболее полным образом учитывает все основные процессы, влияющие на структуру и динамику верхней атмосферы: химические реакции, процессы нагрева и охлаждения, приливная сила, диффузия и теплопроводность.
2. По результатам численных расчетов найдена зависимость интенсивности гидродинамического оттока атмосферы от внутренних граничных условий и начального химического состава. Исследована структура атмосферы горячих экзопланет-гигантов различных типов. Установлено, что внешние слои атмосферы горячего юпитера являются полностью ионизованными, в то время как атмосфера теплого нептона в основном состоит из нейтрального газа.
 3. В атмосферах горячих экзопланет обнаружен новый тип облаков, которые представляют собой плотные холодные образования, свободно плавающие в разреженном теплом газе. В горячих юпитерах облачный слой формируется на высоте порядка 1000 км от фотометрической поверхности, а его толщина составляет около 2000 км. Показано, что механизмом формирования данного облачного слоя является тепловая неустойчивость в химически реагирующем газе.
 4. Моделирование влияния вспышечной активности родительской звезды на структуру верхней атмосферы горячих экзопланет-гигантов показало, что в результате дополнительного нагрева возникает динамический отклик, приводящий к образованию ударных волн и заметному увеличению оттока атмосферы. По результатам расчетов установлено, что в случае сильных вспышек, помимо значительного локального нагрева верхней атмосферы возможно также существенное увеличение концентрации водорода во внешних слоях в первые часы после вспышки. Указанные эффекты могут быть наблюдаемы с помощью планируемой к запуску космической обсерватории Спектр-УФ.

Достоверность обусловлена обсуждением результатов диссертации на научных конференциях и семинарах, а также публикацией их в рецензируемых журналах.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. Conference IAU 362: The Predictive Power of Computational Astrophysics as a Discovery Tool, poster (Online, November 8-12, 2021);

2. Школа-семинар «Магнитоплазменные процессы в релятивистской астрофизике» (ИКИ РАН, Таруса, 27 июня — 1 июля 2022);
3. Школа для студентов и молодых ученых «Экзопланеты/Exoplanets2022» (ИНАСАН, Москва, 17 — 18 октября 2022);
4. Конкурс молодых ученых ИНАСАН (ИНАСАН, Москва, 15 ноября 2022);
5. Конференция «Исследование звезд с экзопланетами—2022» (Суздаль, 23-27 ноября 2022)
6. Школа-семинар «Магнитоплазменные процессы в релятивистской астрофизике» (ИКИ РАН, Таруса, 3 — 7 июля 2023);
7. Школа «Исследования экзопланет — 2023» (ИНАСАН, Москва, 4 — 5 октября 2023);
8. Conference Challenges and Innovations in Computational Astrophysics V (Online, November 7 — 9, 2023);
9. Конференция «ВАК-2024» (п. Нижний Архыз, 25 — 31 августа 2024);
10. Школа «Исследования экзопланет — 2024» (ИНАСАН, Москва, 18 — 19 ноября 2024).

Личный вклад. Автор принимал участие в постановке задач, написании численного кода, получении и обработке результатов численных экспериментов. Участвовала в обсуждении результатов и формировании выводов. В частности:

1. Написан химический модуль на языке C++ с помощью открытого программного пакета CVODE;
2. Принимала активное участие в отладке численного кода, реализующего аэрономическую модель;
3. На языке программирования Python написаны программы для обработки анализа и визуализации данных, полученных с помощью аэрономической модели;
4. Проведение численных расчетов структуры верхних атмосфер горячих экзопланет-гигантов с разными начальными значениями, химически составом и потоком излучения родительской звезды;
5. Автор принимала активное участие в написании статей по результатам работ. В статьях, где соискатель является первым автором, ее вклад является определяющим.

Публикации. Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

- [A1] Жилкин А. Г., **Гладышева Ю. Г.**, Шематович В. И., Бисикало Д. В. Аэрономическая модель водородно-гелиевых верхних атмосфер горячих экзопланет-гигантов // *Астрономический журнал*. – 2023. – т.100, №12. – с.1190-1209.
 - [A2] Жилкин А. Г., **Гладышева Ю. Г.**, Шематович В. И., Цуриков Г. Н., Бисикало Д. В. Влияние потока жесткого излучения звезды на структуру водородно-гелиевой верхней атмосферы горячего юпитера // *Астрономический журнал*. – 2024. – т.101, №11. – с.938-953.
 - [A3] Жилкин А. Г., **Гладышева Ю. Г.**, Шематович В. И., Цуриков Г. Н., Бисикало Д. В. Влияние вспышечной активности звезды на структуру водородно-гелиевой верхней атмосферы горячего юпитера // *Астрономический журнал*. – 2024. – т.101, №9. – с.796-809.
 - [A4] **Гладышева Ю.Г.**, Жилкин А.Г. Структура верхней атмосферы горячего юпитера при различных соотношениях водорода и гелия // *Научные труды Института астрономии РАН*. – 2025. – т.10, №1. – с.18-23.
- Другие публикации автора по теме диссертации:
- [B1] **Гладышева Ю. Г.**, Жилкин А. Г., Бисикало Д. В. Химическая модель водородно-гелиевой оболочки горячего юпитера // *Научные труды Института астрономии РАН*. - 2022. - т.7, №3. - с.195-200.
 - [B2] **Gladysheva Y.**, Zhilkin A., Bisikalo D. Multi-component MHD model for hydrogen-helium extended envelope of hot jupiter // *Origins: Predictive Power for Computational Astrophysics as a Discovery Tool. Proceedings of the International Astronomical Union, Volume 362*, pp. 167-168, 2023.
 - [B3] Жилкин А. Г., **Гладышева Ю. Г.**, Бисикало Д. В. Гидростатическая модель водородно-гелиевой атмосферы горячего юпитера // *Научные труды Института астрономии РАН*. - 2023. - т.8, №1. - с.26-33.
 - [B4] **Гладышева Ю. Г.**, Жилкин А. Г., Бисикало Д. В. Образование энергетических нейтральных атомов в оболочках горячих юпитеров // *Научные труды Института астрономии РАН*. - 2023. - т.8, №1. - с.34-43.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 3 приложений. Полный объем диссертации составляет 144 страницы, включая 45 рисунков и 5 таблиц. Список литературы содержит 149 наименований.

Глава 1. Аэрономическая модель верхних атмосфер экзопланет-гигантов

1.1 Верхние атмосферы экзопланет-гигантов

Горячие юпитеры — это экзопланеты массой порядка массы Юпитера, располагающиеся в непосредственной близости от родительской звезды. Спектральные наблюдения показали, что экзопланеты окружены протяженной оболочкой. Было установлено, что атмосферы планет с такими оболочками испытывают газодинамический отток вещества. Ключевым фактором, влияющим на распределение параметров атмосферы, является ее химический состав. Он позволяет получить информацию о физических процессах, формировании и эволюции атмосфер экзопланет.

Для (экзо)планет-гигантов химический состав газовой фазы имеет решающее значение для определения циркуляции, температуры и наблюдаемых свойств планетных атмосфер [4–6]. Непрозрачность для звездного излучения, определяемая составом, управляет нагревом, который, в свою очередь, определяет динамику. Химическое моделирование атмосфер экзопланет в значительной степени ограничивалось одномерными кодами химической кинетики (например, [1; 7–9]), показывая, что вертикальный перенос может приводить к отклонениям от химического равновесия. Атмосфера горячего юпитера имеет большие горизонтальные градиенты температуры из-за интенсивного облучения дневной стороны, что приводит к высокой горизонтальной скорости ветра. Следовательно, неравновесный химический состав, обусловленный горизонтальным переносом, так же важен, как и вертикальное перемешивание в атмосферах горячих юпитеров [9; 16–18].

Для интерпретации наблюдений атмосфер экзопланет необходима разработка аэрономических моделей верхних атмосфер (например, обзоры [19; 20]). Разработка таких моделей началась практически одновременно с открытием протяженных водородных оболочек в наблюдениях транзитов горячих юпитеров при помощи космического телескопа им. Хаббла (HST) [20; 21]. В таких моделях учитываются, по возможности самосогласованно, динамические и физико-химические процессы в верхних атмосферах экзопланет, подверженных

воздействию звездного жесткого УФ излучения [22–26] и потока плазмы звездного ветра от родительской звезды [27]. В современных версиях аэрономических моделей [28–30] учитываются кинетические эффекты, вызванные воздействием потоков фото- и авроральных электронов. Разработанные аэрономические модели также широко используются для оценки темпа потери атмосферы для горячих экзопланет (например, [19; 29]). Процессы убегания (или диссипации) из атмосферы могут иметь значительные последствия для эволюции планетных атмосфер, а также для структуры, химического состава и объемной плотности различных планет. Например, широко признано, что ранние атмосферы Венеры, Земли и Марса сформировались в результате процессов убегания (например, [31]).

Экзопланеты предлагают расширенное пространство параметров, которое можно использовать для тестирования моделей убегания из атмосферы. Статистический анализ распределений экзопланет по радиусу и периоду обращения показывает, что популяция известных экзопланет включает в себя такие особенности, как долина по радиусу между каменистыми планетами и планетами с протяженными газовыми оболочками [32] и пустыни горячих нептонов/супер-земель [33; 34], которые часто связаны с потерей газовых оболочек с течением времени (например, [35]). Многие транзитные экзопланеты также демонстрируют признаки убегания из атмосферы в своих спектрах пропускания (например, [36–43]), что привело к необходимости новых разработок в теории процессов убегания из атмосферы (например, [19; 44]). Наблюдения за атмосферами планет во время транзитов ограничили механизм убегания и скорости потери массы в теоретических моделях и выявили качественные различия между различными типами планет и их родительских звезд. Например, транзитные наблюдения в дальнем ультрафиолетовом диапазоне (FUV), полученные с помощью HST, позволили исследовать распределение атомарного водорода в протяженных верхних слоях атмосферы, а также некоторых более тяжелых элементов, таких как углерод, кислород и кремний, если последние присутствуют на больших высотах в достаточном количестве. Эти наблюдения показывают, что многие планеты на близких к родительской звезде орбитах теряют массу из-за гидродинамического оттока. Они также указывают на то, что планеты с массой Нептуна, такие как GJ 436b и GJ 3470b, имеют большие глубины транзитов (в частности, в линии $\text{Ly}\alpha$) в верхних слоях атмосферы [40; 41], чем горячие юпитеры, такие как HD 209458b или HD 189733b [36; 38].

Как правило, процессы убегания осуществляются за счет диссоциации, ионизации и нагрева верхних слоев атмосферы планеты рентгеновским и ультрафиолетовым (XUV) излучением звезд [19]. Большинство моделей этого процесса сходятся во мнении, что типичные горячие юпитеры не теряют существенной части своих оболочек, даже когда потеря их атмосферы происходит в режиме гидродинамического оттока. Подробные модели верхних слоев атмосферы, которые использовались для объяснения наблюдений за транзитами, обычно предсказывают скорость атмосферных потерь порядка 10^{10} – 10^{11} г/с для наиболее изученных горячих юпитеров, таких как HD209458b или HD189733b (например, [22–25; 45–47]). При таких скоростях совокупная потеря массы атмосферы многими горячими юпитерами составляет самое большее несколько процентов от текущей массы планеты, в зависимости от изменения потока XUV излучения родительской звезды со временем.

Одним из наиболее изученных горячих юпитеров является экзопланта HD 209458b. В работе [36] приведены первые наблюдения первичных транзитов этой планеты в Ly α с помощью спектрографа STIS на борту HST и сообщается о величине поглощения в 15% в высокоскоростном синем крыле линии. Повторный анализ тех же данных [54; 55] дал несколько меньшие (6-9%) и более симметричные профили поглощения. Первичные измерения прохождения HD 209458b по диску звезды на длинах волн дальнего ультрафиолета (с помощью спектрографа HST/STIS) также выявили глубину поглощения в $10 \pm 4.5\%$ в резонансных линиях OI (2P-2D) и $7.5 \pm 3.5\%$ в резонансных линиях CII (3P-3S) [56]. Новую возможность исследовать расширяющиеся атмосферы горячих юпитеров и теплых нептунот открывают измерения метастабильной триплетной линии гелия 2³S на 108300 нм [57]. Такой обширный материал наблюдений, доступный для HD 209458b, делает этот горячий юпитер основным кандидатом для применения сложных численных аэрономических моделей, направленных на интерпретацию измерений и вывод физических параметров и особенностей звездно-планетной системы, таких как атмосферные потери, обилие и химический состав верхних слоев атмосферы планеты, параметры потока звездного ветра и потока звездного излучения. Такие модели постоянно разрабатывались в течение последнего десятилетия различными исследовательскими группами, при этом сложность и детализация моделируемых явлений возрастали (см., например, [19]).

Одномерные аэрономические модели, описывающие структуру верхних атмосфер горячих экзопланет-гигантов, можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся стационарные модели, в которых предполагается, что все гидродинамические величины (плотность, скорость, концентрации компонентов и др.) не зависят от времени и являются только функциями радиуса. Формирующееся истечение атмосферы имеет, как правило, трансзвуковой характер. Поэтому получаемое решение задачи представляет собой аналог решения Паркера [58] для солнечного ветра. Интегральная кривая должна проходить через особую точку, в которой скорость атмосферного ветра равна местной скорости звука. В результате в задаче появляется дополнительное условие сшивки, которое необходимо учесть при построении решения. Модели подобного типа используются, например, в работах [59; 60]. Ко второй группе относятся нестационарные модели, в которых полученное решение либо стремится к стационарному, либо является квази-стационарным. В этих моделях уравнения гидродинамики можно решать как в лагранжевых, так и в эйлеровых переменных. В первом случае из-за расширения атмосферы к моменту выхода на стационарный режим внешняя подвижная граница расчетной области может удалиться на достаточно большое расстояние от центра планеты, что не всегда удобно. Этого эффекта можно частично избежать, задавая внешнюю среду (например, звездный ветер) [29; 61]. При использовании эйлеровых переменных решение строится в фиксированной расчетной области. При этом на внешней границе задаются условия свободного вытекания. Такой подход использовался во многих работах (см., например, [22; 23; 26; 62–64]). В данной работе также использовались эйлеровы переменные.

1.2 Базовая модель верхней атмосферы

1.2.1 Математическая модель

Для описания структуры верхней атмосферы горячего юпитера используется одномерная сферически-симметричная модель, основанная на приближении одножидкостной многокомпонентной гидродинамики.

Рассмотрим поэтапное получение системы уравнений для этой модели. Прежде всего модель включает газодинамические уравнения [81], описывающие течение невязкого газа. Эти уравнения в общем виде имеют вид [69]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + \nabla P = \rho \mathbf{f} - \mathbf{D}_v, \quad (1.2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varepsilon \right] + P \nabla \cdot \mathbf{v} = D_\varepsilon + \rho Q + \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (1.3)$$

где ρ — плотность вещества, $\mathbf{v}$ — средняя массовая скорость, P — полное давление, ε — удельная внутренняя энергия, λ — коэффициент теплопроводности, T — температура, $\mathbf{f}$ — внешняя сила, Q — функция источника для процессов нагрева и охлаждения. Значения $\mathbf{D}_v$ и D_ε определяются следующими выражениями

$$\mathbf{D}_v = \sum_{\alpha} \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}) \quad (1.4)$$

$$D_\varepsilon = \sum_{\alpha} [\nabla \cdot (\rho_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) + P_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{w}_{\alpha}], \quad (1.5)$$

где $\mathbf{w}_{\alpha}$ — диффузионная скорость компонента сорта α , параметры P_{α} и ε_{α} — определяют частные функции давления и внутренней энергии для компоненты сорта α .

Поскольку модель является многокомпонентной, то уравнение (1.1) для каждого компонента сорта α будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \mathbf{v}) = D_{\alpha} + S_{\alpha}, \quad (1.6)$$

где ρ_{α} — плотность компоненты сорта α , D_{α} — диффузия компоненты сорта α , S_{α} — функция источника, которая описывает изменение числа частиц сорта α за счет химических реакций и процессов фотохимии. Диффузия компоненты сорта α определяется величиной

$$D_{\alpha} = \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}). \quad (1.7)$$

Кроме того, для полной плотности справедливо соотношение

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}, \quad (1.8)$$

а также выполняются условия

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0, \quad (1.9)$$

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 0. \quad (1.10)$$

Таким образом, просуммировав уравнения непрерывности (1.6) по всем компонентам получим уравнение непрерывности для многокомпонентной гидродинамики, которое совпадает с уравнением (1.1).

Данная модель рассматривается в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре планеты. Будем считать, что центр звезды располагается в точке с координатами $r = A, \theta = \pi/2, \varphi = 0$. Тогда общая система уравнений, учитывающая все перечисленные эффекты, в эйлеровых переменных (время t и радиальная координата r , отсчитываемая от центра планеты) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{GM_{\text{pl}}}{r^2} + f_{\text{tidal}}, \quad (1.12)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{P}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \Gamma - \Lambda, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_{\alpha} v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_{\alpha} w_{\alpha}) + K_{\alpha} - n_{\alpha} L_{\alpha}. \quad (1.14)$$

Здесь ρ — плотность вещества, v — средняя массовая радиальная скорость, P — полное давление, ε — удельная внутренняя энергия, T — температура, G — гравитационная постоянная, M_{pl} — масса планеты. Последнее слагаемое f_{tidal} в правой части уравнения (1.12) описывает силу приливного взаимодействия от звезды. В уравнении энергии (1.13) λ — коэффициент теплопроводности, а величины Γ и Λ представляют собой объемные коэффициенты нагрева и охлаждения соответственно (измеряются в $\text{эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$). Для каждого компонента сорта α определены концентрация n_{α} , темп производства K_{α} ($\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$) и скорость расхода L_{α} (с^{-1}). Величина w_{α} определяет диффузионную скорость компонента сорта α , т.е. разность между средней массовой скоростью v и средней скоростью компонента v_{α} .

Для замыкания системы уравнений (1.11)–(1.14) используются уравнения состояния идеального газа

$$P = \frac{k_{\text{B}} \rho T}{\mu m_{\text{p}}}, \quad \varepsilon = \frac{k_{\text{B}} T}{(\gamma - 1) \mu m_{\text{p}}}, \quad (1.15)$$

где k_B — постоянная Больцмана, m_p — масса протона, $\gamma = 5/3$ — показатель адиабаты, μ — средний молекулярный вес. Была рассмотрена водородно-гелиевая атмосфера горячего юпитера. Учитывались следующие компоненты: H , H^- , H^+ , H_2 , H_2^+ , H_3^+ , He , He^+ , HeH^+ , а также электроны e^- .

В данной модели учитывались 32 двухчастичные химические реакции, включающие процессы фотоионизации и фотодиссоциации. Учитывалась также трехчастичная реакция образования молекул H_2 из двух атомов водорода, которая идет с участием некоторой дополнительной частицы.

Средний молекулярный вес μ определяется выражением

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{\alpha} (1 + Z_{\alpha}) \frac{m_p}{m_{\alpha}} \xi_{\alpha}, \quad (1.16)$$

где Z_{α} — зарядовое число компонента сорта α (для нейтралов оно равно нулю), m_{α} — масса соответствующих частиц, $\xi_{\alpha} = m_{\alpha} n_{\alpha} / \rho$ — массовое содержание компонента сорта α .

1.2.2 Химические процессы

Уравнение непрерывности (1.14) без учета влияния диффузии на распределение компонентов в верхней атмосфере экзопланет можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \xi_s) + \nabla \cdot (\rho \xi_s \mathbf{v}) = S_s, \quad s = 1, \dots, N, \quad (1.17)$$

где ξ_s — массовая доля компоненты, ρ — плотность, S_s — функция источника, описывающая локальные изменения числа частиц сорта s , N — число компонент. Концентрации компонент определяются выражением $n_s = \rho \xi_s / m_s$, где m_s — масса частицы сорта s . Для численного решения уравнений многокомпонентной МГД мы используем методику расщепления по физическим процессам. Алгоритм состоит из нескольких последовательных этапов. Применительно к уравнению (1.17) на первом этапе, соответствующем идеальной многокомпонентной МГД, источник в правой части не учитывается. Это означает, что на первом этапе все химические компоненты трактуются как пассивные примеси, переносимые вместе с веществом. Учет источников производится на отдельном этапе алгоритма. Таким образом, моделирование изменения концентрации компонент n_s можно вынести в отдельный химический модуль численного кода.

Таблица 1 — Сетка реакций водородно-гелиевой химии. Константа скорости для трехчастичной реакции R5 имеет размерность см⁶/с, для фотопроцессов (R23–R30) — с^{−1}, а для всех остальных реакций — см³/с.

№	Реакция	Темп	Ссылка
R1a	$\text{H}_2 + \text{H} \rightarrow \text{H} + \text{H} + \text{H}$	$1.40 \cdot 10^{-4} T^{-1} e^{-55000/T}$	[72]
R1b	$\text{H}_2 + \text{H}_2 \rightarrow \text{H} + \text{H} + \text{H}_2$	$10^{-8} e^{-84100/T}$	[72]
R2	$\text{H}_2 + e^- \rightarrow \text{H} + \text{H} + e^-$	$4.37 \cdot 10^{-10} T^{0.35} e^{-102000/T}$	[72]
R3	$\text{H} + e^- \rightarrow \text{H}^+ + e^- + e^-$	$6.44 \cdot 10^{-11} T^{0.5} e^{-158000/T}$	[72]
R4	$\text{He} + e^- \rightarrow \text{He}^+ + e^- + e^-$	$1.98 \cdot 10^{-11} T^{0.5} e^{-284300/T}$	[75]
R5	$\text{H} + \text{H} + \text{M} \rightarrow \text{H}_2 + \text{M}$	$1.50 \cdot 10^{-29} T^{-1.3}$	[23]
R6a,b	$\text{H}^+ + \text{He} \rightleftharpoons \text{H} + \text{He}^+$	$2.88 \cdot 10^{-16} T^{0.25}$	[72]
R7	$\text{H}^+ + e^- \rightarrow \text{H} + h\nu$	$2.52 \cdot 10^{-10} T^{-0.75}$	[72]
R8	$\text{He}^+ + e^- \rightarrow \text{He} + h\nu$	$9.08 \cdot 10^{-11} T^{-0.64}$	[23]
R9	$\text{H}^- + \text{H} \rightarrow \text{H}_2 + e^-$	$4.00 \cdot 10^{-8} T^{-0.39} e^{-39.4/T}$	[72]
R10	$\text{H}^- + \text{H}^+ \rightarrow \text{H} + \text{H}$	$1.30 \cdot 10^{-6} T^{-0.5}$	[72]
R11	$\text{H}^- + \text{He}^+ \rightarrow \text{H} + \text{He}$	$1.30 \cdot 10^{-6} T^{-0.5}$	[72]
R12	$\text{H} + e^- \rightarrow \text{H}^- + h\nu$	$8.76 \cdot 10^{-18} T^{0.64} e^{-9.2/T}$	[72]
R13a,b	$\text{H} + \text{H}_2^+ \rightleftharpoons \text{H}_2 + \text{H}^+$	$6.40 \cdot 10^{-10}$	[72]
R14	$\text{H}_2^+ + e^- \rightarrow \text{H} + \text{H}$	$1.86 \cdot 10^{-7} T^{-0.43}$	[23]
R15	$\text{H}_3^+ + e^- \rightarrow \text{H}_2 + \text{H}$	$1.38 \cdot 10^{-7} T^{-0.3}$	[23]
R16	$\text{H}_3^+ + e^- \rightarrow \text{H} + \text{H} + \text{H}$	$4.15 \cdot 10^{-7} T^{-0.3}$	[23]
R17	$\text{H}_2^+ + \text{H}_2 \rightarrow \text{H}_3^+ + \text{H}$	$2.08 \cdot 10^{-9}$	[72]
R18	$\text{H}^- + \text{H}_3^+ \rightarrow \text{H} + \text{H}_2 + \text{H}$	$1.30 \cdot 10^{-6} T^{-0.5}$	[72]
R19	$\text{H}^+ + \text{H} \rightarrow \text{H}_2^+ + h\nu$	$2.34 \cdot 10^{-22} T^{1.49} e^{-228/T}$	[72]
R20	$\text{H}_2^+ + \text{He} \rightarrow \text{HeH}^+ + \text{H}$	$1.30 \cdot 10^{-10}$	[72]
R21	$\text{H}_2 + \text{HeH}^+ \rightarrow \text{He} + \text{H}_3^+$	$1.50 \cdot 10^{-9}$	[72]
R22	$\text{H} + \text{HeH}^+ \rightarrow \text{He} + \text{H}_2^+$	$9.10 \cdot 10^{-10}$	[72]
R23	$\text{H}_2 + h\nu \rightarrow \text{H} + \text{H}^+ + e^-$	$5.32 \cdot 10^{-5}/(1 + 0.45\tau^{1.6})$	[71]
R24	$\text{H}_2 + h\nu \rightarrow \text{H} + \text{H}$	$5.32 \cdot 10^{-5}/(1 + 0.45\tau^{1.6})$	
R25	$\text{H} + h\nu \rightarrow \text{H}^+ + e^-$	$3.79 \cdot 10^{-5}/(1 + 0.75\tau^{1.7})$	
R26	$\text{He} + h\nu \rightarrow \text{He}^+ + e^-$	$2.21 \cdot 10^{-5}/(1 + 0.01\tau^{1.9})$	
R27	$\text{H}^- + h\nu \rightarrow \text{H} + e^-$	$3.79 \cdot 10^{-5}/(1 + 0.75\tau^{1.7})$	
R28	$\text{H}_2^+ + h\nu \rightarrow \text{H}^+ + \text{H}$	$5.32 \cdot 10^{-5}/(1 + 0.45\tau^{1.6})$	
R29	$\text{H}_3^+ + h\nu \rightarrow \text{H}_2^+ + \text{H}$	$5.32 \cdot 10^{-5}/(1 + 0.45\tau^{1.6})$	
R30	$\text{H}_3^+ + h\nu \rightarrow \text{H}_2 + \text{H}^+$	$5.32 \cdot 10^{-5}/(1 + 0.45\tau^{1.6})$	

Функция источника в правой части уравнения (1.17) может быть представлена в виде

$$S_s = m_s (K_s - L_s n_s), \quad (1.18)$$

где K_s — темп производства компоненты сорта s ($\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$), L_s — скорость расхода компоненты сорта s (с^{-1}). Поэтому система обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики может быть записана следующим образом:

$$\frac{dn_s}{dt} = K_s - L_s n_s. \quad (1.19)$$

Для учета химических процессов в численном коде правые части уравнений (1.19) генерируются автоматически в виде функций на языке программирования C++. Алгоритм генерации функции источника состоит в следующем. Рассматривается химическая реакция вида



где химические компоненты A и B являются реагентами, а C представляет собой продукт реакции, которых может быть несколько. В ходе данного процесса концентрации реагентов уменьшаются, а концентрации продуктов, наоборот, увеличиваются. Обозначим константу скорости данной реакции через k . Тогда рассматриваемая реакция даст следующие вклады в функции источника

$$L(A) = L(A) + kn(B), \quad L(B) = L(B) + kn(A), \quad (1.21)$$

$$K(C) = K(C) + kn(A)n(B), \quad \dots \quad (1.22)$$

Здесь многоточие означает, что подобные выражения необходимо записать для всех продуктов реакции. Для электронов e^- отдельное уравнение в (1.19) не используется, поскольку их концентрация может быть найдена из условия квазинейтральности плазмы,

$$n_e = \sum_s Z_s n_s, \quad (1.23)$$

где Z_s — зарядовое число компоненты сорта s . В некоторых реакциях (см. Таблицу 1) в качестве реагента B выступают протоны космических лучей или фотоны. В этом случае вместо выражений (1.21) и (1.22) имеем соответственно

$$L(A) = L(A) + k, \quad K(C) = K(C) + kn(A), \quad \dots \quad (1.24)$$

Пробегаая по всей сетке реакций, получим полное значение функции источника.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.19) химической кинетики является жесткой, поскольку константы реакций могут сильно отличаться между собой. Поэтому для ее численного решения необходимо вычислять матрицу Якоби

$$J_{rs} = \frac{\partial}{\partial n_s} (K_r - L_r n_r). \quad (1.25)$$

В численном коде она также генерируется автоматически по заданной сетке реакций в виде функции на языке программирования C++. Алгоритм генерации аналогичен тому, как генерируются функции правых частей уравнений (1.19). При этом нужно учесть соотношение

$$\frac{\partial n_e}{\partial n_s} = Z_s. \quad (1.26)$$

Коэффициенты скоростей реакций k приведены в таблице 1. Эти значения брались из открытых источников (ссылки также приведены в таблице), за исключением коэффициентов скоростей реакций фотопроцессов. Для реакций фотохимии необходимо вычислять значение коэффициента k для каждого конкретного случая.

Водородно-гелиевая химия. Для решения уравнений химической кинетики (1.19) необходимо задать начальные условия для концентраций n_s . Расчеты, проведенные в рамках аэрономических моделей [98], показывают, что наиболее значимыми компонентами протяженной оболочки горячих юпитеров являются атомарный водород H, ионизованный водород H^+ , молекулярный водород H_2 , атомарный гелий He и однократно ионизованный гелий He^+ . Оставшиеся компоненты H^- , H_2^+ , H_3^+ и HeH^+ дают очень малый вклад в полную концентрацию. Поэтому в дальнейшем будем называть их малыми фракциями.

Химический состав водородно-гелиевых оболочек горячих юпитеров удобно характеризовать параметром $\chi = [He/H]$, который равен отношению числа ядер гелия к числу ядер водорода. Массовое содержание водорода X и гелия Y можно выразить через этот параметр. Обозначим через $n[H]$ и $n[He]$ количества ядер водорода и гелия в единице объема соответственно. Тогда массы ядер водорода и гелия в единице объема

$$\rho[H] = m_p n[H], \quad \rho[He] = 4m_p n[He], \quad (1.27)$$

где m_p — масса протона. С учетом этого

$$\frac{Y}{X} = \frac{\rho[\text{He}]}{\rho[\text{H}]} = 4 \frac{n[\text{He}]}{n[\text{H}]} = 4\chi. \quad (1.28)$$

С другой стороны, в водородно-гелиевой оболочке должно быть $X + Y = 1$. Отсюда находим

$$X = \frac{1}{1 + 4\chi}, \quad Y = \frac{4\chi}{1 + 4\chi}. \quad (1.29)$$

Введем в рассмотрение степень ионизации атомарного водорода x_1 , степень диссоциации молекулярного водорода x_2 и степень ионизации гелия x_3 ,

$$x_1 = \frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{H}^+) + n(\text{H})}, \quad (1.30)$$

$$x_2 = \frac{n(\text{H})}{n(\text{H}) + n(\text{H}_2)}, \quad (1.31)$$

$$x_3 = \frac{n(\text{He}^+)}{n(\text{He}^+) + n(\text{He})}. \quad (1.32)$$

Эти величины лежат в диапазоне от 0 до 1. Причем значению 1 соответствует состояние полной ионизации или диссоциации. Для малых фракций начальные концентрации определим соотношением:

$$n(\text{H}^-) = n(\text{H}_2^+) = n(\text{H}_3^+) = n(\text{HeH}^+) = x_4 n(\text{H}), \quad (1.33)$$

где x_4 — коэффициент пропорциональности. Задавая параметры x_1 , x_2 , x_3 и x_4 , а также химический состав χ , можно концентрацию любого компонента n_s выразить через полную концентрацию n вещества.

Выражая массы водорода и гелия в единице объема через концентрации, получается следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \rho[\text{H}] = m_p [n(\text{H}) + n(\text{H}^-) + n(\text{H}^+) + \\ + 2n(\text{H}_2) + 2n(\text{H}_2^+) + 3n(\text{H}_3^+) + n(\text{HeH}^+)] = \\ = A_1 m_p n(\text{H}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\rho[\text{He}] = 4m_p [n(\text{He}) + n(\text{He}^+) + n(\text{HeH}^+)] = 4m_p n(\text{H}) + 4B_1 m_p n(\text{He}), \quad (1.35)$$

где коэффициенты

$$A_1 = 1 + \frac{x_1}{1 - x_1} + 2 \frac{1 - x_2}{x_2} + 7x_4, \quad B_1 = 1 + \frac{x_3}{1 - x_3}. \quad (1.36)$$

С учетом (1.28) отсюда получаем

$$n(\text{He}) = \chi_1 n(\text{H}), \quad (1.37)$$

где

$$\chi_1 = \frac{A_1 \chi - x_4}{B_1}. \quad (1.38)$$

Полная концентрация вещества с учетом концентрации электронов и условия квазинейтральности (1.23) может быть записана в виде

$$n = \sum_s (1 + Z_s) n_s. \quad (1.39)$$

Раскрывая эту сумму, получим следующее выражение:

$$n = A_2 n(\text{H}) + B_2 n(\text{He}), \quad (1.40)$$

где

$$A_2 = 1 + 2 \frac{x_1}{1 - x_1} + \frac{1 - x_2}{x_2} + 6x_4, \quad B_2 = 1 + 2 \frac{x_3}{1 - x_3}. \quad (1.41)$$

Отсюда из (1.37) можно выразить концентрацию атомов водорода через полную концентрацию

$$n(\text{H}) = \frac{1}{A_2 + \chi_1 B_2} n. \quad (1.42)$$

Остальные концентрации определяются с помощью формул (1.30)–(1.33), (1.37).

Фотопроцессы. Константы скорости реакций фотоионизации и фотодиссоциации (реакции R23–R26) необходимо рассчитывать с учетом спектра излучения звезды, расположения планеты и соответствующих сечений взаимодействия. Были проделаны вычисления для H_2 , H и He в условиях излучения спокойного Солнца. Скорости фотоионизации (фотодиссоциации) определяются выражением:

$$k_{\text{ph}} = \int_0^{\lambda_0} \sigma(\lambda) f_\lambda e^{-\tau(\lambda)} d\lambda, \quad (1.43)$$

где λ — длина волны, f_λ — поток ионизирующего излучения (количество фотонов $\cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$), λ_0 — длина волны, соответствующая порогу ионизации (диссоциации), $\sigma(\lambda)$ — сечение взаимодействия, $\tau(\lambda)$ — оптическая толщина.

Поскольку в дальнейшем предполагается использовать описываемую одномерную численную модель в качестве инструмента генерации начальных условий для атмосферы горячего юпитера в трехмерном численном коде, то желательно аппроксимировать интеграл (1.43) удобной аналитической формулой. Для этого необходимо в подынтегральном выражении выделить один свободный параметр.

Введем полное эффективное сечение $\bar{\sigma}(\lambda)$ с помощью соотношения

$$\tau(\lambda) = \int dr \sum_{\alpha'} \sigma_{\alpha'}(\lambda) n_{\alpha'} = \int dr \bar{\sigma}(\lambda) \sum_{\alpha'} n_{\alpha'}. \quad (1.44)$$

Здесь интеграл берется вдоль луча от звезды до данной точки в атмосфере планеты. Индекс α' соответствует компонентам, участвующим в фотопроцессах. При вычислении полного эффективного сечения концентрациями H^- , H_2^+ и H_3^+ можно пренебречь, поскольку они малы по сравнению с концентрациями атомов водорода и гелия. Концентрацию H_2 также можно не учитывать, поскольку эти молекулы образуются в самых глубоких слоях атмосферы, где оптическая толщина и так уже велика. В результате приходим к выражению:

$$\bar{\sigma}(\lambda) \approx \frac{\sigma_{\text{H}}(\lambda) n_{\text{H}} + \sigma_{\text{He}}(\lambda) n_{\text{He}}}{n_{\text{H}} + n_{\text{He}}}. \quad (1.45)$$

Между водородом и гелием химического взаимодействия практически не происходит. Они образуют только молекулы гидрида гелия HeH^+ , концентрация которых мала. Поэтому можно считать, что заданный в начальный момент времени однородный химический состав будет оставаться почти однородным и в последующие моменты времени. В химически однородной водородно-гелиевой атмосфере удобно ввести параметр χ , равный отношению числа ядер гелия к числу ядер водорода, $\chi = [\text{He}/\text{H}]$. Это позволяет выразить полное эффективное сечение в виде

$$\bar{\sigma}(\lambda) \approx \frac{\sigma_{\text{H}}(\lambda) + \chi \sigma_{\text{He}}(\lambda)}{1 + \chi}. \quad (1.46)$$

Для оптической толщины находим

$$\tau(\lambda) = \frac{\bar{\sigma}(\lambda)}{\sigma_{\text{XUV}}} \tau, \quad \tau = \sigma_{\text{XUV}} \int n_{\text{n}} dr, \quad (1.47)$$

где коэффициент $\sigma_{\text{XUV}} = 6.3 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$, а n_{n} — концентрация нейтралов.

Численно рассчитанные по формуле (1.43) зависимости констант скорости k_{ph} реакций фотоионизации водорода и гелия, а также фотодиссоциации

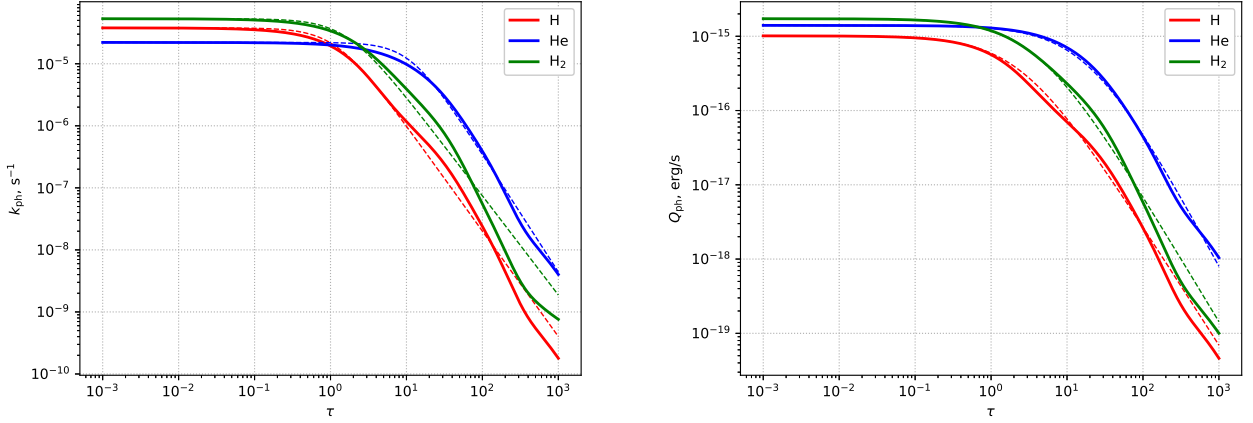


Рисунок 1.1 — Константы скорости реакций фотоионизации и фотодиссоциации k_{ph} (слева) и соответствующие величины энергии излучения Q_{ph} , поглощаемые средой в единицу времени в расчете на один атом (справа). Сплошными линиями показаны зависимости k_{ph} и Q_{ph} от оптической толщины τ , рассчитанные по формулам (1.43) и (1.50) для горячей планеты, находящейся на расстоянии 0.05 а.е. от родительской звезды. Пунктирными линиями показаны соответствующие аналитические аппроксимации.

молекулярного водорода от оптической толщины τ представлены сплошными линиями на левой панели рис. 1.1. Сечения взаимодействия $\sigma(\lambda)$ взяты из работы [73]. Для расчета использовался входящий поток излучения f_λ для спокойного Солнца [74], пересчитанный на расстояние от звезды 0.05 а.е., соответствующее положению типичного горячего юпитера. Полученные зависимости $k_{\text{ph}}(\tau)$ аппроксимировались аналитическим выражением

$$k_{\text{кр}} = \frac{k_0}{1 + \alpha\tau^\beta}, \quad (1.48)$$

где k_0 — значение константы, соответствующее входящему потоку излучения, α , β — параметры, зависящие от химического состава χ . Для случая $\chi = 0.05$ полученные значения этих параметров используются в таблице 1 (реакции R23–R26). Полученные аналитические аппроксимации зависимостей $k_{\text{ph}}(\tau)$ представлены на рис. 1.1 пунктирными линиями.

Найденные значения констант скорости можно использовать и для описания оставшихся фотопроцессов (R27–R30). Для учета реакции R27 можно взять константу фотоионизации атомарного водорода (реакция R25). Для описания реакций R29–R30 можно брать константу фотодиссоциации молекулярного водорода (реакция R23). Такой выбор констант можно обосновать тем, что в базе

данных UMIST [72] для этих реакций значения констант задаются по такому же принципу.

1.2.3 Нагрев и охлаждение

Нагрев. Основным источником нагрева верхней атмосферы горячих экзопланет-гигантов является поглощение жесткого УФ излучения родительской звезды. Функция нагрева обусловлена всеми процессами фотоионизации и фотодиссоциации. Для данного фотопроцесса можно написать

$$\Gamma_{\text{ph}} = n \int_0^{\lambda_0} \sigma(\lambda) f_{\lambda} e^{-\tau(\lambda)} (h\nu - h\nu_0) d\lambda = n (Q_{\text{ph}} - h\nu_0 k_{\text{ph}}), \quad (1.49)$$

где n — концентрация реагента, участвующего в фотопроцессе, h — постоянная Планка, $\nu = c/\lambda$ — частота излучения, ν_0 — частота ионизации. Величина Q_{ph} представляет собой полную энергию излучения, поглощаемую средой в единицу времени, рассчитанную на 1 атом (измеряется в единицах эрг/с),

$$Q_{\text{ph}} = \int_0^{\lambda_0} \sigma(\lambda) f_{\lambda} e^{-\tau(\lambda)} h\nu d\lambda. \quad (1.50)$$

Второе слагаемое $h\nu_0 k_{\text{ph}}$ в круглых скобках в правой части (1.49) определяет энергию излучения, идущую на ионизацию среды в единицу времени, рассчитанную на 1 атом (измеряется в единицах эрг/с).

Темп ионизации k_{ph} и поглощаемая энергия излучения Q_{ph} зависят от оптической толщины τ . Для k_{ph} эти зависимости обсуждались выше. Аналогичные вычисления были проделаны и для величин Q_{ph} . Численно рассчитанные с помощью формулы (1.50) зависимости $Q_{\text{ph}}(\tau)$ для реакций фотоионизации водорода и гелия, а также фотодиссоциации молекулярного водорода представлены сплошными линиями на правой панели рис. 1.1. Эти зависимости аппроксимировались аналитическим выражением [71]

$$Q_{\text{ph}} = \frac{Q_0}{(1 + \alpha\tau)^{\beta}}, \quad (1.51)$$

Компонент	Q_0	α	β
H	$1.01 \cdot 10^{-15}$	0.40	1.6
He	$1.40 \cdot 10^{-15}$	0.05	1.9
H ₂	$1.72 \cdot 10^{-15}$	0.25	1.7

Таблица 2 — Коэффициенты аппроксимационной формулы (1.51) для поглощаемой энергии излучения Q_{ph} в процессах фотоионизации и фотодиссоциации.

где Q_0 — значение, соответствующее входящему потоку излучения, α , β — параметры, зависящие от химического состава χ . Для случая $\chi = 0.05$ найденные значения этих параметров приведены в таблице 2.

Полная функция нагрева определяется суммированием частных функций (1.49) по всем фотопроцессам. При расчете этой функции учитывались только процессы фотоионизации атомов водорода и гелия (реакции R25 и R26), а также процессы фотодиссоциации (реакции R23 и R24), поскольку остальные процессы (реакции R27–R30) не дают какого-либо заметного вклада в тепловой баланс атмосферы. Важный вклад в функцию нагрева могут вносить надтепловые фотоэлектроны. Для реакций фотоионизации в первом приближении их можно учесть с помощью соответствующего фактора,

$$\Gamma_{\text{ph}} \rightarrow \eta_{\text{ph}} \Gamma_{\text{ph}}, \quad (1.52)$$

где η_{ph} — эффективность нагрева фотоэлектронами, которая составляет величину порядка 20%–30% [19]. Для реакций фотодиссоциации этот коэффициент следует положить равным 1.

Эффекты нагрева атмосферы, обусловленные химическими реакциями, а также диссоциацией молекулярного водорода, не играют существенной роли и поэтому они не учитывались.

Охлаждение. Охлаждение верхних атмосфер горячих экзопланет-гигантов осуществляется за счет нескольких механизмов. Каждому отдельному механизму соответствует своя функция охлаждения. Полная функция охлаждения Λ определяется суммой всех частных функций. Можно выделить механизмы, обусловленные следующими процессами: 1) столкновения электронов и ионов; 2) столкновения электронов с нейтрами; 3) излучение молекул. Рассмотрим эти механизмы охлаждения подробнее.

При расчете функции охлаждения, обусловленной процессами столкновения электронов с ионами можно ограничиться учетом только ионов водорода H^+ . Такое охлаждение осуществляется за счет излучения в непрерывном спектре вследствие свободно-свободных переходов (тормозное излучение электрона в поле протона). Соответствующая функция охлаждения определяется выражением [76]

$$\Lambda_{\text{ff}} = 1.4 \cdot 10^{-27} T^{0.5} n_e n_{\text{H}^+}. \quad (1.53)$$

Другим процессом подобного рода является охлаждение за счет рекомбинационного излучения (например, реакция фоторекомбинации водорода R7). Соответствующая функция охлаждения может быть описана выражением [77]

$$\Lambda_{\text{rec}} = 2.8 \cdot 10^{-26} T^{0.25} n_e n_{\text{H}^+}. \quad (1.54)$$

К основным механизмам охлаждения с участием нейтральных частиц можно отнести излучение в линиях, а также ионизацию электронным ударом. В первом случае в водородно-гелиевой атмосфере можно учитывать только атомы водорода. Для функции охлаждения можно написать выражение:

$$\Lambda_{\text{lin}} = n_e n_{\text{H}} L_e(\text{H}, T). \quad (1.55)$$

Функция $L_e(\text{H}, T)$ в табличном виде приведена в работе [78]. Если учитывать только излучение в линии $\text{Ly}\alpha$, то можно получить более простое выражение [79]

$$L_e(\text{H}, T) = 7.3 \cdot 10^{-19} e^{-118400/T}. \quad (1.56)$$

Охлаждение за счет ионизации электронным ударом описывает следующая функция

$$\Lambda_{\text{ion}} = n_e n_{\text{H}} \overline{\sigma v} E_{\text{ion}}, \quad (1.57)$$

где $E_{\text{ion}} = 13.6$ эВ — энергия ионизации атома водорода, v — скорость электрона, σ — сечение столкновения. Усреднение (черта сверху) осуществляется по функции распределения электронов по скоростям. Для усредненной величины $\overline{\sigma v}$ можно использовать аппроксимацию (уравнение (11.1) в монографии [77]), справедливую в широком диапазоне температур.

Еще одним важным механизмом охлаждения в водородно-гелиевых атмосферах горячих экзопланет-гигантов является излучение молекул H_3^+ . Оно

осуществляется в ИК диапазоне и поэтому такие фотоны не поглощаются в планетной оболочке. Обозначим через $L_{\text{rad}}(\text{H}_3^+, T)$ полную энергию, излучаемую одной молекулой H_3^+ в единицу времени (эрг/с). В результате для функции охлаждения можно написать

$$\Lambda_{\text{rad}} = n_{\text{H}_3^+} L_{\text{rad}}(\text{H}_3^+, T). \quad (1.58)$$

Удобные для численных расчетов аналитические аппроксимации функции $L_{\text{rad}}(\text{H}_3^+, T)$ для довольно широкого интервала температур можно найти в работе [80].

В движущейся среде полный тепловой баланс определяется не только функциями охлаждения, описанными выше. Как видно из уравнения энергии (1.13), для этого необходимо учесть адвекцию (второе слагаемое в левой части) и адиабатическое охлаждение (третье слагаемое в левой части). Поэтому для удобства анализа теплового баланса можно определить еще две функции охлаждения

$$\Lambda_{\text{advec}} = -\rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}, \quad (1.59)$$

$$\Lambda_{\text{adiab}} = -P \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v). \quad (1.60)$$

Эти величины могут принимать как положительные значения (охлаждение), так и отрицательные (нагрев).

Полная функция охлаждения в нашей численной модели определяется суммой всех частных функций

$$\Lambda = \Lambda_{\text{ff}} + \Lambda_{\text{rec}} + \Lambda_{\text{lin}} + \Lambda_{\text{ion}} + \Lambda_{\text{rad}} + \Lambda_{\text{advec}} + \Lambda_{\text{adiab}}. \quad (1.61)$$

1.3 Учет дополнительных эффектов

1.3.1 Приливная сила

В неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с двойной системой «звезда-планета» с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, поле потенциальных сил в точке

$\mathbf{r}$ описывается потенциалом Роша (см., например, [81])

$$\Phi = -\frac{GM_{\text{pl}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{pl}}|} - \frac{GM_{\text{st}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{st}}|} - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{c}})]^2, \quad (1.62)$$

где M_{st} — масса звезды, а векторы $\mathbf{r}_{\text{pl}}$, $\mathbf{r}_{\text{st}}$, $\mathbf{r}_{\text{c}}$ определяют положения центра планеты, центра звезды и центра масс соответственно. Абсолютная величина угловой скорости $\Omega = \sqrt{G(M_{\text{pl}} + M_{\text{st}})/A^3}$, где A — большая полуось орбиты планеты. Рассмотрим сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в центре планеты. Будем считать, что центр звезды располагается в точке с координатами $r = A$, $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$. Тогда выражение для потенциала Роша примет следующий вид:

$$\Phi = -\frac{GM_{\text{pl}}}{r} - \frac{GM_{\text{st}}}{\sqrt{r^2 + A^2 - 2A \sin \theta \cos \varphi}} - \frac{\Omega^2}{2} (r^2 \sin^2 \theta + r_{\text{c}}^2 - 2rr_{\text{c}} \sin \theta \cos \varphi). \quad (1.63)$$

Радиальная компонента удельной силы, действующей на элемент атмосферы, будет определяться радиальной компонентой градиента потенциала Роша

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{GM_{\text{pl}}}{r^2} + f_{\text{tidal}}. \quad (1.64)$$

При этом приливная сила оказывается равной

$$f_{\text{tidal}} = -\frac{GM_{\text{st}}(r - A \sin \theta \cos \varphi)}{(r^2 + A^2 - 2Ar \sin \theta \cos \varphi)^{3/2}} + \frac{G(M_{\text{pl}} + M_{\text{st}})}{A^3} \sin \theta \left(r \sin \theta - \frac{AM_{\text{st}}}{M_{\text{pl}} + M_{\text{st}}} \cos \varphi \right). \quad (1.65)$$

Для горячих юпитеров типичное значение отношения масс $M_{\text{pl}}/M_{\text{st}} \approx 10^{-3}$. Поэтому в последнем слагаемом правой части (1.65) можно пренебречь массой планеты по сравнению с массой звезды. Кроме того, в аэрономической модели величину r/A можно считать малой. Разлагая правую часть (1.65) в ряд по степеням r/A и ограничиваясь линейным членом, находим

$$f_{\text{tidal}} = \frac{GM_{\text{st}}}{A^3} r (3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \cos^2 \theta). \quad (1.66)$$

В приводимых ниже расчетах мы рассматривали структуру атмосферы в направлении на центр звезды (подзвездная точка). Такому направлению соответствуют углы $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$. Выражение для приливной силы в этом случае упрощается и принимает вид

$$f_{\text{tidal}} = \frac{3GM_{\text{st}}r}{A^3}. \quad (1.67)$$

В точках, расположенных с противоположной стороны планеты (ночная сторона), приливная сила определяется тем же выражением (1.67). На линии орбиты $\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$, $3\pi/2$ приливная сила оказывается равной нулю. Вдоль оси вращения планеты $f_{\text{tidal}} < 0$. В этом случае действие приливной силы будет приводить к замедлению планетного ветра.

Точность такого приближения можно оценить, сравнивая положения соответствующих внутренних точек Лагранжа L_1 . Для горячего юпитера HD 209458b точка L_1 расположена на расстоянии $r_1 = 0.058A$ от центра планеты. Из приближенной формулы (1.67) для приливной силы получаем

$$r_1 = A \left(\frac{1}{3} \frac{M_{\text{pl}}}{M_{\text{st}}} \right)^{1/3} = 0.056A, \quad (1.68)$$

что дает погрешность порядка 9%.

1.3.2 Диффузия

На этапе учета диффузии задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_\alpha w_\alpha). \quad (1.69)$$

Диффузионная скорость определяется следующим выражением (см., например, [113])

$$w_\alpha = D_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{n_\alpha}{n} + \left(1 - \frac{m_\alpha}{m} \right) \frac{\partial}{\partial r} \ln P + \alpha_{T,\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \ln T \right] + K_E \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{n_\alpha}{n}, \quad (1.70)$$

где D_α — коэффициент молекулярной диффузии, $\alpha_{T,\alpha}$ — коэффициент термодиффузии, K_E — коэффициент турбулентной (eddy) диффузии, n — полная концентрация газа, m_α — масса частицы сорта α , m — средняя молекулярная масса смеси. С учетом уравнения состояния $P = k_B n T$ удобно это соотношение переписать в виде

$$w_\alpha = \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial r} \ln n_\alpha + u_\alpha, \quad (1.71)$$

где

$$\eta_\alpha = D_\alpha + K_E, \quad (1.72)$$

$$u_\alpha = D_\alpha \left(1 - \frac{m_\alpha}{m} + \alpha_{T,\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial r} \ln T - \left(\frac{m_\alpha}{m} D_\alpha + K_E \right) \frac{\partial}{\partial r} \ln n. \quad (1.73)$$

Коэффициенты молекулярной диффузии определяются парными столкновения частиц. Если обозначить через $D_{\alpha\beta}$ соответствующий коэффициент для пары частиц сорта α и β , то полный коэффициент диффузии можно найти с помощью усреднения по смеси [114]

$$\frac{1}{D_\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{n_\beta}{D_{\alpha\beta}}. \quad (1.74)$$

Коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ определяются отдельными выражениями для каждого типа парных столкновений.

Для аппроксимации столкновений нейтралов с нейтралами в [114] на основе общего выражения (15.22) в предположении, что сталкиваются сферы, отличающиеся от жестких сфер, для парного коэффициента диффузии (в единицах $\text{см}^2 \text{с}^{-1}$) получено выражение вида

$$D_{\alpha\beta} = 1.96 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} \right)^{1/2} \frac{T^{1/2}}{n}. \quad (1.75)$$

Для аппроксимации коэффициентов диффузии для случая столкновений ионов с нейтралами в работе [115] приводится формула

$$D_{\alpha\beta} = 4.13 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\sqrt{\gamma_n Z_i^2}} \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} \right)^{1/2} \frac{T}{n}, \quad (1.76)$$

где Z_i — зарядовое число иона, а коэффициент γ_n описывает поляризуемость нейтрального атома или молекулы. Эта величина для различных нейтральных частиц изменяется незначительно и приблизительно равна 10^{-24} см^3 (см. табл. 4.1 в [116]). Для атома водорода, атома гелия и молекулы водорода значения этого коэффициента приведены в таблице 1. В случае столкновений ионов с ионами в работе [115] для коэффициентов диффузии предложено использовать выражение

$$D_{\alpha\beta} = 1.29 \cdot 10^{-3} \frac{1}{Z_\alpha^2 Z_\beta^2 \ln \Lambda_K} \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} \right)^{1/2} \frac{T^{5/2}}{n}, \quad (1.77)$$

где $\ln \Lambda_K$ — кулоновский логарифм,

$$\Lambda_K = 1.26 \cdot 10^4 \left(\frac{T^3}{n_e} \right)^{1/2}. \quad (1.78)$$

Компонент	$\gamma_n, 10^{-24} \text{ см}^3$	A_α	β_α
H	0.67	379	0.69
He	0.21	223	0.77
H ₂	0.82	299	0.69

Таблица 3 — Некоторые коэффициенты, используемые для описания процессов, связанных с нейтральными частицами. Параметр γ_n характеризует поляризуемость нейтральной частицы (см^3). Коэффициенты A_α и β_α определяют аппроксимацию (1.83) коэффициента теплопроводности λ ($\text{эрг см}^{-1} \text{ с}^{-1} \text{ К}^{-1}$) для нейтральных частиц.

Коэффициенты термодиффузии для нейтральных частиц были взяты равными $\alpha_T = -0.38$, а для частиц всех остальных сортов $\alpha_T = 0$ [114]. Значение коэффициента турбулентной диффузии в нашей модели верхней атмосферы горячего юпитера принималось равным постоянному значению $K_E = 10^8 \text{ см}^2/\text{с}$ [111].

1.3.3 Теплопроводность

Учет теплопроводности на отдельном этапе алгоритма сводится к решению уравнения для температуры

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (1.79)$$

где величина

$$c_V = \frac{k_B}{(\gamma - 1)\mu m_p} \quad (1.80)$$

представляет собой удельную теплоемкость идеального газа при постоянном объеме. На этапе решения задачи теплопроводности предполагается, что все величины, за исключением температуры T , не изменяются со временем.

Для ионной теплопроводности в модели используются следующие выражения [114]

$$\lambda_{\alpha'} = 7.37 \cdot 10^{-8} \sqrt{\frac{m_p}{m_{\alpha'}}} T^{5/2}, \quad (1.81)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{n_i} \sum_{\alpha'} n_{\alpha'} \lambda_{\alpha'}, \quad (1.82)$$

где n_i — концентрация ионов, а суммирование проводится по всем сортам ионов α' . Для теплопроводности, обусловленной нейтралами, используются выражения [111]

$$\lambda_{\alpha''} = A_{\alpha''} T^{\beta_{\alpha''}}, \quad (1.83)$$

$$\lambda_n = \frac{1}{n_n} \sum_{\alpha''} n_{\alpha''} \lambda_{\alpha''}, \quad (1.84)$$

где n_n — концентрация нейтралов, а суммирование проводится по всем сортам нейтральных частиц α'' . Значения аппроксимационных коэффициентов $A_{\alpha''}$ и $\beta_{\alpha''}$ приведены в табл. 3. Для электронной теплопроводности используется выражение [114]

$$\lambda_e = 1.2 \cdot 10^{-6} T^{5/2}. \quad (1.85)$$

Столкновения электронов с нейтралами не учитываются, поскольку такая поправка проявляет себя только при очень низких степенях ионизации. Полный коэффициент молекулярной теплопроводности определяется выражением

$$\lambda = \lambda_n + \lambda_i + \lambda_e. \quad (1.86)$$

На внешней границе $r = r_{\max}$ задавалось условие отсутствия теплового потока $\lambda \partial T / \partial r = 0$. На внутренней границе $r = r_{\min}$ необходимо учесть тепловой поток, идущий из недр планеты. Дело в том, что в приближении лучистой теплопроводности полный коэффициент $\lambda = \lambda_{\text{mol}} + \lambda_{\text{rad}}$, где λ_{mol} — коэффициент молекулярной теплопроводности (1.86), а

$$\lambda_{\text{rad}} = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \quad (1.87)$$

определяет лучистую теплопроводность. Здесь a — постоянная Стефана, c — скорость света, κ — удельный коэффициент поглощения, усредненный по Росселанду. Вблизи фотометрической поверхности удельную непрозрачность можно оценить на основе данных, приведенных в работах [120; 121]. В первой работе [120] усредненные значения непрозрачностей были вычислены для околозвездного пространства в диапазоне температур $10^{2.8}$ – 10^6 К и давлений 10^{-10} – 10^6 дин см $^{-2}$. В работе [121], в свою очередь, расчеты коэффициента непрозрачности

были произведены для более холодных сред — атмосфер ультрахолодных карликов и планет-гигантов. Диапазон температур в [121], таким образом, составил $10^{1.9}-10^{3.6}$ К. В этой работе авторы также расширили диапазон по давлению до $10^0-10^{8.5}$ дин см^{-2} по сравнению с более ранней работой [122]. Из [120] для солнечного химического состава путем двумерной интерполяции по давлению P и температуре T находим $\kappa = 7.3 \cdot 10^{-3}$ $\text{см}^2/\text{г}$. Значение удельной непрозрачности для параметров атмосферы получается равным $\kappa = 3.5 \cdot 10^{-4}$ $\text{см}^2/\text{г}$. С учетом этих значений в верхней атмосфере лучистой теплопроводностью можно пренебречь. Однако в области под фотометрической поверхностью этот процесс играет важную роль и, в частности, определяет наблюдаемую эффективную температуру $T_{\text{atm}} \approx 1000$ К горячего юпитера.

Предположим, что перенос тепла в верхней атмосфере осуществляется только за счет молекулярной теплопроводности, а под фотометрической поверхностью — только за счет лучистой теплопроводности. Поскольку мы решаем задачу в области верхней атмосферы, то в качестве внутреннего граничного условия необходимо использовать соотношение

$$-\lambda_{\text{mol}} \frac{\partial T}{\partial r} = q_{\text{rad}}, \quad (1.88)$$

где тепловой поток от планеты

$$q_{\text{rad}} = \frac{ac}{4} T_{\text{atm}}^4. \quad (1.89)$$

Однако в данной постановке задачи это условие неудобно тем, что приводит к слишком сильным градиентам температуры вблизи внутренней границы. Поэтому в модели вместо (1.88) используется более мягкое граничное условие, позволяющее сгладить градиент температуры. Введем фиктивный поглощающий слой, толщина Δr которого равна размеру самой внутренней ячейки расчетной сетки. При этом центр этого слоя совпадает с положением внутренней границы $r = r_{\text{min}}$. Тогда, пренебрегая в этом слое молекулярной теплопроводностью λ_{mol} , граничное условие в разностной схеме можно написать как

$$-\lambda_{\text{rad}} \frac{T_{1/2} - T_{-1/2}}{\Delta r} = q_{\text{rad}}, \quad (1.90)$$

где $T_{1/2}$ и $T_{-1/2}$ — значения температуры в соседних ячейках справа и слева от внутренней границы. На каждом шаге p итерационного процесса это условие принимает вид

$$T_{-1/2}^{(p+1)} - T_{1/2}^{(p+1)} = \frac{3}{16} \Delta \tau T_{\text{atm}}^4 \left(T_{1/2}^{(p)} \right)^{-3}, \quad (1.91)$$

где $\Delta\tau = \kappa r \Delta r$ — оптическая толщина поглощающего слоя. Для используемых нами параметров верхней атмосферы значения $\Delta\tau$ получаются порядка 10^{-3} – 10^{-2} . Однако с помощью фиктивного поглощающего слоя учитывается поток излучения из недр планеты, а не из верхней атмосферы. Поскольку плотность вещества под фотометрической поверхностью может быть существенно выше, то в расчетах бралось значение $\Delta\tau = 10$.

Эффект от использования граничного условия (1.91) проявляется лишь в моделях с достаточно высоким значением давления на внутренней границе. Если это давление низкое, вещество атмосферы полностью прогревается жестким излучением звезды. В этом случае тепловой поток от планеты не будет играть существенной роли. Если давление на внутренней границе достаточно высокое, то поток жесткого излучения от звезды будет поглощаться атмосферой. Поэтому в этом случае без учета теплового потока от планеты на фотометрической поверхности была бы получена температура ниже наблюдаемой эффективной температуры.

1.4 Численный метод

Для численного решения уравнений (1.11)–(1.14) в расчетной области $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ строится сетка узлы которой r_i , $i = 0, \dots, N$ в общем случае могут быть распределены неравномерно. Алгоритм решения состоит из нескольких последовательных этапов, которые возникают в результате применения метода расщепления по физическим процессам. Если известно распределение всех величин в расчетной области в момент времени t^n , то для получения значений в следующий момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ полная система уравнений разделяется (1.11)–(1.14) на подсистемы. Каждая подсистема решается затем на отдельном этапе. Средний молекулярный вес μ на любом этапе можно вычислить по известным значениям концентраций компонентов n_α с помощью формулы (1.16).

В начальный момент времени химический состав верхней атмосферы задавался постоянным. Во всех моделях параметр $[\text{He}/\text{H}]$, равный отношению числа ядер гелия к числу ядер водорода, считался равным 0.05, что приблизительно соответствует солнечному химическому составу. Предполагалось,

что в начальный момент времени верхняя атмосфера находится в состоянии гидростатического равновесия при заданном профиле температуры $T(r)$. На фотометрическом радиусе фиксировалось постоянное значение давления P_{atm} . При задании граничных условий для остальных величин использовались экстраполяции второго порядка по значениям во внутренних ячейках. На внешней границе использовались свободные граничные условия.

Уравнения многокомпонентной гидродинамики. Решается система многокомпонентной гидродинамики. В уравнениях (1.11)–(1.14) не учитываются источники, связанные с химическими процессами и нагревом-охлаждением. Для численного решения этих уравнений использовалась схема Роу-Эйнфельдта-Ошера, более подробно схема рассмотрена в разделе В.2 Приложения. Ее аналог, учитывающий наличие магнитного поля, описан в работе [69]. Разностная схема является монотонной и имеет повышенный порядок аппроксимации (первый порядок по времени и третий по пространству). Условие устойчивости (критерий Куранта-Фридрихса-Леви) обеспечивается ограничением на величину временного шага Δt .

Химические реакции. Проводится учет химических реакций. Данный процесс можно условно разделить на три этапа:

- Формирование сетки реакций, специфичной для рассматриваемого объекта.
- Генерация системы обыкновенных дифференциальных уравнений химической кинетики.
- Численное решение полученной системы при помощи программного пакета CVODE [93]. Пакет CVODE взят из открытых источников и предназначен для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Нагрев и охлаждение. В каждой расчетной ячейке решается уравнение теплового баланса

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \Gamma - \Lambda \quad (1.92)$$

и с учетом уравнения состояния (1.15) находятся новые значения температуры T . Для численного решения уравнения (1.92) использовалась неявная схема в комбинации с методом Ньютона.

Диффузия. Для численного решения уравнения диффузии (1.69) в модели использовалась неявная абсолютно устойчивая разностная схема [118]. Поскольку при этом получается система нелинейных алгебраических уравнений, то для реализации схемы организуется итерационный процесс. Расчет продолжается до сходимости итерационного процесса. Возникающие на каждом шаге итераций системы линейных алгебраических уравнений решаются методом скалярной прогонки. При этом используется потоковый вариант прогонки [119], который дает более точное решение в случае жестких задач диффузии.

Следует заметить, что диффузионное приближение остается справедливым, если скорость диффузии w_α не слишком высока. Однако во внешних частях гидростатической атмосферы модель, которая используется в начальных условиях, значения коэффициентов диффузии могут получиться очень большие. Поэтому в данной модели использовались ограничения скорости диффузии следующего вида

$$\left| \eta_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial r} \right| \leq n_\alpha w_{\max}, \quad |u_\alpha| \leq w_{\max}, \quad (1.93)$$

где $w_{\max}$ — параметр ограничителя. В расчетах $w_{\max}$ задавался равным 10% скорости звука. В качестве граничных условий использовались условия отсутствия диффузионного потока $n_\alpha w_\alpha$ на внутренней $r = r_{\min}$ и внешней $r = r_{\max}$ границах.

Теплопроводность. Также, как и для уравнения диффузии, для численного решения уравнения теплопроводности (1.79) используется неявная абсолютно устойчивая разностная схема [118]. Коэффициент теплопроводности λ зависит от температуры. Поэтому для реализации схемы организуется итерационный процесс, который выполняется до сходимости. На каждом шаге итераций система линейных алгебраических уравнений решается методом скалярной прогонки. При этом используется потоковый вариант прогонки [119], дающий более точное решение.

1.5 Заключение к Главе 1

В данной главе представлена одномерная аэрономическая модель водородно-гелиевых верхних атмосфер горячих экзопланет-гигантов, основанная на приближении одножидкостной многокомпонентной гидродинамики. В модели учитываются химические реакции, функции нагрева-охлаждения, приливная сила, диффузия и теплопроводность.

Для учета химии водородно-гелиевых верхних атмосфер была сформирована сетка, состоящая из 33 реакций, включая процессы фотоионизации и фотодиссоциации. Коэффициенты скоростей реакций взяты из открытых источников, а скорости фотопроцессов рассчитаны с учетом спектра излучения звезды.

Основным механизмом, приводящим к нагреву верхней атмосферы, является поглощение жесткого УФ излучения родительской звезды. При описании процесса охлаждения атмосферы учитываются следующие эффекты: столкновения электронов с ионами, столкновение электронов с нейтралами, излучение молекул H_3^+ , излучение в линиях атомов, адиабатическое охлаждение и охлаждение за счет адвекции. Также на процессы нагрева-охлаждения влияет теплопроводность.

Численная модель тестировалась на аналитическом решении, описывающем гидростатическое равновесие изотермической атмосферы с однородным химическим составом. В этом случае источники члены нагрева-охлаждения, химических реакций, приливной сила, диффузии и теплопроводности (уравнения (1.12) — (1.13)) не учитывались.

Основные результаты по данной главе опубликованы в работах автора [A1] и [A2].

1.6 Положения, выносимые на защиту по результатам первой главы

Разработана оригинальная одномерная аэрономическая модель водородно-гелиевых верхних атмосфер горячих экзопланет-гигантов, основанная на при-

ближении одножидкостной многокомпонентной гидродинамики в эйлеровых переменных. Модель наиболее полным образом учитывает все основные процессы, влияющие на структуру и динамику верхней атмосферы: химические реакции, процессы нагрева и охлаждения, приливная сила, диффузия и теплопроводность.

Глава 2. Структура верхней атмосферы экзопланет-гигантов, вращающихся вокруг солнцеподобных звезд

В данной главе диссертационной работы представлены результаты расчетов одномерной аэрономической модели верхних атмосфер экзопланет-гигантов: горячего юпитера и теплого нептона.

В качестве горячего юпитера была рассмотрена экзопланета HD 209458b, которая является типичным горячим юпитером. Эта планета имеет массу $M_{\text{pl}} = 0.69M_{\text{J}}$ и фотометрический радиус $R_{\text{pl}} = 1.38R_{\text{J}}$, где M_{J} и R_{J} — масса и радиус Юпитера соответственно. Родительская звезда относится к спектральному классу G0. Поэтому использование в модели параметров спектра Солнца для расчета скорости фотопроцессов является вполне оправданным. Большая полуось орбиты составляет величину $10.2R_{\odot}$ и соответствует периоду обращения вокруг звезды 84.6 часов.

При исследовании структуры верхней атмосферы теплого нептона была рассмотрена экзопланета GJ 3470b. Эта планета имеет массу $M_{\text{pl}} = 0.04M_{\text{J}}$ и фотометрический радиус $R_{\text{pl}} = 0.37R_{\text{J}}$. Родительская звезда относится к спектральному классу M1.5.

Также, в рамках данной главы, был проведен анализ влияния химического состава на структуру атмосферы горячего юпитера HD 209458b.

В качестве параметра модели задавалось значение давления на фотометрическом радиусе P_{atm} . Для удобства эту величину мы представляли в следующем виде: $P_{\text{atm}} = k_{\text{B}}n_{\text{atm}}T_{\text{atm}}$, где температура фиксировалась значением $T_{\text{atm}} = 1200$ К, а значение концентрации n_{atm} варьировалась. Расчеты проводились до тех пор, пока не удовлетворится критерий установления, который мы определяли по изменению значения скорости газа на внешней границе.

2.1 Структура верхней атмосферы горячего юпитера

В данном разделе представлены результаты расчетов структуры верхней атмосферы экзопланеты HD 209458b. Расчеты проводились для нескольких вариантов: $n_{\text{atm}} = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ (модель a1), $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (модель a2),

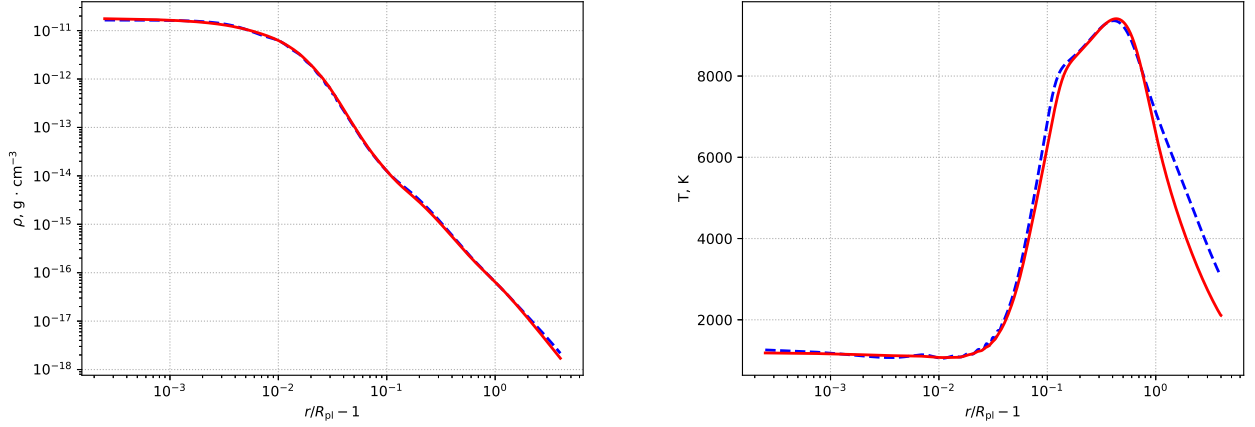


Рисунок 2.1 — Профили плотности (слева) и температуры (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для различных вариантов расчета (модели a1–a4).

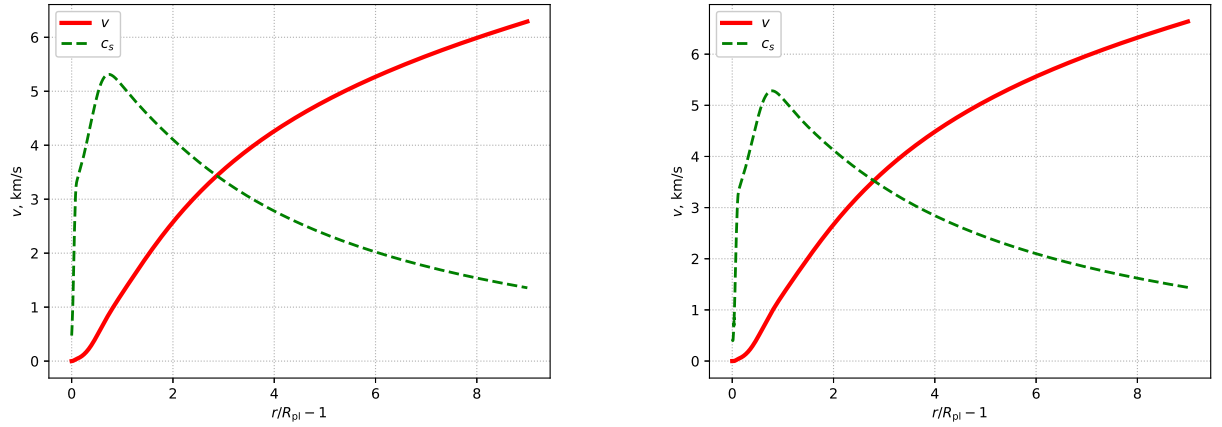


Рисунок 2.2 — Профили скорости газа v (сплошные линии) и скорости звука c_s (пунктирные линии) в верхней атмосфере горячего юпитера для модели a2 (слева) и a3 (справа).

$n_{\text{atm}} = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (модель a3) и $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (модель a4). Химический состав атмосферы, характеризующийся параметром χ (отношение числа ядер гелия к числу ядер водорода) во всех моделях принимался равным 0.05, что соответствует массовому содержанию водорода 0.83 и гелия 0.17.

На рис. 2.1 представлены профили плотности $\rho(r)$ (слева) и температуры $T(r)$ (справа). По оси абсцисс отложена высота (расстояние от фотометрического радиуса), выраженная в радиусах планеты R_{pl} . Такое представление абсциссы (особенно в логарифмическом масштабе) позволяет более детально исследовать структуру самых глубоких слоев атмосферы, расположенных непо-

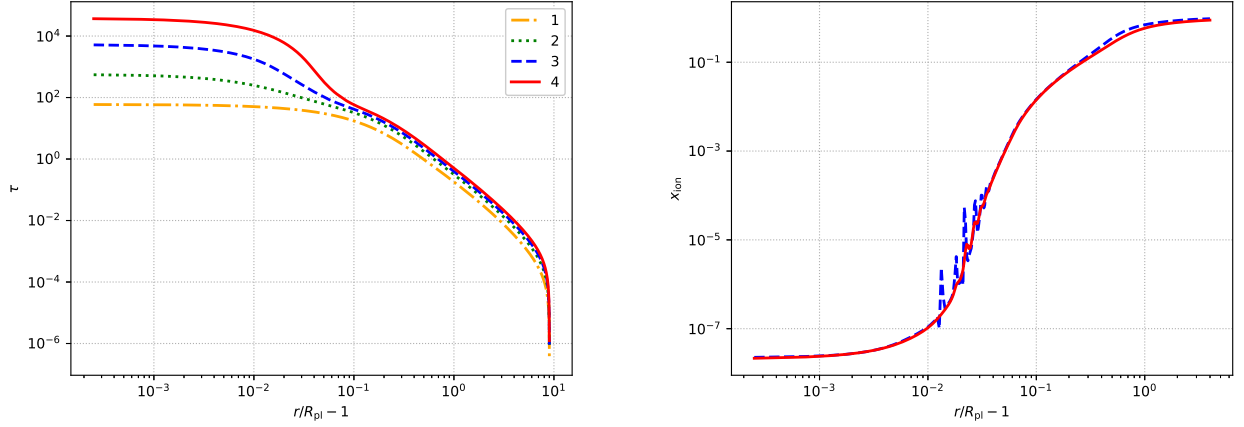


Рисунок 2.3 — Профили оптической толщины τ (слева) и степени ионизации x_{ion} (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для различных вариантов расчета.

средственно вблизи внутренней границы (фотометрический радиус). Наиболее глубокие слои атмосферы (толщина менее $0.05R_{\text{pl}}$) характеризуются высокой плотностью и относительно низкой температурой. Температура этих слоев оказывается порядка 1000 K. С увеличением радиуса r температура начинает резко возрастать из-за эффективного нагрева жестким излучением звезды и примерно на высоте $0.5R_{\text{pl}}$ достигает максимального значения около 9400 K (см. таблицу 4).

В этой области происходит формирование гидродинамического истечения атмосферы (планетный ветер), в котором плотность, давление и температура монотонно падают с увеличением расстояния, а скорость, наоборот, монотонно возрастает. За счет процессов фотохимии жесткое излучение родительской звезды поглощается веществом атмосферы и преобразуется в его кинетическую энергию. Формирующееся течение является трансзвуковым. На рис. 2.2 показаны профили скорости газа v (сплошные линии) и скорости звука $c_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$ (пунктирные линии) для двух моделей. Звуковая точка, в которой выполняется условие $v = c_s$ расположена на расстоянии примерно $r_s = 4R_{\text{pl}}$ от центра планеты. Более точные значения r_s приведены в таблице 4. До этой точки течения является дозвуковым, а после нее — сверхзвуковым. Характерные скорости на внешней границе ($r = 10R_{\text{pl}}$) оказывались порядка 6 – 7 км/с.

Скорости фотопроцессов в верхней атмосфере горячего юпитера определяются оптической толщиной τ (уравнение (1.47)), которая, в свою очередь,

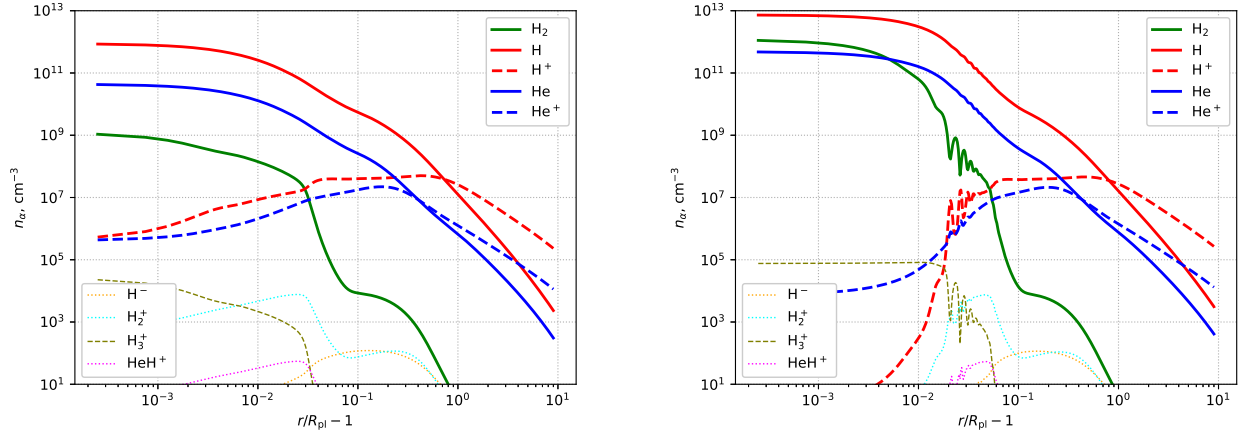


Рисунок 2.4 — Профили концентраций компонентов n_α в верхней атмосфере горячего юпитера для модели а2 (слева) и а3 (справа).

определяется распределением нейтралов. Профили оптической толщины для различных моделей представлены на левой панели рис. 2.3. Значение $\tau = 1$ достигается примерно на высоте $0.6R_{\text{pl}}$. У фотометрической поверхности оптическая толщина оказывается величиной порядка 10^2 – 10^4 . Профили степени ионизации x_{ion} (отношение плотности ионов к полной плотности) показаны на правой панели рис. 2.3. В самых глубоких слоях атмосферы степень ионизации близка к нулю, поскольку жесткое ионизирующее излучение родительской звезды сюда проникает слабо и вещество состоит в основном из нейтралов (атомы H и молекулы H_2 водорода, атомы гелия He). Внешние слои атмосферы оказываются почти полностью ионизованными. Граница между этими областями лежит приблизительно на высоте $0.05R_{\text{pl}}$.

На рис. 2.4 показаны высотные профили концентраций компонентов n_α для модели а2 (слева) и а3 (справа). С ростом параметра n_{atm} , определяющего давление на фотометрическом радиусе P_{atm} увеличивается скорость формирования молекулярного водорода в глубоких слоях атмосферы (трехчастичная реакция R5 из табл. 1). Во внешних частях атмосферы концентрация H_2 остается низкой. Самые внешние слои атмосферы горячего юпитера состоят из водородно-гелиевой плазмы. В переходной зоне вещество представляет собой нейтральную смесь атомов водорода и гелия. Концентрации остальных фракций остаются относительно низкими, не превышая значение 10^5 см^{-3} . Из них наибольшую роль играют молекулы H_3^+ , поскольку они определяют тепловой баланс внутренних слоев атмосферы. Колебания значений концентрации

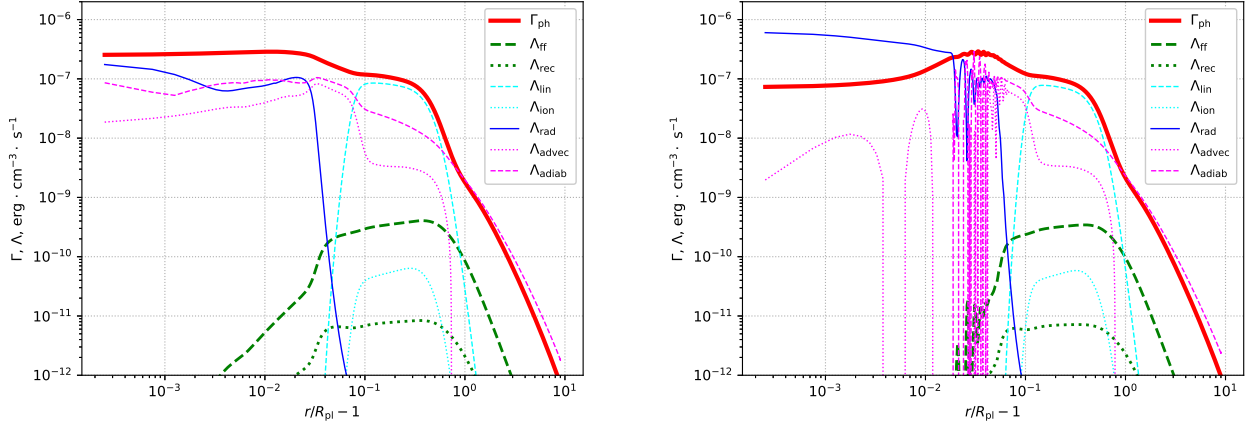


Рисунок 2.5 — Профили функций нагрева Γ и охлаждения Λ в верхней атмосфере горячего юпитера для модели a2 (слева) и a3 (справа).

некоторых компонент, которые можно заметить на правой панели рис. 2.4, обусловлены развитием неустойчивости. Этот эффект будет рассмотрен отдельно.

Профили функций нагрева Γ (сплошная жирная линия), а также частных функций охлаждения для двух моделей (a2 и a3) показаны на рис. 2.5. Заметим, что эти величины, вообще говоря, могут принимать как положительные значения (охлаждение), так и отрицательные (нагрев). Анализ рисунка 2.5 позволяет заключить, что гидродинамическое истечение оказывает значительное влияние на установление теплового баланса во всей верхней атмосфере горячего юпитера. Во внутренних слоях важную роль играет охлаждение за счет излучения молекул H_3^+ . В промежуточной зоне среди всех механизмов охлаждения доминируют процессы, обусловленные излучением в линиях (главным образом в линии $\text{Ly}\alpha$). В самых внешних частях тепловой баланс определяется адиабатическим охлаждением, связанным со свойствами установившегося планетного ветра. Таким образом, можно сказать, что в каждой зоне атмосферы доминирует свой механизм охлаждения.

В таблице 4 приведены некоторые характеристики полученных численных решений, описывающих структуру верхней атмосферы горячего юпитера (модели a1–a4). Представлены следующие значения: максимальная температура T_{max} , положение звуковой точки r_s , а также темп потери массы $\dot{M}_{\text{pl}} = 4\pi r^2 \rho v$. При переходе от модели a1 к a4 (рост давления P_{atm} на фотометрическом радиусе) максимальная температура незначительно возрастает, а положение звуковой

Модель	$T_{\max}$, К	r_s/R_{pl}	$\dot{M}_{\text{pl}}$, г/с
a1	9300	4.37	$2.1 \cdot 10^{10}$
a2	9390	3.91	$3.5 \cdot 10^{10}$
a3	9430	3.85	$4.5 \cdot 10^{10}$
a4	9460	3.72	$4.9 \cdot 10^{10}$
b1	3020	3.67	$2.2 \cdot 10^9$
b2	2830	3.72	$3.0 \cdot 10^9$
b3	2680	3.78	$3.8 \cdot 10^9$
b4	2530	3.83	$5.1 \cdot 10^9$

Таблица 4 — Характеристики полученных численных решений для горячего юпитера (модели a1–a4) и теплого нептона (модели b1–b4): $T_{\max}$ — максимальная температура, r_s — положение звуковой точки, $\dot{M}_{\text{pl}}$ — темп потери массы.

точки смещается немного ближе к центру планеты. Темп потери массы увеличивается примерно в два раза, оставаясь величиной порядка $3.5 \cdot 10^{10}$ г/с.

2.2 Структура верхней атмосферы теплого нептона

В данном разделе представлены результаты расчетов верхней атмосферы типичного теплого нептона, параметры которого соответствуют GJ 3470b. Родительская звезда данной планеты относится к спектральному классу M1.5, спектр которой должен сильно отличаться от солнечного. Поэтому в рамках данной численной модели была рассмотрена аналогичная планета, в окрестности которой солнечный поток фотонов f_λ в 10 раз меньше по сравнению с величиной, использованной выше для горячего юпитера. Это соответствует большой полуоси орбиты теплого нептона примерно равной 0.15 а.е. Параметры α и β в формулах (1.48) для k_{ph} и (1.51) для Q_{ph} остаются при этом прежними, но величины k_0 и Q_0 уменьшаются в 10 раз по сравнению с теми значениями, которые были использованы в расчетах для горячего юпитера.

Расчеты, как и в случае горячего юпитера, проводились до сходимости к стационарному состоянию, условие которого определялось по изменению скорости газа на внешней границе. Параметр χ , характеризующий химический состав

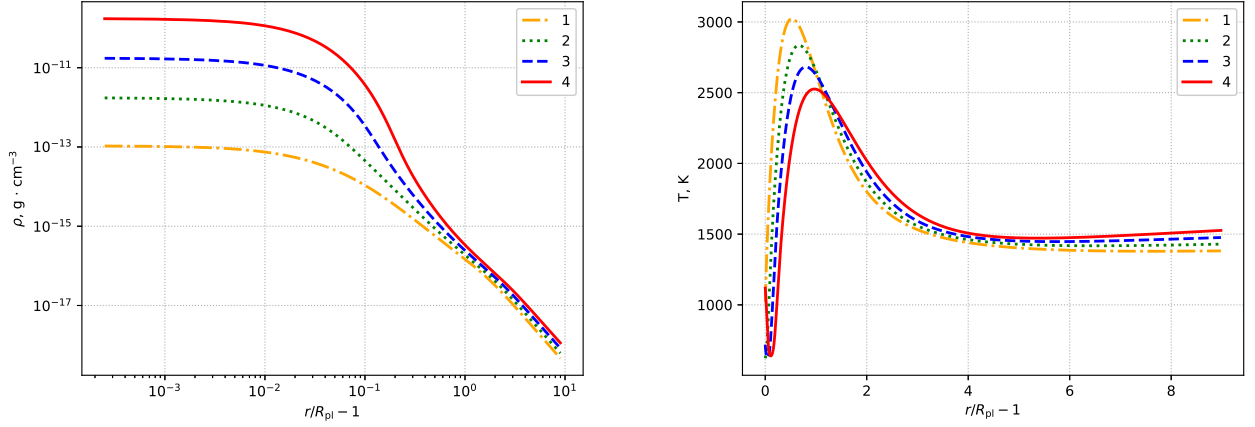


Рисунок 2.6 — Профили плотности (слева) и температуры (справа) в верхней атмосфере теплого нептуна для различных вариантов расчета (модели b1–b4).

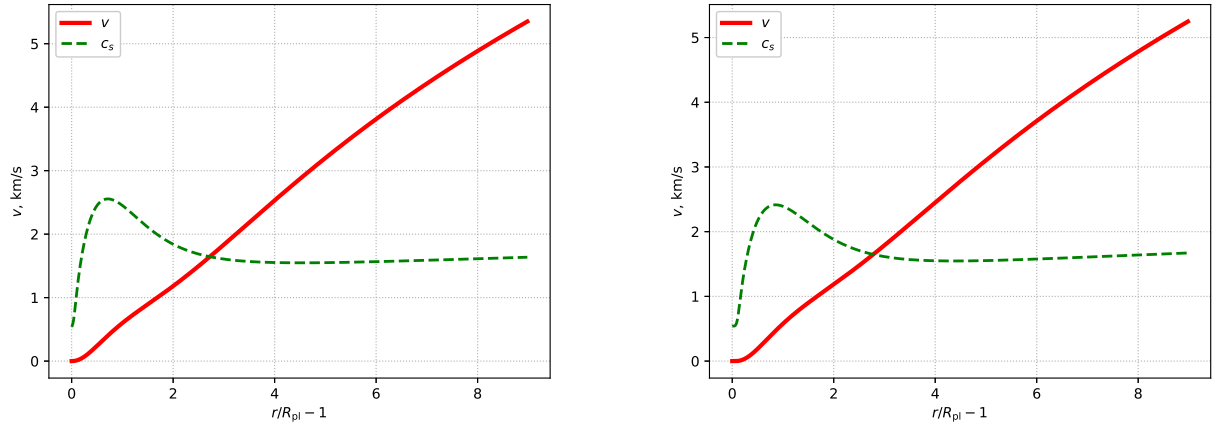


Рисунок 2.7 — Профили скорости газа v (сплошные линии) и скорости звука c_s (пунктирные линии) в верхней атмосфере теплого нептуна для модели b2 (слева) и b3 (справа).

водородно-гелиевой атмосферы, во всех вариантах расчета принимался равным 0.05. Параметром модели служило значение давления на фотометрическом радиусе $P_{\text{atm}} = k_B n_{\text{atm}} T_{\text{atm}}$, где температура задавалась равной $T_{\text{atm}} = 650$ K. Значение концентрации варьировалось: $n_{\text{atm}} = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ (модель b1), $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (модель b2), $n_{\text{atm}} = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (модель b3) и $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (модель b4).

Результаты расчетов структуры верхней атмосферы теплого нептуна демонстрируют рис. 2.6–2.9. Профили плотности (левая панель рис. 2.6) и температуры (правая панель рис. 2.6) качественно повторяют аналогичные профили

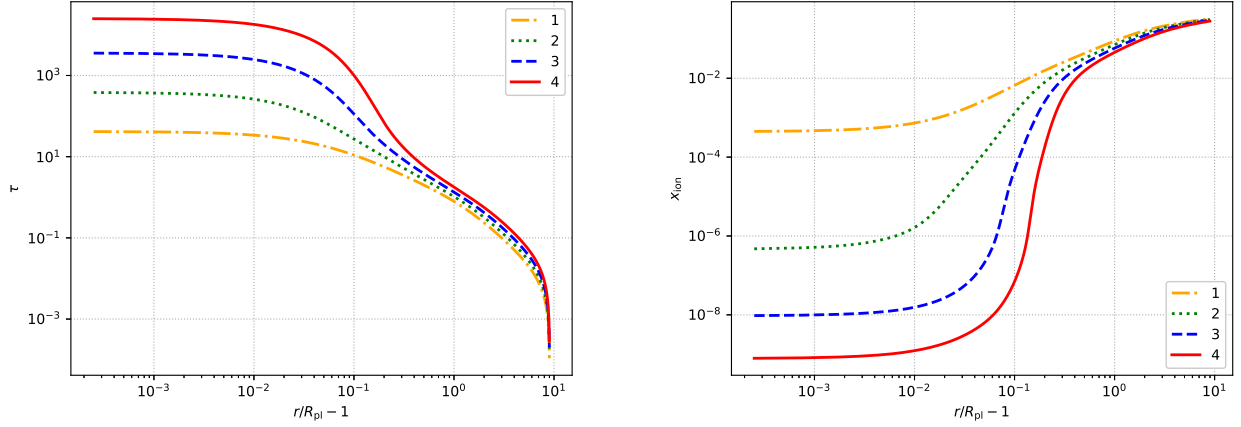


Рисунок 2.8 — Профили оптической толщины τ (слева) и степени ионизации x_{ion} (справа) в верхней атмосфере теплого нептона для различных вариантов расчета.

для горячего юпитера (см. рис. 2.1). В наиболее глубоких слоях атмосферы (толщина менее $0.1R_{\text{pl}}$) снова формируется область с высокой плотностью и низкой температурой. Над этой зоной температура увеличивается, достигает максимума (2500–3000 K) на высоте примерно в один радиус планеты, а затем снова падает до значений около 1500 K. Формирующийся планетный ветер, как и в случае горячего юпитера, является трансзвуковым (см. рис. 2.7). Переход от дозвукового режима к сверхзвуковому осуществляется приблизительно на расстоянии $r_s = 4R_{\text{pl}}$ от центра планеты (см. табл. 4). Характерные скорости на внешней границе ($r = 10R_{\text{pl}}$) составляют значения примерно 5.2 км/с.

Профили оптической толщины для моделей верхней атмосферы теплого нептона представлены на левой панели рис. 2.8. Вблизи фотометрической поверхности оптическая толщина оказывается почти такой же, как у горячего юпитера (см. левую панель рис. 2.3). Однако на больших высотах значения оптической толщины превышают соответствующие значения для горячего юпитера. В частности, значение $\tau = 1$ достигается примерно на высоте $1.0R_{\text{pl}}$. Это приводит к тому, что в отличие от горячего юпитера (см. правую панель рис. 2.3), степень ионизации x_{ion} в атмосфере теплого нептона в целом оказывается ниже (см. правую панель рис. 2.8). Если внешние слои атмосферы горячего юпитера были почти полностью ионизованными, то атмосфера теплого нептона большей частью состоит из нейтрального газа. Степень ионизации внешних слоев не превышает 0.3.

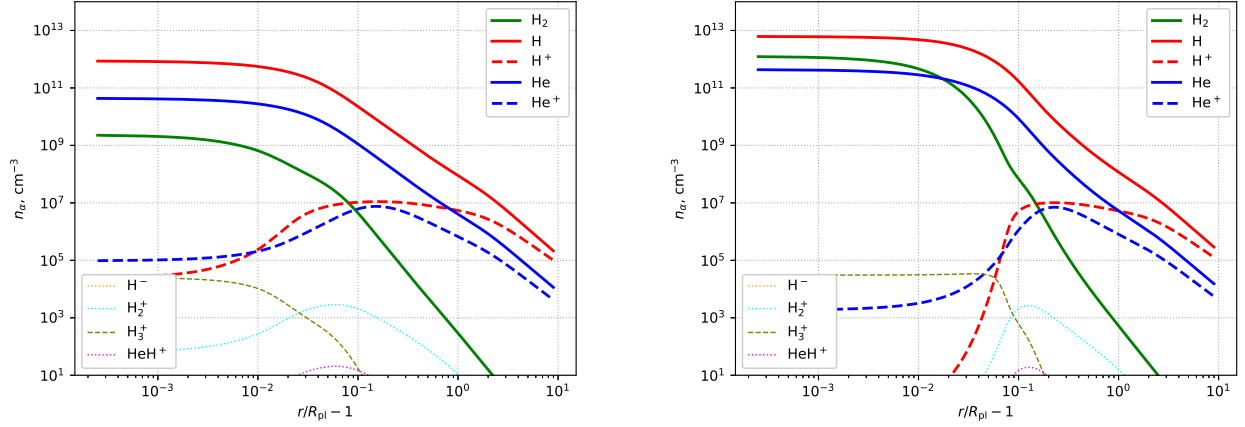


Рисунок 2.9 — Профили концентраций компонентов n_α в верхней атмосфере теплого нептона для модели b2 (слева) и b3 (справа).

Профили концентраций компонентов n_α для моделей b2 (слева) и b3 (справа) показаны на рис. 2.9. Содержание молекулярного водорода увеличивается с ростом параметра n_{atm} . В модели b4 в наиболее глубоких слоях атмосферы этот компонент становится доминирующим. Внешние слои атмосферы горячего юпитера состоят из слабоионизованной водородно-гелиевой плазмы. Концентрации ионов нигде не превышают концентрации соответствующих нейтралов. Таким образом, основным отличием атмосферы теплого нептона от атмосферы горячего юпитера является ее относительно слабая ионизация.

Из-за этого полученные решения для горячего юпитера и теплого нептона ведут себя по-разному с ростом параметра n_{atm} . В самом деле, в случае горячего юпитера при переходе от модели a1 к модели a4 максимальное значение температуры T_{max} растет. В случае теплого нептона наблюдается обратная картина: при переходе от модели b1 к модели b4 значение T_{max} падает. При этом положение максимума температуры и в том и в другом случае смещается в сторону от центра планеты. В моделях горячего юпитера с увеличением параметра n_{atm} звуковая точка приближается к центру планеты, а в случае теплого нептона, наоборот, удаляется. Темп потери массы теплого нептона на порядок меньше соответствующей величины для горячего юпитера. Характерное значение составляет $3.7 \cdot 10^9$ г/с. При этом переход от модели b1 к модели b4 также, как и в случае горячего юпитера, приводит к увеличению темпа потери массы примерно в два раза.

2.3 Влияние химического состава на структуру атмосферы горячего юпитера

В данном разделе при расчете структуры верхней атмосферы горячего юпитера варьировался параметр $\chi = [\text{He}/\text{H}]$. Расчеты проводились для следующих моделей: $\chi = 0.01$ (модель $\chi 1$), $\chi = 0.05$ (модель $\chi 2$), $\chi = 0.125$ (модель $\chi 3$), $\chi = 0.25$ (модель $\chi 4$) и $\chi = 0.5$ (модель $\chi 5$).

2.3.1 Реакции фотоионизации

Реакции фотоионизации и фотодиссоциации влияют на распределение концентраций компонентов в атмосфере, а также на нагрев атмосферы [70]. Эти параметры зависят от коэффициентов скоростей реакций, которые определяются из соотношения (1.43). Параметр χ влияет на распределение профиля коэффициента скорости реакции, так как подинтегральное выражение уравнения (1.43) включает степень экспоненты $\tau(\lambda)$, которая зависит от χ . Оптическая толщина $\tau(\lambda)$ определяется соотношением (1.44).

Полное эффективное сечение $\bar{\sigma}(\lambda)$ зависит от параметра χ , а также сечений взаимодействия водорода $\sigma_{\text{H}}(\lambda)$ и гелия $\sigma_{\text{He}}(\lambda)$ (1.45). Сечение взаимодействия H_2 не учитывалось, поскольку эти молекулы образуются в самых глубоких слоях атмосферы, где процессы фотодиссоциации H_2 уже не протекают. Концентрациями других атомов H^- , H_2^+ , H_3^+ , HeH^+ также можно пренебречь при расчете $\bar{\sigma}(\lambda)$, так как они малы по сравнению с концентрациями водорода и гелия. На рис. 2.10 показан результат численного моделирования уравнения 1.43 для водорода H (слева) и гелия He (в центре). Расчеты проводились для моделей $\chi 1 - \chi 5$. На графиках видно, что профиль скорости реакции фотоионизации водорода H увеличивается с ростом χ , а гелия He , напротив, снижается.

Остановимся подробнее на том, с чем это связано. Подинтегральное выражение формулы (1.43) равномерно непрерывно по χ , следовательно, его можно продифференцировать по χ . Предположим, что справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial k_{\text{ph, H}}(\tau, \chi)}{\partial \chi} > 0, \frac{\partial k_{\text{ph, He}}(\tau, \chi)}{\partial \chi} < 0. \quad (2.1)$$

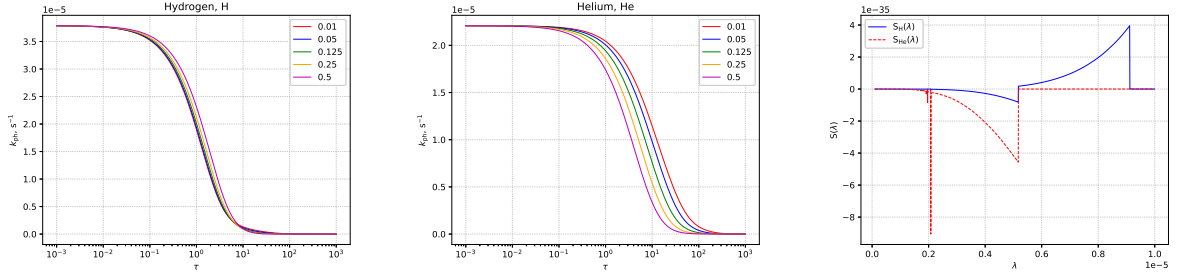


Рисунок 2.10 — Константы скорости реакций фотоионизации k_{ph} водорода H (слева), гелия He (в центре) для моделей $\chi 1 - \chi 5$ и выражения $S_i(\lambda)$ (справа)

В результате дифференцирования получим следующие выражения

$$\frac{\partial k_{\text{ph}, i}(\tau, \chi)}{\partial \chi} = \frac{\tau}{(1 + \chi)^2 \sigma_{\text{XUV}}} \int_0^{\lambda_0} [\sigma_{\text{H}}(\lambda) - \sigma_{\text{He}}(\lambda)] \sigma_i(\lambda) f_{\lambda} e^{-\tau(\lambda, \chi)} d\lambda, \quad i = \text{H}, \text{He}. \quad (2.2)$$

Из уравнений (2.2) видно, что знак интеграла определяется выражением

$$S_i(\lambda) = [\sigma_{\text{H}}(\lambda) - \sigma_{\text{He}}(\lambda)] \sigma_i(\lambda), \quad i = \text{H}, \text{He}. \quad (2.3)$$

На рис. 2.10 справа, построены выражения $S_{\text{H}}(\lambda)$ и $S_{\text{He}}(\lambda)$. Из вида графика ясно, что для гелия производная $k_{\text{ph}, \text{He}}$ по χ будет отрицательной, а производная для водорода $k_{\text{ph}, \text{H}}$ положительной. Различие в знаке связано с тем, что порог ионизации гелия значительно выше, чем у водорода. Следовательно, для всех $\lambda > \lambda_0(\text{He})$ сечение взаимодействия $\sigma_{\text{He}}(\lambda) = 0$, что и видно на графике. Аналогичные рассуждения характерны и для полной энергии поглощенного излучения, которая была определена в предыдущей главе — формула (1.50).

Здесь, по аналогии с коэффициентом скорости реакции, зависимость от χ определяется только степенью экспоненты — оптической толщиной $\tau(\lambda)$. Однако, как видно на рис. 2.11, увеличение Q_{ph} с ростом χ характерно лишь на небольшом участке $0.01 \leq \tau \leq 0.95$. Это связано с тем, что подинтегральное выражение Q_{ph} зависит от $h\nu$, что несколько меняет поведение графиков. Однако, при проведении расчетов верхних атмосфер горячих юпитеров нас будет интересовать область $0.01 \leq \tau \leq 0.95$, поскольку именно при этих значениях τ протекают процессы фотоионизации и фотодиссоциации, а также нагрев атмосферы.

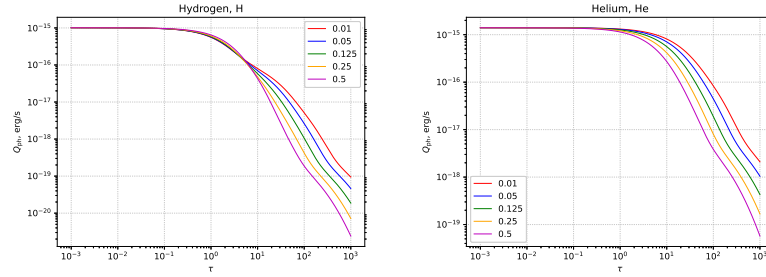


Рисунок 2.11 — Полная энергия поглощенного излучения Q_{ph} водорода H (слева) и гелия He (справа) для моделей $\chi 1 - \chi 5$

2.3.2 Расчеты параметров атмосферы

На рис. 2.12 (слева) построены профили скоростей убегания газа в верхней атмосфере горячего юпитера для моделей $\chi 1 - \chi 5$. Скорость убегания вещества падает с ростом χ . С ростом χ газ слабее нагревается в связи с тем, что снижается коэффициент скорости реакции ионизации гелия (рис. 2.10, справа) в то время как концентрация гелия увеличивается. С ростом содержания гелия средний молекулярный вес μ (рис. 2.12, справа) растет. В результате атмосфера становится более компактной.

Профили температуры $T(r)$ рис. 2.13 (слева) распределены следующим образом. В самых глубоких слоях атмосферы температура примерно постоянна и не превышает 2000K для всех моделей. С увеличением радиуса температура начинает резко возрастать, в связи с воздействием нагрева от жесткого ультрафиолетового излучения от звезды. При этом с ростом χ начало резкого увеличения T сдвигается в сторону фотометрического радиуса, так как с увеличением χ прогреваются более глубокие слои атмосферы. В области $0.1R_{pl} \leq r \leq R_{pl}$ температура во всех моделях достигает пика, после чего температура резко падает. В этой области формируется планетный ветер и начинается убегание вещества из атмосферы. Профили плотностей ρ для моделей $\chi 1 - \chi 5$ показаны на рис. 2.13 (справа). Наиболее глубокие слои атмосферы характеризуются высокой плотностью (толщина менее $0.05R_{pl}$), затем происходит монотонное снижение плотности. В силу того, что скорость убегания вещества с ростом χ снижается, падает и плотность.

На рис. 2.14 (слева) представлены профили степеней ионизации верхней атмосферы экзопланеты для моделей $\chi 1 - \chi 5$. На графиках видно, что с ро-

стом χ ионизация проникает в более глубокие слои атмосферы. Плотность газа падает с увеличением χ , а, следовательно, падает общая концентрация атомов во внешних слоях атмосферы. Кроме того, концентрация водорода Н, у которого энергия ионизации меньше, чем у He, уменьшается с ростом χ , а фотоны с этой энергией, ионизовав Н во внешних слоях атмосферы, получают доступ к более глубоким слоям. Темп потери массы (рис. 2.14, справа) нелинейно уменьшается с ростом χ . Это согласуется с результатами расчетов других авторов (см., например, [136]).

На рис. 2.15 показаны профили распределений концентраций компонентов для моделей $\chi 1$, $\chi 3$, $\chi 5$. Важно отметить, что исходя из условий моделей, с ростом χ увеличивается исходная концентрация гелия и уменьшается исходная концентрация Н. Во всех моделях в глубоких слоях атмосферы преобладает концентрация молекулярного водорода H_2 . Для модели $\chi 3$ концентрации водорода и гелия равны, а в модели $\chi 5$ все 3 нейтральные компоненты Н, H_2 , He доминируют во внутреннем слое атмосферы. Далее следует область, образованная в результате тепловой неустойчивости [86] в химически реагирующем газе [87] — облачный слой. Он формируется во всех моделях, но его ширина и интенсивность осцилляций варьируется. С увеличением χ облачный слой расширяется в сторону фотометрического радиуса. При этом внешняя граница облачного слоя незначительно сдвигается также в сторону фотометрического радиуса. Характерно, что с расширением облачного слоя частота осцилляций падает. Таким образом, плотные холодные образования (облака) увеличиваются в размерах с ростом χ . Отметим, что с ростом χ пространственные осцилляции ионизованного водорода H^+ наблюдаются в более глубоких слоях атмосферы.

Молекула H_2 практически не наблюдается в глубоких слоях атмосферы. При этом концентрации атомов и ионов Н и He перераспределяются в зависимости от модели. С ростом χ увеличивается концентрация ионизованного гелия He^+ , при этом концентрации атомарного водорода и гелия снижаются.

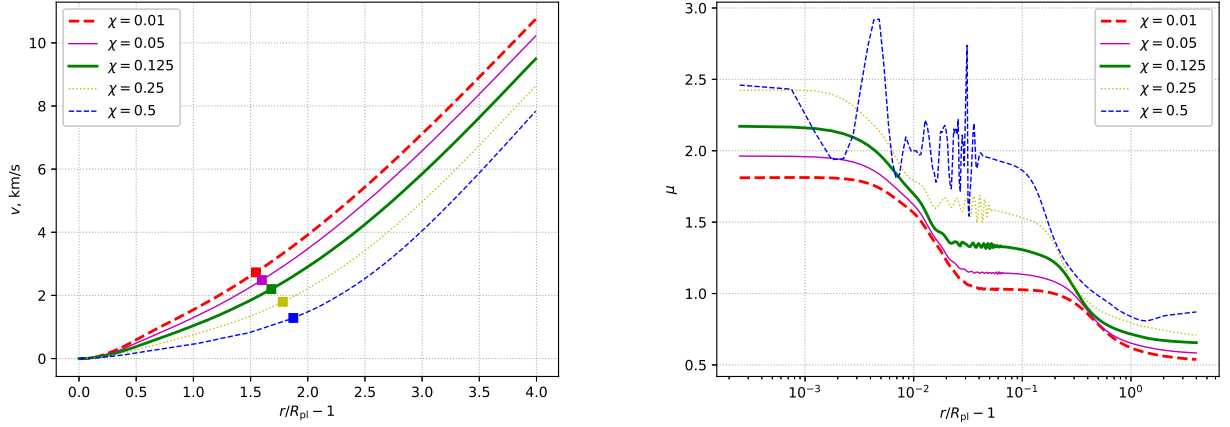


Рисунок 2.12 — Профили скоростей газа v (слева) и среднего молекулярного веса μ (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для различных вариантов расчета (модели $\chi 1$ – $\chi 5$).

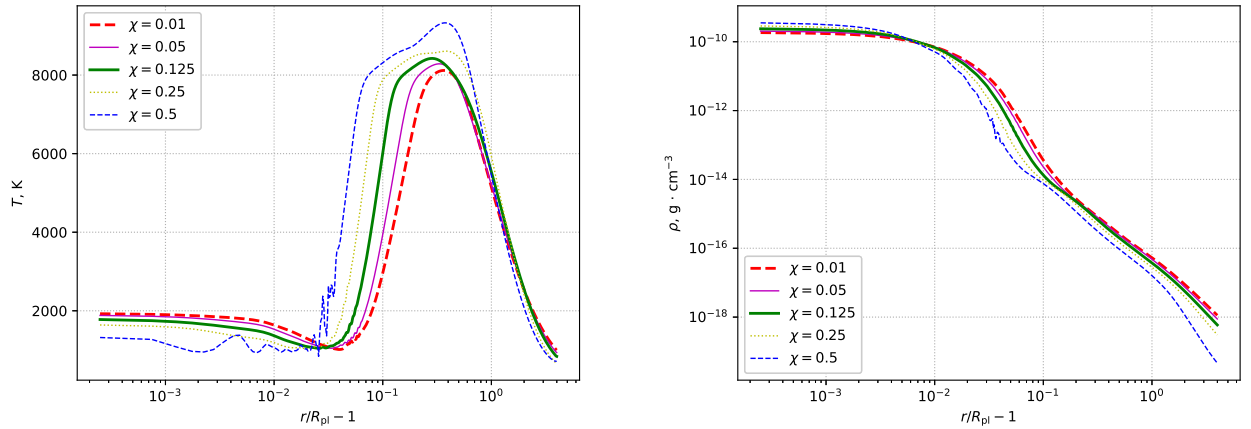


Рисунок 2.13 — Профили температуры T (слева) и плотности ρ (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для различных вариантов расчета (модели $\chi 1$ – $\chi 5$).

2.4 Обсуждение результатов расчетов

2.4.1 Эффективные показатели политропы

Верхнюю атмосферу горячей экзопланеты-гиганта можно условно разбить на две зоны. Вблизи фотометрической поверхности происходит преобразование

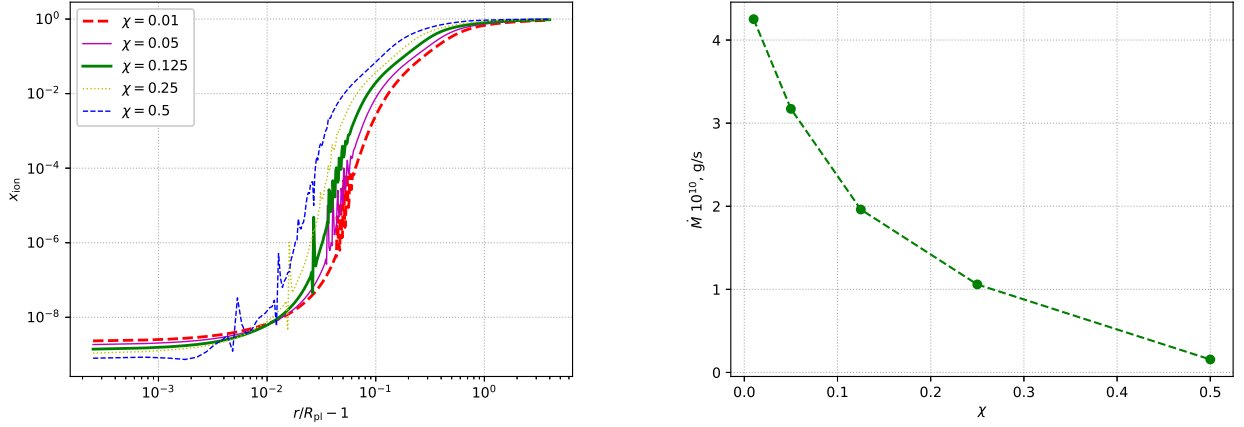


Рисунок 2.14 — Профили степени ионизации χ (слева) и темпа потери массы $\dot{M}$ (справа) для моделей $\chi 1 - \chi 5$

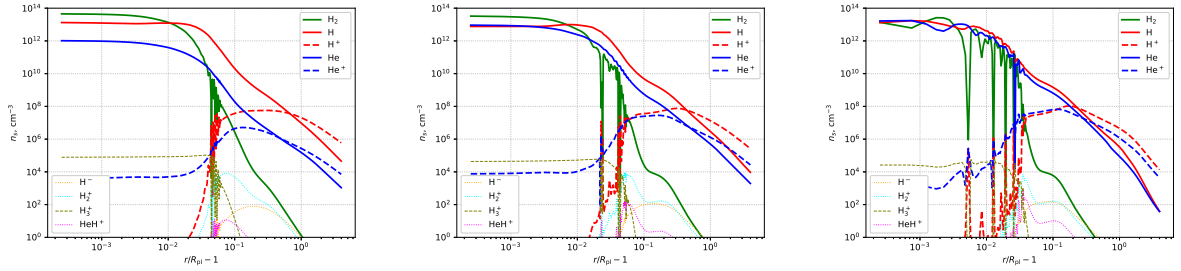


Рисунок 2.15 — Профили распределения концентраций компонентов n_s для моделей $\chi 1, \chi 3, \chi 5$

поглощенной энергии жесткого излучения в кинетическую энергию газа. Температура в этой зоне в целом растет с удалением от планеты, достигая в некоторой точке своего максимального значения. Во внешней зоне температура монотонно падает с высотой. Это область сформировавшегося планетного ветра.

Если ограничиться рассмотрением только внешней области верхней атмосферы, то для анализа ее структуры можно использовать гидродинамические решения, применяемые для описания солнечного ветра. В наиболее простом случае получаем изотермическую и политропную модели Паркера [58; 82]. В политропной модели предполагается, что давление и температура зависят от плотности как $P \propto \rho^\kappa$ и $T \propto \rho^{\kappa-1}$ соответственно, где κ — показатель политропы.

Данная модель планетного ветра является более сложной. Однако представляется интересным сравнить ее с приближением политропного ветра. Для этого введем два эффективных показателя политропы, вычисленных по давлению

нию и температуре

$$\kappa_P = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}, \quad \kappa_T = 1 + \frac{d \ln T}{d \ln \rho}. \quad (2.4)$$

Зная конкретные профили плотности $\rho(r)$, давления $P(r)$ и температуры $T(r)$, можно по этим формулам получить профили $\kappa_P(r)$ и $\kappa_T(r)$.

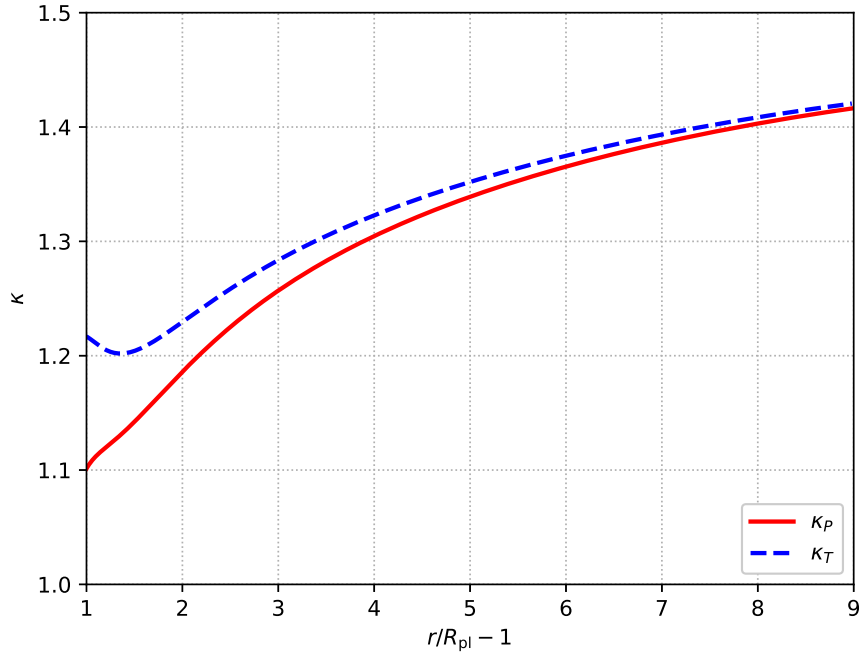


Рисунок 2.16 — Профили эффективных показателей политропы κ_P (сплошная линия) и κ_T (пунктирная линия) для модели a2 (горячий юпитер).

На рис. 2.16 представлены профили этих эффективных показателей для модели a2 верхней атмосферы горячего юпитера. На графике показана только область сформировавшегося планетного ветра, $r > 2R_{pl}$. На высоте порядка R_{pl} значения эффективных показателей политропы κ_P и κ_T достаточно сильно отличаются друг от друга. Однако с ростом высоты они сходятся к одной и той же величине. Во всей области планетного ветра эти показатели остаются меньше 1.5. Напомним, что в политропной модели необходимым условием существования решения с ускоряющимся (скорость растёт с увеличением радиуса) ветром является выполнение неравенства $\kappa < 3/2$. На малых высотах (порядка R_{pl}) показатели политропы близки к единице, что говорит о том, что решение лучше описывается изотермической моделью ветра. На больших высотах оба показателя стремятся к значению, чуть превышающему 1.4. Стоит отметить,

что аналогичным образом ведет себя и солнечный ветер. На малых расстояниях от Солнца ($r < 15R_{\odot}$) эффективный показатель политропы $\kappa = 1.1$ [83; 84], а на больших расстояниях $r > 25R_{\odot}$ его можно оценить величиной $\kappa = 1.46$ [85]. Эти значения хорошо соответствуют рассматриваемой модели планетного ветра в верхней атмосфере горячего юпитера.

2.4.2 Формирование облачного слоя

Как уже было отмечено в разделе 2.1 в модели а3 верхней атмосферы горячего юпитера на радиальных профилях концентраций компонентов n_{α} , а также и других величин наблюдаются осцилляции. Аналогичное явление присутствует и в модели а4. Это хорошо видно по поведению соответствующего профиля степени ионизации x_{ion} (см. правую панель рис. 2.3). В моделях а1 и а2 с более низкими значениями параметра n_{atm} осцилляций не наблюдается. Все полученные профили являются гладкими. В представленных моделях теплового нептона подобные явления также не наблюдаются.

С целью выявления возможной природы этих осцилляций были проведены дополнительные исследования. Было выполнено несколько расчетов моделей горячего юпитера а2 и а3 на различных сетках, в которых варьировалось число ячеек и степень сжатия к фотометрической поверхности. Однако картина получаемого решения при этом практически не изменялась. Кроме того, можно утверждать, что появление осцилляций не связано также и с влиянием граничных условий на фотометрическом радиусе. Это обусловлено тем обстоятельством, что они возникают довольно далеко (по количеству ячеек) от внутренней границы, а вблизи самой фотометрической поверхности решение остается гладким. Таким образом, можно сделать вывод, что эти осцилляции, скорее всего, имеют не численную, а физическую природу.

Неустойчивость проявляется не сразу, а возникает постепенно на фоне уже почти установившегося течения — планетного ветра. Амплитуда осцилляций растет со временем. Это объясняется тем, что в нашей модели не учитывается никаких процессов диссипации (вязкость, теплопроводность, диффузия компонентов). За все эти эффекты отвечает численная диффузия, свойства которой определяются разностной схемой и расчетной сеткой.

Модель является одномерной и соответствует сферически-симметричному приближению. В таком подходе отмеченная неустойчивость приводит к образованию сферических слоев. При переходе от одного слоя к следующему происходит резкое изменение концентраций компонентов n_α , а также значений некоторых других величин (в том числе плотности ρ и температуры T). Очевидно, что в трехмерном случае развитие неустойчивости должно приводить к формированию структур конечного объема — клампов или облаков. Таким образом речь идет о формировании некоего облачного слоя в верхней атмосфере горячего юпитера.

Как показывают наши расчеты, профиль давления $P(r)$ не испытывает осцилляций и остается гладким. Следовательно, облака находятся в равновесии по давлению с окружающим газом. Сами облака являются более плотными образованиями. Плотность в них превышает плотность окружающего газа. Соответственно температура облаков оказывается ниже температуры окружения. Таким образом, можно сказать, что облака — плотные и холодные образования, свободно плавающие в разреженном теплом газе. Характеристики облачного слоя изменяются при переходе от одной модели к другой. В модели a2 нижняя кромка облаков образуется на высоте $0.015R_{\text{pl}}$, а толщина облачного слоя равна $0.03R_{\text{pl}}$. В модели a4 облака появляются на высоте $0.03R_{\text{pl}}$, а толщина слоя $0.04R_{\text{pl}}$. Отсюда можно заключить, что высота облачного слоя и его толщина растут с увеличением давления на фотометрической поверхности.

Возможно, что отмеченное нами явление имеется в результатах [22], поскольку на приводимых в этой работе профилях концентраций компонентов вблизи фотометрической поверхности также наблюдаются осцилляции. В работе [23] учитывались диссипативные эффекты. Поэтому такая неустойчивость, даже если и появлялась, то оказывалась существенно сглаженной. В большинстве других работ, в которых проводилось аэрономическое моделирование горячих юпитеров, на приводимых рисунках использовались способы масштабирования радиальной координаты, не позволяющие надежно выделить данное явление.

Предварительный анализ обнаруженной особенности численного решения позволяет выдвинуть гипотезу, что ее возможная физическая причина может быть связана с тепловой неустойчивостью [86] в химически реагирующем газе [87]. Из-за появления данной неустойчивости в определенной области атмосферы построить строго стационарное решение, описывающее ее структуру,

оказывается не всегда возможным. Следовательно, в общем случае аэрономическая модель верхней атмосферы горячих экзопланет-гигантов является нестационарной. Кроме того, если облачный слой сместится к звуковой точке, то в решении будет уже не одна особая точка, а несколько. Дело в том, что скорость звука в области неустойчивости подвержена осцилляциям и в этом случае профиль $c_s(r)$ может пересекать профиль $v(r)$ несколько раз. Ясно, что метод построения стационарного решения для описания истекающей верхней атмосферы горячего юпитера, основанный на выделении критической интегральной кривой, проходящей через особую точку, сходиться уже не будет.

2.4.3 Анализ тепловой неустойчивости в верхних атмосферах горячих юпитеров

Рассматривается среда, в которой происходят химические реакции и процессы нагрева и охлаждения. При отсутствии учета химических процессов состояние теплового баланса среды описывается следующими уравнениями

$$P = A_{\text{gas}} \rho T, \quad (2.5)$$

$$L(\rho, T) = \Lambda(\rho, T) - \Gamma(\rho, T) = 0, \quad (2.6)$$

где уравнение (2.5) представляет собой уравнение состояния идеального газа, A_{gas} является газовой постоянной, Γ описывает функцию нагрева, Λ — функцию охлаждения, L — полную функцию охлаждения. При заданной плотности данные уравнения позволяют однозначно определить давление и температуру. Эти три параметра описывают состояние равновесия.

Для анализа устойчивости состояния рассматривается малое возмущение плотности $\delta\rho$. С учетом этих возмущений получаются уравнения

$$\delta P = A_{\text{gas}}(T\delta\rho + \rho\delta T), \quad (2.7)$$

$$\delta L = L_\rho\delta\rho + L_T\delta T = 0. \quad (2.8)$$

Из данных уравнений выводятся следующие соотношения

$$\frac{\delta P}{P} = \kappa_{\text{eff}} \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad \kappa_{\text{eff}} = \frac{L_T T - L_\rho \rho}{L_T T}, \quad (2.9)$$

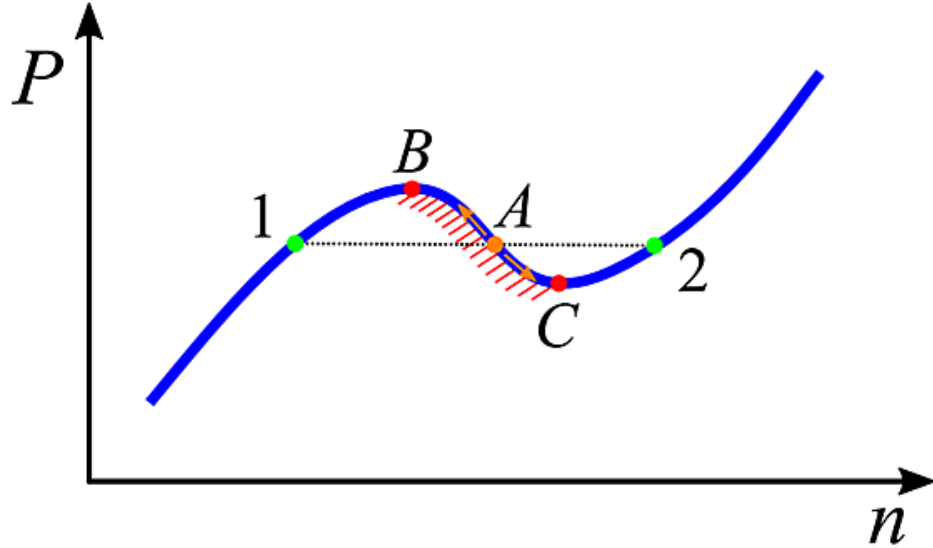


Рисунок 2.17 — Изобарическая мода тепловой неустойчивости в химически реагирующем газе

где κ_{eff} представляет собой эффективный показатель политропы.

Условия

$$L_T < 0, \quad L_T T - L_\rho \rho < 0 \quad (2.10)$$

характеризуют состояние неустойчивости, поскольку в данном случае увеличение плотности приводит к уменьшению давления.

На рис. 2.17 представлен график изобарической моды тепловой неустойчивости в химически реагирующем газе. Каждая точка кривой $P(n)$ соответствует определенному состоянию теплового и химического балансов. Участок BC, обозначенный штриховкой, соответствует области неустойчивости. В точке A любое возмущение концентрации n вызывает дальнейшее отклонение от этого состояния. В результате происходит разделение среды на две устойчивые фазы, находящиеся в равновесии по давлению. В новом устойчивом состоянии формируются плотные холодные клампы (фаза 2), распределенные в разреженной теплой среде (фаза 1).

Помимо теплового баланса, существует химический баланс, который определяется уравнениями.

$$X_\alpha = \frac{1}{\rho}(m_\alpha n_\alpha L_\alpha - m_\alpha K_\alpha), \quad (2.11)$$

$$P = k_B n T, \quad n = \sum_\alpha (1 + Z_\alpha) n_\alpha, \quad (2.12)$$

$$L(T, n_1, \dots, n_N) = 0, \quad X_\alpha(T, n_1, \dots, n_N) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

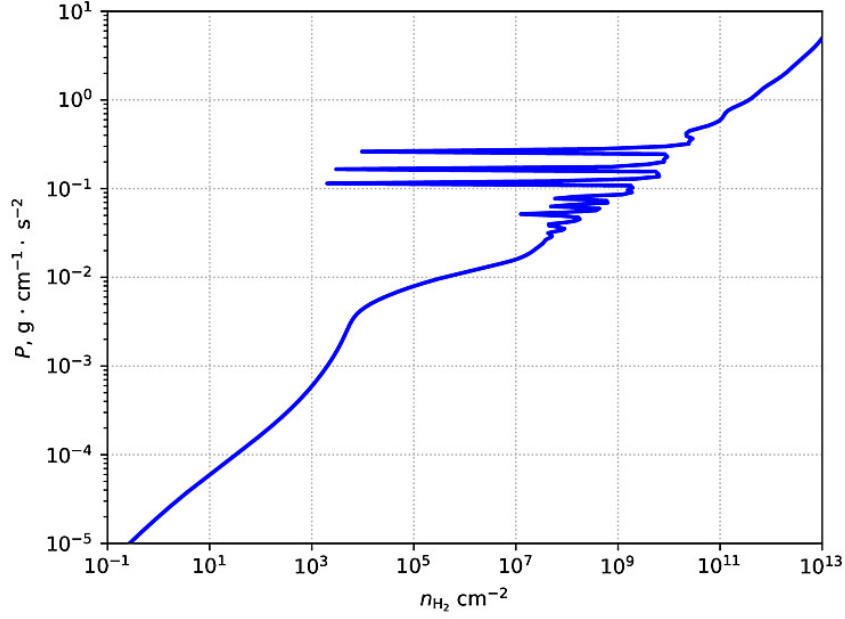


Рисунок 2.18 — График зависимости функций радиуса давления P от концентрации молекулярного водорода n_{H_2}

С учетом закона сохранения массы в химических реакциях одно из уравнений 2.13 $X_\alpha = 0$ может быть исключено. Это означает, что из этих уравнений возможно определить только $N - 1$ концентраций, при этом одна концентрация задается в качестве параметра. В качестве такого параметра принимается n_1 . Тогда из оставшихся уравнений выражаются T и n_α , $\alpha = 2, \dots, N$ через n_1 . Полная концентрация n и давление P также выражаются через n_1 .

Эффективный показатель политропы определяется как

$$\kappa_{\text{eff}} = \frac{d \ln P}{d \ln n_1}, \quad (2.14)$$

$$\kappa_{\text{eff}} = \frac{n_1}{n} \sum_{\alpha} \left(1 + Z_\alpha - \frac{n}{T} \frac{L_\alpha}{L_T}\right) A_\alpha, \quad \delta n_\alpha = A_\alpha \delta n_1. \quad (2.15)$$

В качестве параметра n_1 удобно выбрать концентрацию молекулярного водорода, поскольку данная величина демонстрирует значительные вариации в области неустойчивости. Для наглядности на рис. 2.18 представлен график зависимости давления от концентрации H_2 . Построение графика выполнено на основе профилей концентрации H_2 и давления P , зависящих от радиуса r и по ним построен $P(n_{\text{H}_2})$. График позволяет идентифицировать значения концентраций H_2 , при которых развивается тепловая неустойчивость.

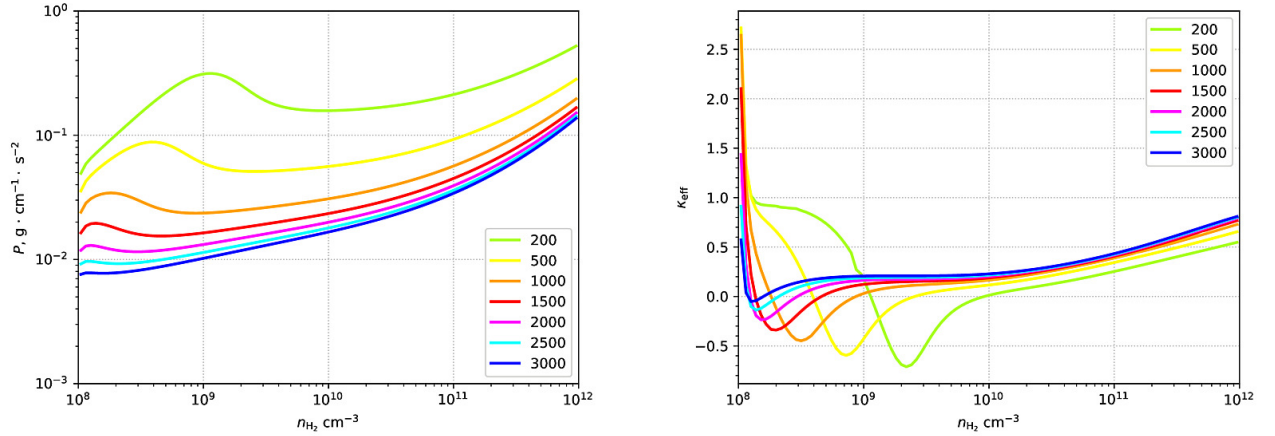


Рисунок 2.19 — Зависимость давления от концентрации молекулярного водорода в условиях верхней атмосферы горячего юпитера для различных значений оптической толщины τ (слева), зависимость эффективного показателя политропы от концентрации молекулярного водорода H_2 в условиях верхней атмосферы горячего юпитера для различных значений оптической толщины τ (справа).

На рис. 2.19 слева показана зависимость давления от концентрации молекулярного водорода H_2 для различных значений оптической толщины. Оптическая толщина τ варьируется в зависимости от глубины атмосферы, причем более высокие значения τ соответствуют более глубоким слоям. Как видно на графиках, область уменьшения давления с ростом концентрации H_2 изменяется в зависимости от оптической толщины τ .

Таким образом, для определения развития тепловой неустойчивости в конкретной области применяется следующий алгоритм. Сначала определяется значение оптической толщины, соответствующее данной области. Затем на рис. 2.19 находится соответствующая кривая и идентифицируются области неустойчивости, где давление уменьшается с ростом плотности. Далее определяются значения концентраций молекул водорода H_2 и проводится их сравнение с распределениями концентраций, полученными в численном расчете. Совпадение значений концентраций свидетельствует о наличии тепловой неустойчивости в химически реагирующем газе.

Например, в модели а3 раздела 2.1 рис. 2.3 область с оптической толщиной $\tau = 200$ расположена на расстоянии приблизительно $0.05R_{pl}$ от фотометрического радиуса. Согласно рис. 2.4 справа, концентрация молекулярного водорода H_2 в данной области составляет около $n_{\text{H}_2} = 10^9 \text{ cm}^{-3}$. Анализ рис. 2.19 слева показывает, что в данном диапазоне концентраций наблюдается уменьшение

давления с ростом плотности. Следовательно, наблюдаемая неустойчивость в верхней атмосфере горячего юпитера обусловлена тепловой неустойчивостью в химически реагирующем газе.

На рис. 2.19 справа представлена зависимость эффективного показателя политропы от концентрации молекулярного водорода в условиях верхней атмосферы горячего юпитера для различных значений оптической толщины τ . На данном рисунке области неустойчивости выражены более четко, что делает его более удобным инструментом для детектирования тепловой неустойчивости.

2.5 Заключение к Главе 2

Основной целью данной главы является анализ результатов численного моделирования рассмотренной в Главе 1 одномерной аэрономической модели. Расчеты проводились для типичного горячего юпитера HD 209458b, спектр родительской звезды которой, соответствует спектру спокойного Солнца.

Было проведено два блока расчетов. В первом блоке исследовалась структура верхней атмосферы. Анализ показал, что во внутренних слоях атмосферы формируется гидродинамический отток вещества, а внешние слои полностью ионизованы. В атмосферах горячих юпитеров был обнаружен новый тип облаков — плотные холодные образования, плавающие в разреженном теплом газе. Установлено, что данные облака формируются в результате тепловой неустойчивости в химически реагирующем газе. Кроме того, для сравнения, был проведен расчет для типичного теплого нептона GJ 3470b. В результате, было показано, что в отличие от горячего юпитера, атмосфера теплого нептона в основном состоит из нейтрального газа, а облачный слой не образуется.

Во втором блоке исследовалось влияние химического состава на структуру атмосферы горячего юпитера. По результатам расчетов, было установлено, что химический состав существенно влияет на ширину облачного слоя.

Основные результаты по данной главе опубликованы в работах автора [A1] и [A4].

2.6 Положения, выносимые на защиту по результатам второй главы

По результатам численных расчетов найдена зависимость интенсивности гидродинамического оттока атмосферы от внутренних граничных условий и начального химического состава. Исследована структура атмосферы горячих экзопланет-гигантов различных типов. Установлено, что внешние слои атмосферы горячего юпитера являются полностью ионизованными, в то время как атмосфера теплого нептона в основном состоит из нейтрального газа.

В атмосферах горячих экзопланет обнаружен новый тип облаков, которые представляют собой плотные холодные образования, свободно плавающие в разреженном теплом газе. В горячих юпитерах облачный слой формируется на высоте порядка 1000 км от фотометрической поверхности, а его толщина составляет около 2000 км. Показано, что механизмом формирования данного облачного слоя является тепловая неустойчивость в химически реагирующем газе.

Глава 3. Влияние приливной силы и потока излучения звезды на структуру верхней атмосферы горячего юпитера

В данной главе диссертационной работы исследуется структура верхней атмосферы горячего юпитера в зависимости от потока жесткого излучения родительской звезды, а также влияние воздействия звездной вспышки на атмосферу экзопланеты. Кроме того, проведен анализ влияния приливной силы от родительской звезды.

Все расчеты проводились для экзопланеты HD 209458b, параметры которой представлены в предыдущей главе. Моделирование проводилось в расчетной области $R_{\text{pl}} \leq r \leq 5R_{\text{pl}}$ в направлении на центр звезды (подзвездная точка). При этом внутренняя точка Лагранжа L_1 расположена на расстоянии $4.2R_{\text{pl}}$ от центра планеты. Во всех приводимых ниже расчетах параметр χ принимался равным 0.05.

3.1 Влияние приливной силы

Для исследования эффекта приливной силы были проведены два расчета, соответствующим значениям параметров $n_{\text{atm}} = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и спектру спокойного Солнца. В одном варианте приливная сила учитывалась, а в другом нет. Результаты расчетов представлены на рис. 3.1. На графиках показаны высотные профили плотности ρ , температуры T , скорости v и степени ионизации $x_{\text{ion}} = \rho_{\text{i}}/\rho$, где ρ_{i} — плотность ионов.

Наличие приливной силы приводит к дополнительному ускорению планетного ветра. Скорость ветра на внешней границе в модели без приливной силы оказывается равной 1/3 от скорости ветра в модели с приливной силой. В результате учет приливной силы приводит к меньшим значениям плотности и температуры (из-за адиабатического охлаждения) вблизи внешней границы. Профили степени ионизации оказываются практически одинаковыми. Небольшие вариации x_{ion} на высотах порядка $0.05R_{\text{pl}}$ обусловлены формированием облачного слоя.

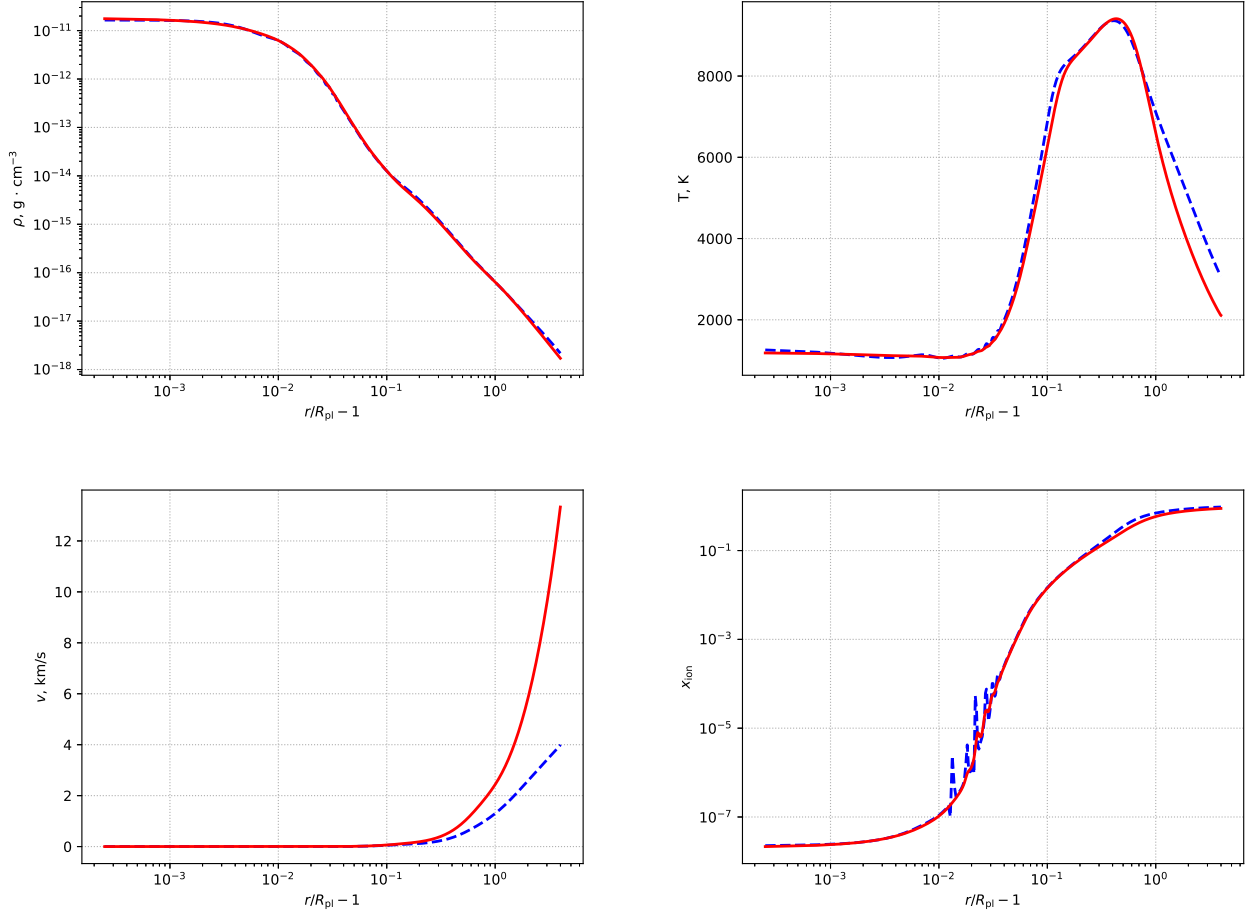


Рисунок 3.1 — Профили плотности (вверху слева), температуры (вверху справа), скорости (внизу слева) и степени ионизации (внизу справа) в верхней атмосфере горячего юпитера, полученные с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные линии) приливной силы.

Как уже говорилось в Главе 1 Раздел 1.3.1, приливная сила f_{tidal} обращается в нуль на линии орбиты планеты. Однако все эти точки лежат на терминаторе, на котором условия освещенности существенно отличаются от условий в подзвездной точке. Решение без приливной силы удобнее интерпретировать, как решение на дневной стороне, соответствующее значению азимутального угла $\varphi = 0$. В этом случае условие равенства нулю приливной силы (1.66) дает $\theta = \pi/3$ и $\theta = 2\pi/3$. Условия освещенности для этих двух направлений можно описать с помощью зенитного угла $\chi = \pi/6$. Поэтому оптическая толщина в этих двух направлениях приблизительно изменится на фактор $1/\cos \chi = 2/\sqrt{3}$, близкий к единице.

Полученные стационарные решения характеризуются постоянным значением параметра $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v$, определяющего темп потери массы планеты

вследствие планетного ветра. При учете приливной силы f_{tidal} решение, вообще говоря, не является строго сферически-симметричным. Рассматривается решение вдоль некоторого направления, которое определяется значением углов θ и ϕ . Поэтому параметр $\dot{M}$ не совпадает с точным значением темпа потери массы $\dot{M}_{\text{pl}}$ и может отличаться от него в несколько раз.

В представленных решениях были получены следующие значения параметра $\dot{M}$. В решении без учета приливной силы $\dot{M} = 2.98 \cdot 10^{10}$ г/с, а в решении с учетом приливной силы $\dot{M} = 7.32 \cdot 10^{10}$ г/с. Таким образом, учет приливной силы приводит к росту $\dot{M}$ в 2.5 раза. Эти параметры определяют минимальное и максимальное значения $\dot{M}$ на дневной стороне планеты. Планетный ветер вблизи терминатора и, тем более, на ночной стороне планеты по своим характеристикам должен сильно отличаться от ветра на дневной стороне в силу существенных отличий в условиях освещенности.

3.2 Влияние потока жесткого излучения звезды

В данном разделе представлены результаты расчетов для сетки моделей, в которых варьировались давление P_{atm} на фотометрической поверхности (соответствующие концентрации n_{atm} задавались равными 10^{12} см $^{-3}$, 10^{13} см $^{-3}$ и 10^{14} см $^{-3}$). Кроме того, варьировалась величина потока жесткого УФ излучения звезды. Обозначим соответствующий поток для современного спокойного Солнца через F_{XUV}^0 . В приведенных расчетах задавались значения потока жесткого излучения F_{XUV} , равные F_{XUV}^0 (модели 1X), $10F_{\text{XUV}}^0$ (модели 10X) и $100F_{\text{XUV}}^0$ (модели 100X). Таким образом, полная сетка моделей содержит 9 вариантов. В качестве исходной величины F_{XUV}^0 в модели использовалось не полное значение потока излучения, а его спектральная зависимость от длины волны для спокойного Солнца. Во всех вариантах расчета учитывалась приливная сила (1.67).

На рис. 3.2 показаны полученные высотные профили плотности (слева) и температуры (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для всех указанных моделей. В целом можно сказать, что увеличение потока жесткого излучения приводит к росту плотности и температуры в атмосфере планеты. В моделях $n_{\text{atm}} = 10^{12}$ см $^{-3}$ во внутренних частях атмосферы наблюдается некоторое понижение плотности (левая верхняя панель на рис. 3.2). Это обусловлено

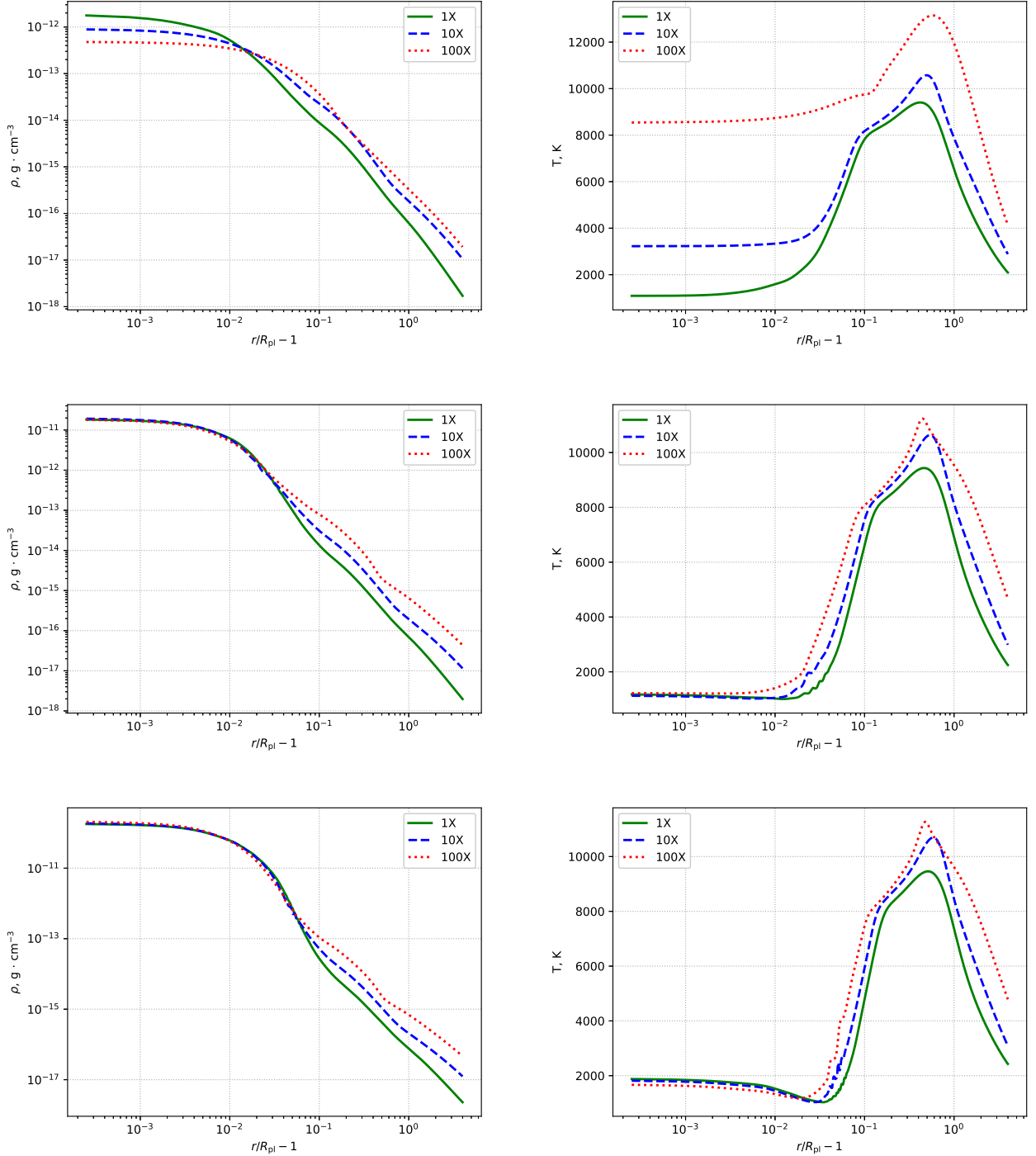


Рисунок 3.2 — Профили плотности (слева) и температуры (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для моделей $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (вверху), $n_{\text{atm}} = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (в центре) и $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (внизу).

тем, что при заданных в этой модели условиях данная область эффективно прогревается излучением звезды, что приводит к росту температуры (правая верхняя панель на рис. 3.2). В каждой нашей модели значение давления на фотометрической поверхности поддерживалось постоянным.

Профили температуры имеют стандартный для горячих юпитеров вид (см., например, [22; 26; 29; 59–64; 111; 112]). В самых глубоких слоях атмосферы температура оказывается близкой к эффективной температуре планеты $T_{\text{atm}} = 1200$ К. Исключение составляют модели с низким значением концентрации $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, в которых происходит существенный прогрев внутренних слоев. На высотах порядка $0.5R_{\text{pl}}$ температура достигает максимума. При этом чем выше поток жесткого излучения, тем больше максимальное значение температуры. В этой области происходит формирование планетного ветра. Во внешней зоне температура монотонно падает с высотой.

Формирующееся гидродинамическое истечение является трансзвуковым. На рис. 3.3 показаны высотные профили скорости газа v (жирные линии) и скорости звука $c_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$ (тонкие линии) для всех рассчитанных моделей. Как следует из рисунка, во внутренних частях атмосферы течение является дозвуковым, а во внешних частях становится сверхзвуковым. Увеличение потока жесткого УФ излучения родительской звезды приводит к росту скорости планетного ветра. Исключением являются модели $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ 10X и 100X (верхняя панель на рис. 3.3), в которых наблюдается насыщение скорости ветра. Звуковая точка, в которой происходит смена режима течения, с увеличением потока излучения приближается к фотометрической поверхности. Характерные скорости на внешней границе лежат в диапазоне от 12 до 25 км/с.

На левых панелях рис. 3.4 показаны высотные профили концентраций компонентов n_{α} для моделей $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ 1X, 10X и 100X. В самых глубоких слоях атмосферы доминирует молекулярный водород, хотя концентрации атомарного водорода и гелия также относительно высоки. В переходной зоне концентрация молекулярного водорода падает, а вещество атмосферы состоит в основном из нейтральной смеси атомов водорода и гелия. Во внешних частях атмосфера ионизуется излучением звезды и состоит из водородно-гелиевой плазмы. Концентрации остальных фракций остаются относительно низкими. Среди них важную роль играют молекулы H_3^+ , которые определяют тепловой баланс внутренних слоев атмосферы. В области формирования облачного слоя $1.03R_{\text{pl}} \leq r \leq 1.07R_{\text{pl}}$ появляются заметные колебания значений концентрации ряда компонент, обусловленные развитием тепловой неустойчивости [86] в химически реагирующем газе [87].

С увеличением потока жесткого УФ излучения звезды структура внутренней части атмосферы изменяется слабо. Однако внешние слои атмосферы

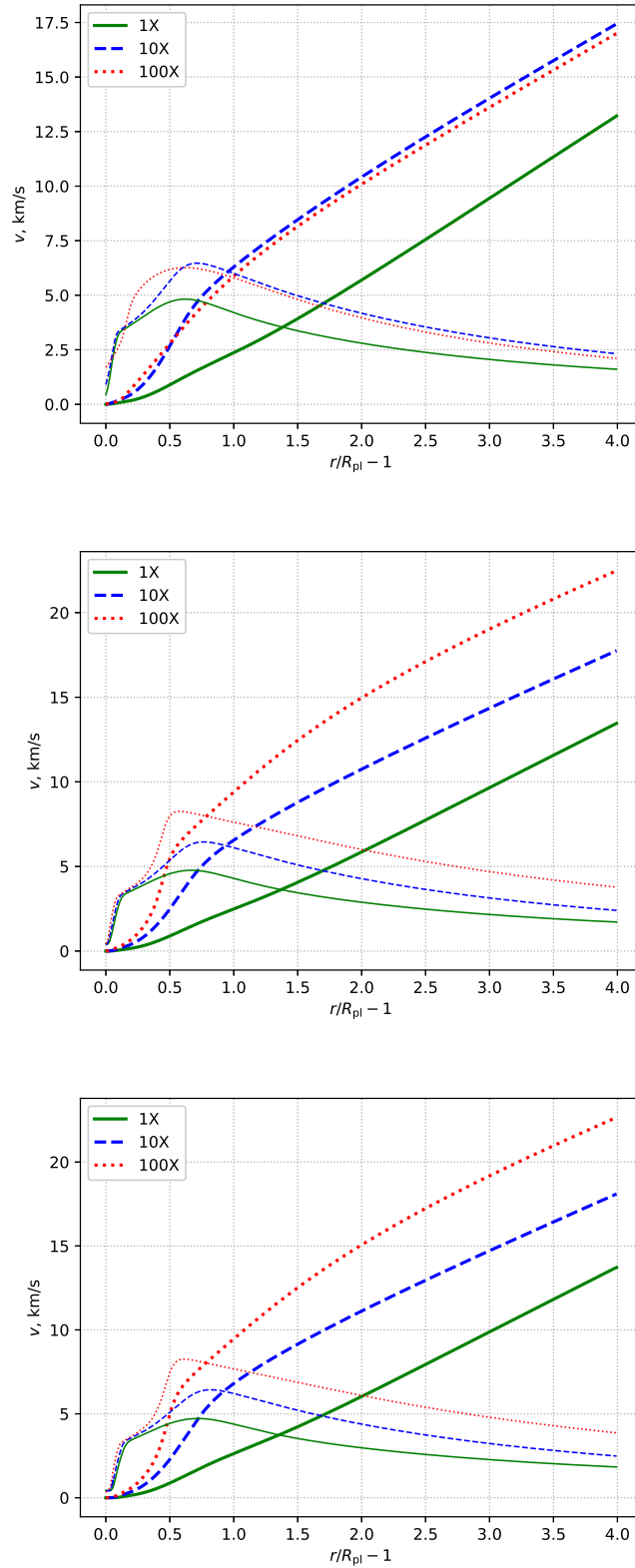


Рисунок 3.3 — Профили скорости газа v (жирные линии) и скорости звука c_s (тонкие линии) в верхней атмосфере горячего юпитера для моделей $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ (вверху), $n_{\text{atm}} = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ (в центре) и $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ (внизу).

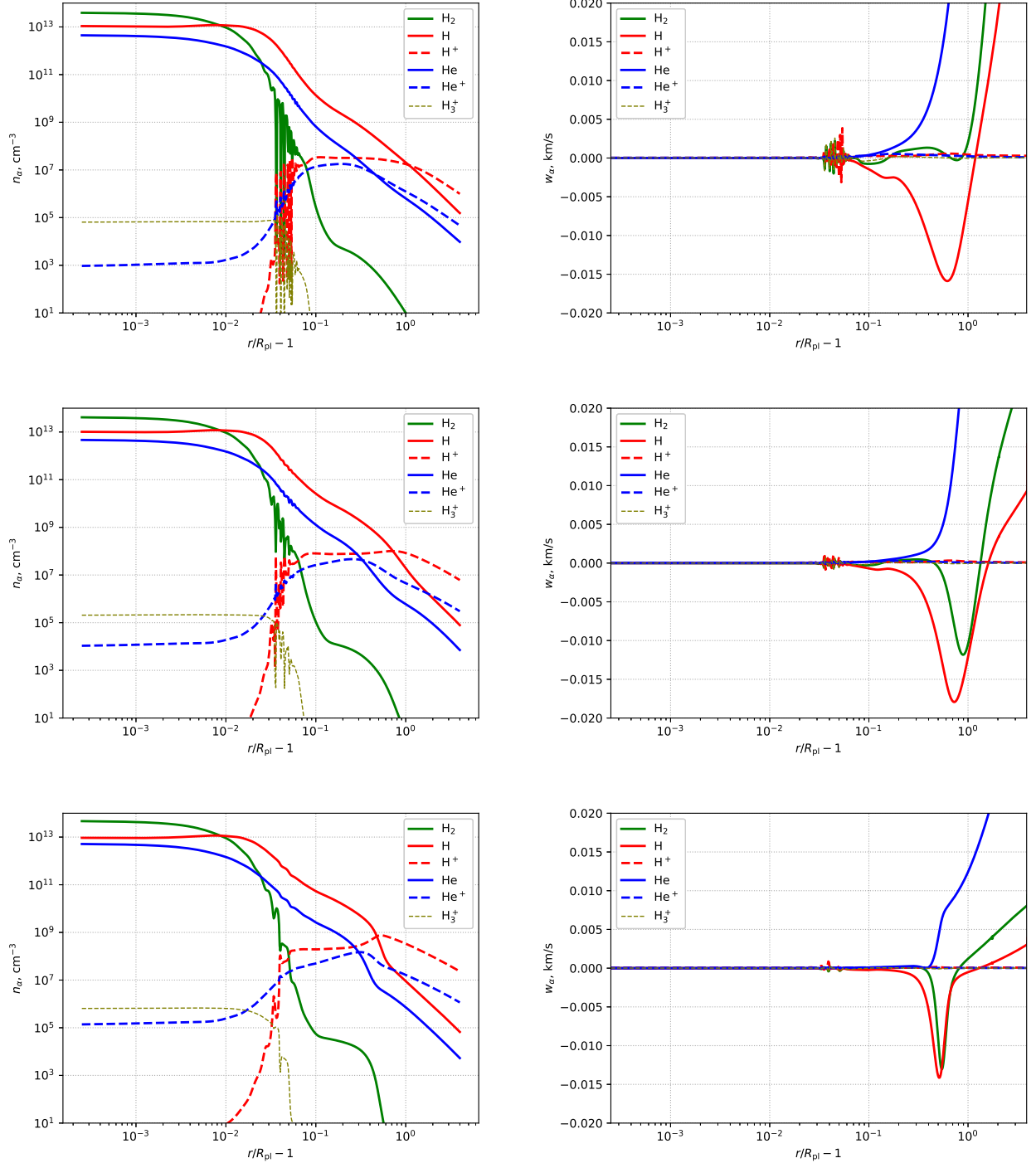


Рисунок 3.4 — Профили концентраций n_α (слева) и диффузионных скоростей w_α основных компонентов в верхней атмосфере горячего юпитера для модели $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ для потока жесткого излучения звезды 1X (вверху), 10X (в центре) и 100X (внизу).

горячего юпитера становятся более ионизованными. В частности, высоты, на которых выполняются равенства концентраций нейтралов и ионов $n_{\text{H}} = n_{\text{H}^+}$ и $n_{\text{He}} = n_{\text{He}^+}$ с увеличением потока излучения смещаются в более глубокие

слои атмосферы. Интересно отметить, что рост потока жесткого излучения приводит к диссипации облачного слоя. При этом его положение и толщина не изменяются.

На правых панелях рис. 3.4 показаны высотные профили диффузионных скоростей компонент w_α . Во внутренних частях атмосферы диффузионные скорости малы. Во внешних частях наиболее значимыми являются диффузионные скорости нейтральных фракций (молекулярный водород, атомарный водород и атомарный гелий). Кроме того, диффузия дает заметный вклад в области формирования облачного слоя. Наряду с теплопроводностью диффузия приводит к стабилизации неустойчивости, вызывающей образование облаков. С ростом потока жесткого УФ излучения родительской звезды роль диффузии ослабевает.

В данной аэрономической численной модели [11] основным источником нагрева верхней атмосферы горячих экзопланет-гигантов является поглощение жесткого УФ излучения родительской звезды. Соответствующая функция нагрева Γ_{ph} обусловлена всеми процессами фотоионизации и фотодиссоциации. Полная функция охлаждения Λ определяется суммой частных функций (1.61). Кроме того, определенный вклад в тепловой баланс вносит теплопроводность, которой можно соотнести функцию

$$\Lambda_{\text{cond}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.1)$$

В отличие от функций охлаждения (1.61) эта функция может изменять знак. Поэтому она может приводить как к охлаждению, так и к нагреву. Следует заметить, что в движущейся среде полный тепловой баланс определяется также адвекцией внутренней энергии и адиабатическим охлаждением.

На рис. 3.5 представлены профили функций нагрева Γ_{ph} (сплошная жирная линия) и частных функций охлаждения Λ_{ff} , Λ_{rec} , Λ_{lin} , Λ_{ion} , Λ_{rad} и Λ_{cond} для моделей $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ 1X, 10X и 100X. В тех случаях, когда функция Λ_{cond} оказывается положительной она для удобства обозначена как функция нагрева Γ_{cond} .

Анализ рисунка 3.5 позволяет заключить, что основным механизмом охлаждения во внутренних частях атмосферы горячего юпитера является излучение молекул H_3^+ . В области формирования облачного слоя существенную роль в установлении теплового баланса играет также теплопроводность. В промежуточной зоне среди механизмов охлаждения доминирует излучение в линиях

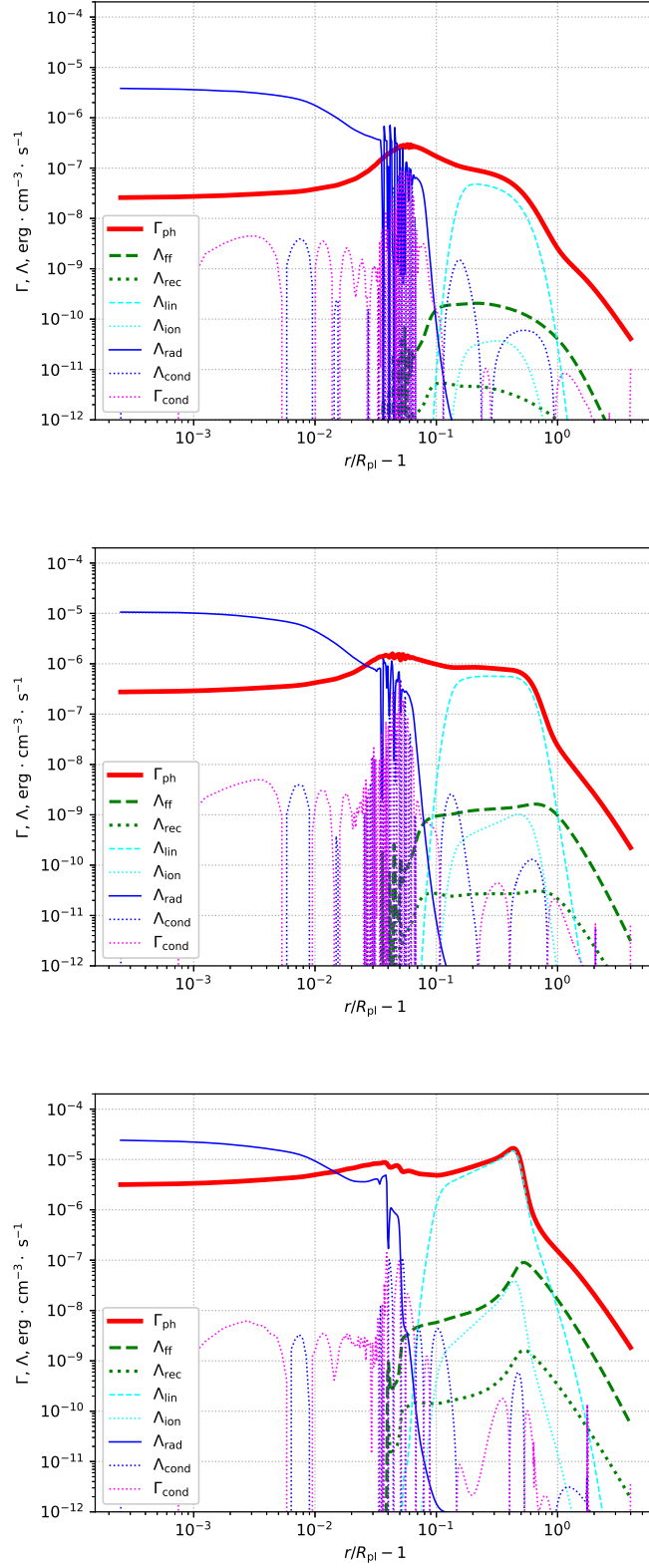


Рисунок 3.5 — Профили функций нагрева Γ и охлаждения Λ (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для модели $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ для потока жесткого излучения звезды 1X (вверху), 10X (в центре) и 100X (внизу).

Модель	10^{12} см^{-3}	10^{13} см^{-3}	10^{14} см^{-3}
1X	$6.9 \cdot 10^{10}$	$8.1 \cdot 10^{10}$	$9.6 \cdot 10^{10}$
10X	$5.6 \cdot 10^{11}$	$6.2 \cdot 10^{11}$	$6.9 \cdot 10^{11}$
100X	$9.9 \cdot 10^{11}$	$3.0 \cdot 10^{12}$	$3.2 \cdot 10^{12}$

Таблица 5 — Параметр $\dot{M}$, определяющий верхнюю оценку темпа потери массы $\dot{M}_{\text{pl}}$ для различных вариантов расчета.

нейтральных атомов (в основном, в линии $\text{Ly}\alpha$). В самых внешних частях атмосферы, где вещество оказывается почти полностью ионизованным, доминирует охлаждение за счет свободно-свободных переходов. Однако еще больший вклад в этой области дает адиабатическое охлаждение в планетном ветре. Остальные механизмы охлаждения в тепловой баланс верхней атмосферы горячего юпитера не вносят какого-либо существенного вклада.

С увеличением потока жесткого УФ излучения звезды растет функция нагрева Γ_{ph} . Этот эффект проявляется даже в самых внутренних слоях атмосферы. Роль функций охлаждения не изменяется, поскольку зоны доминирования соответствующих механизмов остаются прежними. Однако во внешней части атмосферы локальные значения самих частных функций охлаждения в целом возрастают.

В табл. 5 приведены значения параметра $\dot{M}$ для всех рассчитанных моделей. Темп потери массы растет по мере увеличения потока жесткого УФ излучения звезды F_{XUV} . Для каждого значения концентрации n_{atm} были рассмотрены три варианта потока. Во всех случаях получается нелинейная зависимость $\dot{M}$ от величины потока излучения F_{XUV} . Например, в случае $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ переход от 1X к 10X можно описать степенной зависимостью $\dot{M} \propto F_{\text{XUV}}^k$ с показателем $k = 0.86$, а переходу от 10X к 100X соответствует показатель степени $k = 0.67$. Как обсуждалось в работе [59] в случае слабого потока жесткого излучения основная часть лучистой энергии преобразуется в работу, совершаемую над газом (адиабатическое охлаждение). Это приводит к линейной зависимости темпа потери массы от величины потока, $\dot{M} \propto F_{\text{XUV}}$. В случае сильного потока жесткого излучения основная часть его энергии излучается в линиях. В таком пределе темп потери массы $\dot{M}$ оказывается пропорциональным величине потока F_{XUV} в степени $1/2$.

3.3 Влияние вспышечной активности звезды

В данном разделе рассматриваются результаты моделирования отклика атмосфер горячих экзопланет на вспышечные воздействия со стороны родительских звезд солнечного типа.

Предполагалось, что непосредственно перед вспышкой верхняя атмосфера планеты находится в стационарном состоянии при условии постоянного потока жесткого УФ излучения, равного потоку от современного спокойного Солнца F_{XUV}^0 . В модели конкретное значение этой величины нигде не используется, поскольку все необходимые коэффициенты рассчитываются с помощью интегрирования спектрального потока излучения f_λ (измеряется в единицах $\text{фотон} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$) по длине волны λ . Однако, если данную величину определить выражением $F_{\text{XUV}}^0 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_\lambda h \nu d\lambda$, где h — постоянная Планка, ν — частота, $\lambda_1 = 1$ нм, $\lambda_2 = 100$ нм, то для спокойного Солнца на орбите горячего юпитера получаем $F_{\text{XUV}}^0 = 925 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$.

Профили основных величин в невозмущенной атмосфере приведены на рис. 3.6. Для удобства на оси абсцисс отложена высота над фотометрической поверхностью, выраженная в радиусах планеты R_{pl} . На верхних панелях показаны профили плотности ρ , температуры T (слева) и скорости v (справа). Плотность характеризуется монотонно убывающим профилем. В самых глубоких слоях атмосферы температура вещества близка по значению к эффективной температуре планеты T_{atm} , а скорость пренебрежимо мала. Далее температура резко возрастает из-за нагрева вещества за счет поглощения жесткого УФ излучения звезды. Максимальное значение температуры составляет 9500 К. В этой зоне происходит формирование планетного ветра. Во внешних слоях атмосферы скорость ветра становится сверхзвуковой (скорость звука показана пунктирной линией на правой верхней панели), а температура из-за адиабатического охлаждения начинает монотонно падать с увеличением радиуса. Скорость вещества на внешней границе составляет 13.7 км/с.

На нижней левой панели рис. 3.6 показаны профили концентраций компонентов n_α . В самых внутренних слоях $r \leq 1.01R_{\text{pl}}$ доминирует молекулярный водород. В промежуточной зоне $1.01R_{\text{pl}} \leq r \leq 2R_{\text{pl}}$ вещество атмосферы в основном состоит из атомарного водорода. Наконец, внешние слои атмосферы $r > 2R_{\text{pl}}$ оказываются практически полностью ионизованными и состоят из во-

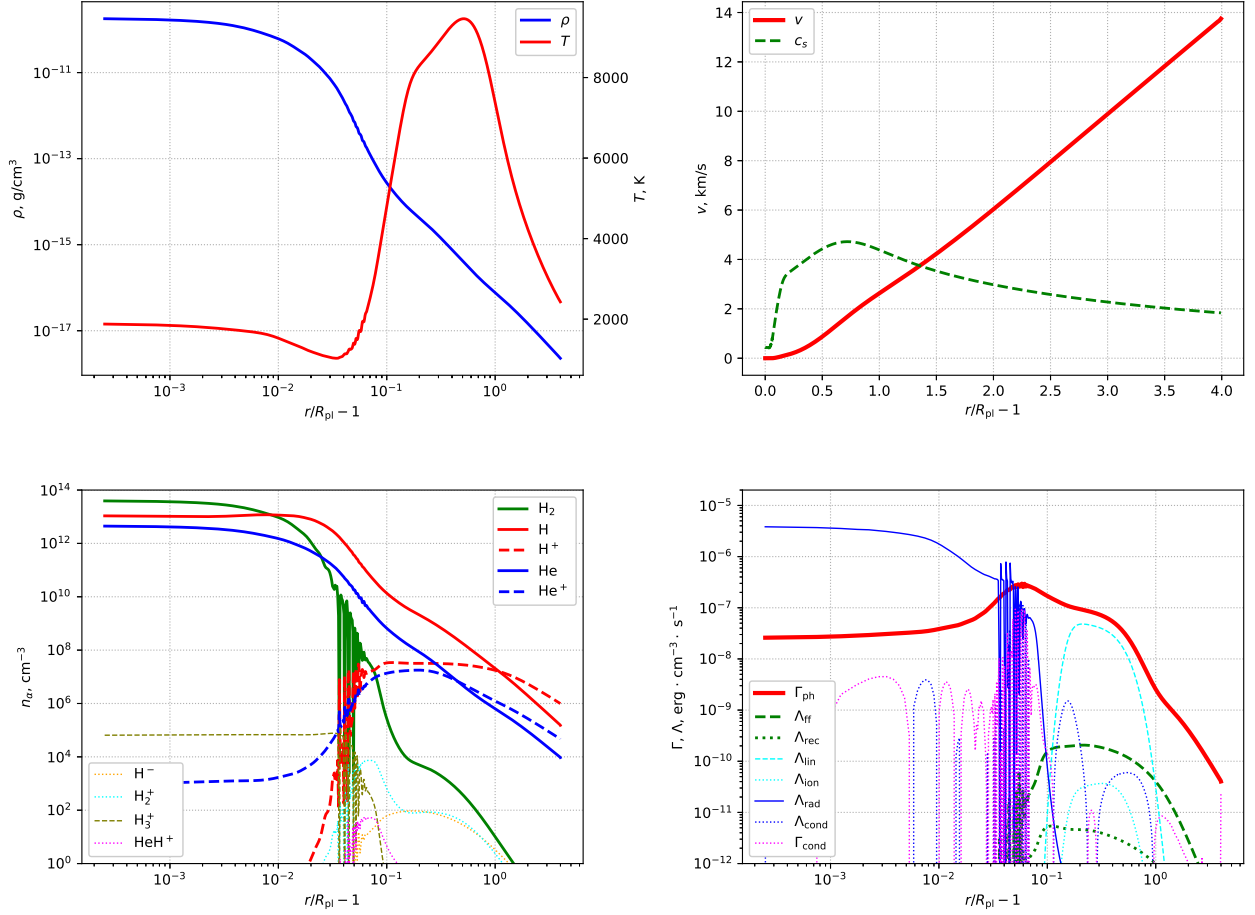


Рисунок 3.6 — Профили плотности, температуры (вверху слева), скорости (вверху справа), концентраций компонентов (внизу слева) и функций нагрева-охлаждения (внизу справа) в верхней атмосфере горячего юпитера перед вспышкой звезды.

дородно-гелиевой плазмы. Вариации концентраций (например, концентрации молекулярного водорода) в области $1.02R_{\text{pl}} \leq r \leq 1.07R_{\text{pl}}$ вызваны развитием неустойчивости, приводящей к формированию облачного слоя.

Наконец, на правой нижней панели рис. 3.6 показаны профили функции нагрева Γ_{ph} (сплошная жирная линия), а также частных функций охлаждения за счет свободно-свободных переходов Λ_{ff} , рекомбинационного излучения Λ_{rec} , излучения в линиях Λ_{lin} , ионизации электронным ударом Λ_{ion} , излучения молекул H_3^+ Λ_{rad} . Функции Λ_{cond} и Γ_{cond} описывают вклад теплопроводности в тепловой баланс атмосферы в тех случаях, когда оно приводит к охлаждению или к нагреву соответственно. Как видно, основным механизмом охлаждения внутренних частей атмосферы является излучение молекул H_3^+ . В промежуточной зоне доминирует охлаждение за счет излучения в линиях нейтральных

атомов (в основном, в линии $\text{Ly}\alpha$). Температура внешних слоев атмосферы главным образом определяется адиабатическим охлаждением в планетном ветре.

Процесс вспышки можно описать с помощью некоторой зависимости потока жесткого УФ излучения от времени $F_{\text{XUV}}(t)$. Удобно эту зависимость представить в виде $F_{\text{XUV}}(t) = X(t)F_{\text{XUV}}^0$, где $X(t)$ — безразмерный фактор, описывающий относительное изменение потока по сравнению с потоком для спокойного Солнца F_{XUV}^0 . В данной работе для описания отдельной вспышки была использована простая модель, в которой считалось, что в момент начала вспышки фактор $X(t)$ резко возрастал до величины X_{max} и оставался таким в течение некоторого времени, после чего возвращался к исходному значению $X = 1$. Продолжительность отдельной вспышки во всех приводимых ниже вариантах расчетов составляла 30 мин. Чтобы было удобнее сравнивать результаты воздействия на атмосферу, использовалась одинаковая продолжительность вспышек независимо от их интенсивности. В общем случае, продолжительность вспышек зависит от величины X_{max} . Например, в работе [126] для длительности вспышки приводится аппроксимационная формула $\lg t_{\text{flare}} = 0.395 \lg E_{\text{bol}} - 9.269$, где E_{bol} болометрическая светимость звезды. Кроме того, потери атмосферы на больших временах определяются также частотой вспышек [127].

3.3.1 Одиночная вспышка

В данном разделе представлены результаты расчетов для одиночной вспышки. В этом случае каждую модель можно характеризовать единственным параметром X_{max} . Были проведены три расчета, в которых этот параметр задавался равным 10 (модель X1, слабая вспышка), 100 (модель X2, вспышка промежуточной интенсивности) и 1000 (модель X3, сильная вспышка).

На рис. 3.7 — 3.9 представлены радиальные профили температуры $T(r)$ (вверху) и скорости убегания атмосферы $v(r)$ (внизу) для всех трех моделей X1, X2 и X3. Различные кривые описывают состояние атмосферы в различные моменты времени от начала звездной вспышки. Для более детального исследования глубоких слоев атмосферы ось абсцисс представлена в логарифмическом масштабе и определяет расстояние от фотометрического радиуса, выраженное в радиусах планеты R_{pl} . В результате вспышки происходит локальный разо-

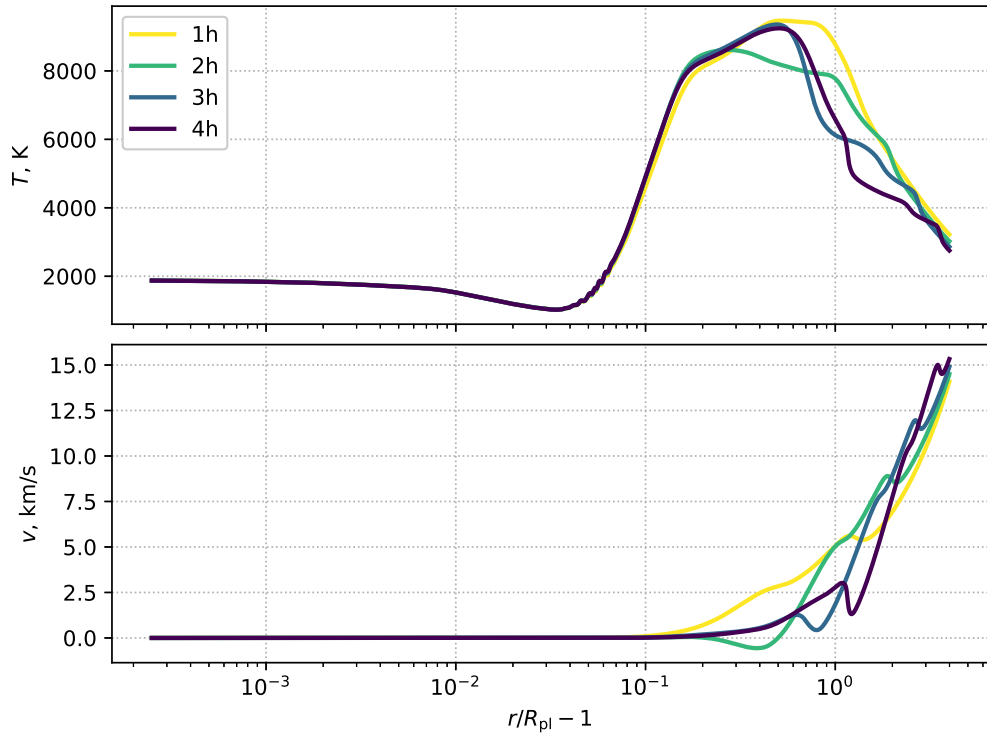


Рисунок 3.7 — Радиальные профили температуры (вверху) и скорости (внизу) в верхней атмосфере горячего юпитера для модели X1. Каждая кривая соответствует различному времени, прошедшему от начала звездной вспышки.

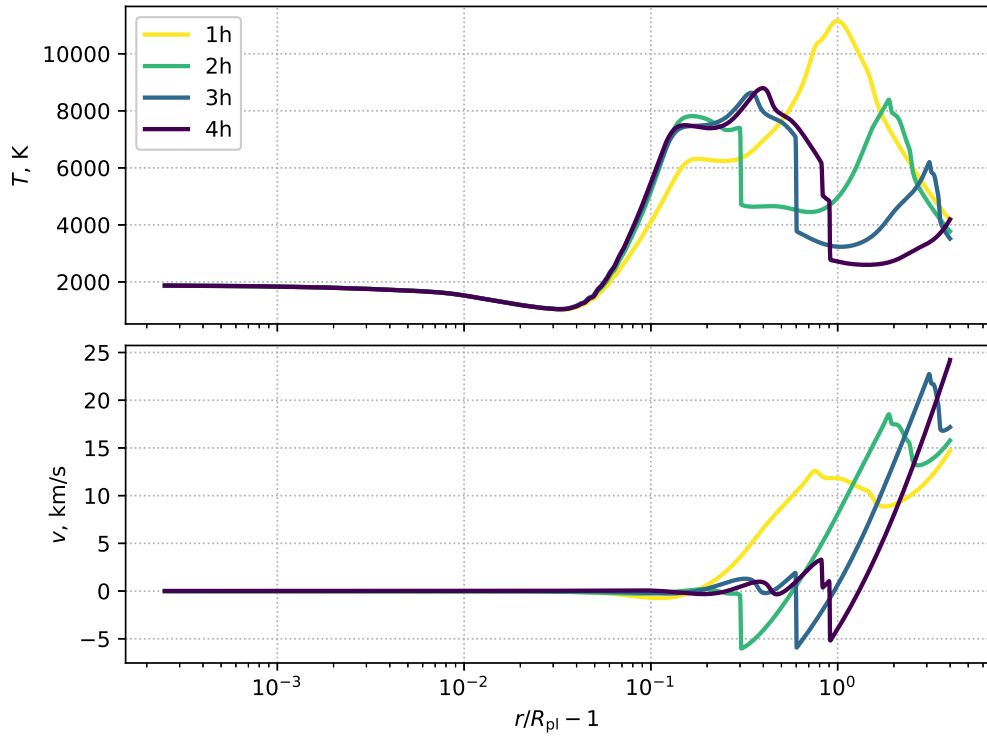


Рисунок 3.8 — То же самое, что и на рис. 3.7, но для модели X2.

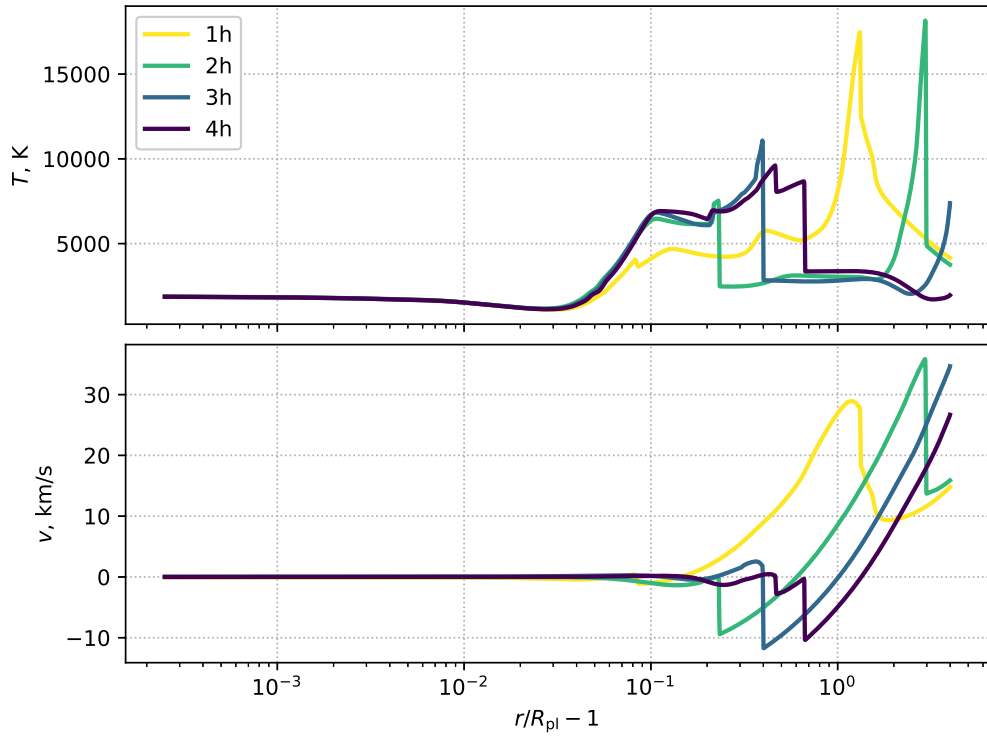


Рисунок 3.9 — То же самое, что и на рис. 3.7, но для модели X3.

грев атмосферы, приводящий к росту температуры. Видно, что вспышка не оказывает влияния на глубокие слои атмосферы, которые характеризуются относительно низкой температурой. Основное воздействие приходится на внешние слои атмосферы, где формируются две ударные волны, распространяющиеся по газу в противоположных направлениях. Одна ударная волна распространяется вовнутрь, а другая — наружу атмосферы горячего юпитера. В первые часы после вспышки профили температуры и скорости существенно изменяются. Однако затем структура атмосферы постепенно восстанавливается и возвращается в исходное состояние. Динамический отклик атмосферы существенно зависит от интенсивности вспышки. В модели X1 профили температуры и скорости изменяются слабо и быстро восстанавливаются. В модели X3 в первые часы после вспышки максимальное значение температуры достигает значения 19000 К, а максимальная скорость доходит до 38.5 км/с.

Следует обратить внимание, что профили температуры и скорости на рис. 3.7 — 3.9 показаны для моментов времени, когда вспышка уже закончилась. Вспышка длилась 30 мин, а первая кривая (показана желтым цветом) соответствует моменту времени через час после начала вспышки. Во время самой вспышки функция нагрева увеличивается в соответствующее число раз (в 10 раз для модели X1, в 100 раз для модели X2 и в 1000 раз для модели X3). Одна-

ко, как показывает анализ, в глубоких слоях атмосферы одновременно с этим возрастает и функция охлаждения. Последнее обусловлено тем, что в этой области резко увеличивается концентрация молекул H_3^+ (для модели X3 примерно в 25 раз). Поэтому в глубоких слоях верхней атмосферы горячего юпитера во время вспышки срабатывает своеобразная обратная связь, когда рост нагрева хорошо компенсируется ростом выхолаживания.

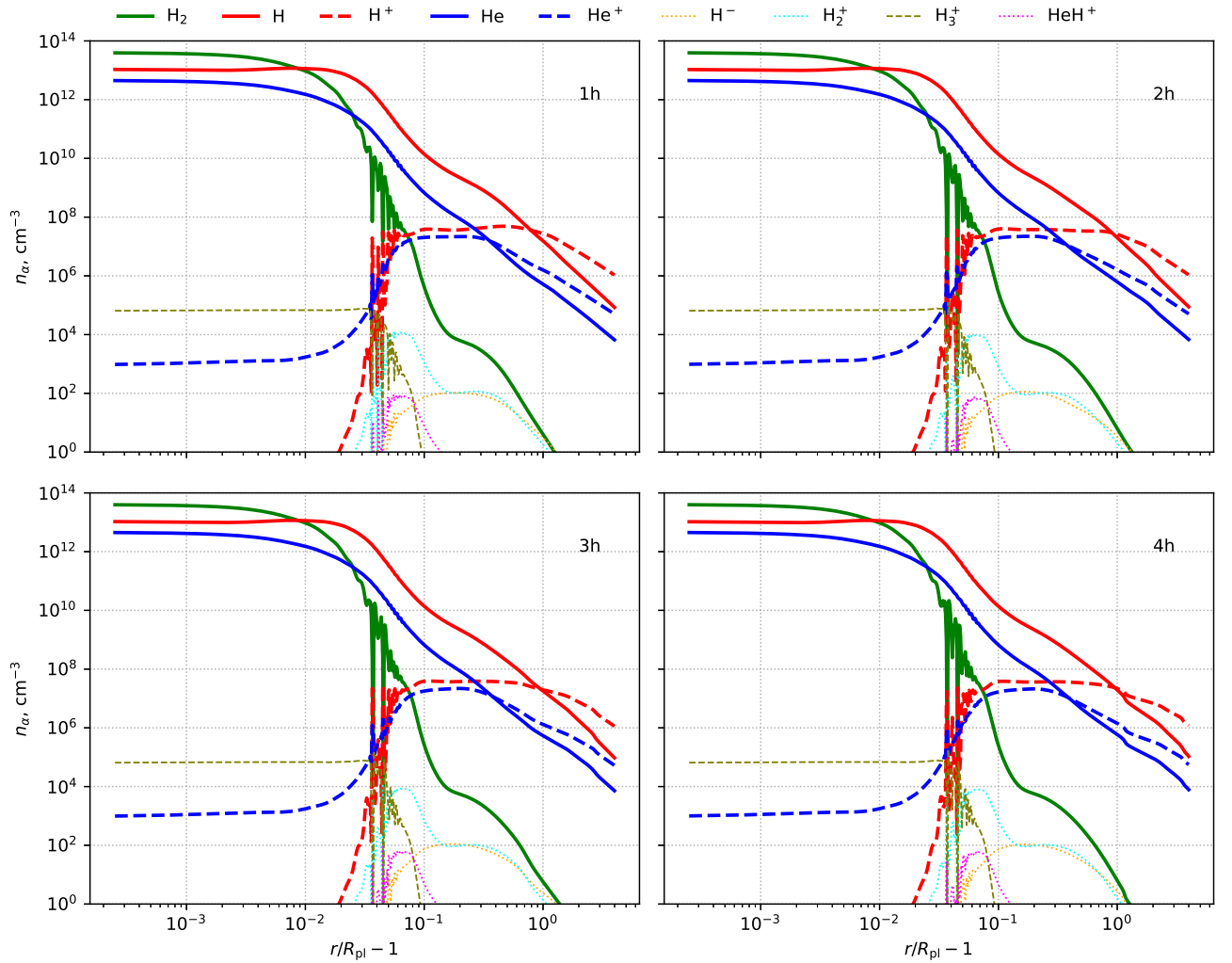


Рисунок 3.10 — Профили концентраций компонентов в верхней атмосфере горячего юпитера для модели X1 в различные моменты времени от начала вспышки.

На рис. 3.10–3.12 представлены высотные профили концентраций компонентов n_α для моделей X1, X2, X3 в различные моменты времени от начала вспышки. Как видно, качественного изменения распределения концентраций компонентов после вспышки не происходит. Распространение ударных волн приводит к дополнительному перемешиванию вещества во внешних слоях атмосферы. Это обусловлено оттоком из промежуточной зоны во внешнюю область

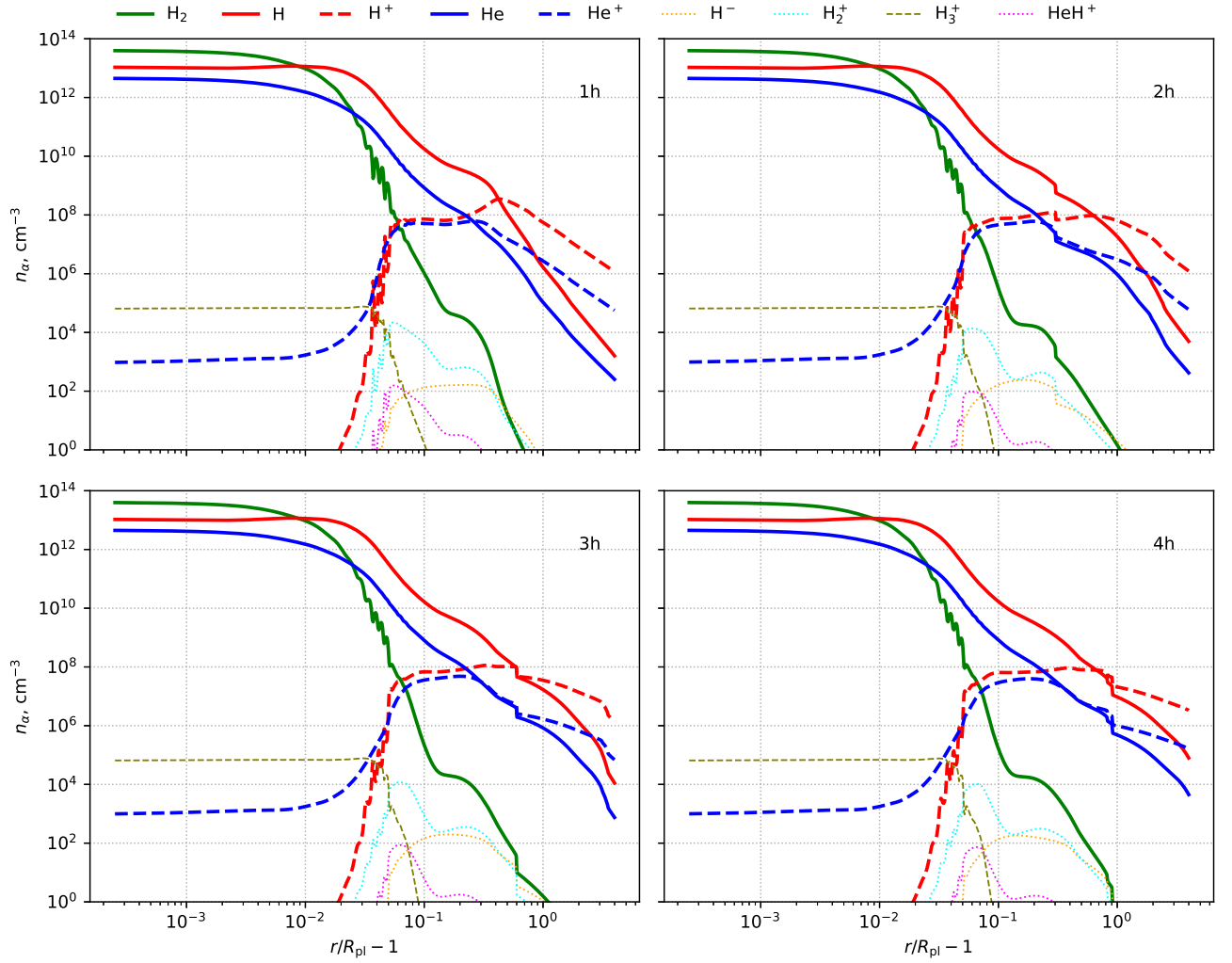


Рисунок 3.11 — То же самое, что и на рис. 3.10, но для модели X2.

нейтрального газа, состоящего в основном из атомов водорода и гелия. В результате степень ионизации внешней части атмосферы уменьшается. Однако затем происходит релаксация атмосферы и это вещество вновь ионизируется излучением звезды. Интересно отметить, что вспышки (особенно сильные) могут частично разрушать облачный слой, что приводит к его диссипации. В спокойном состоянии атмосферы облачный слой через определенное время восстанавливается вновь.

На левой панели рис. 3.13 для случая модели X3 показаны профили отношения $n_{\text{H}}/n_{\text{H}}^0$, где n_{H} — концентрация атомов водорода в текущем состоянии атмосферы, а n_{H}^0 — соответствующее значение концентрации в спокойном состоянии. Видно, что этот параметр изменяется на три порядка величины. При этом на различных высотах может происходить как уменьшение этого параметра, так и его увеличение.

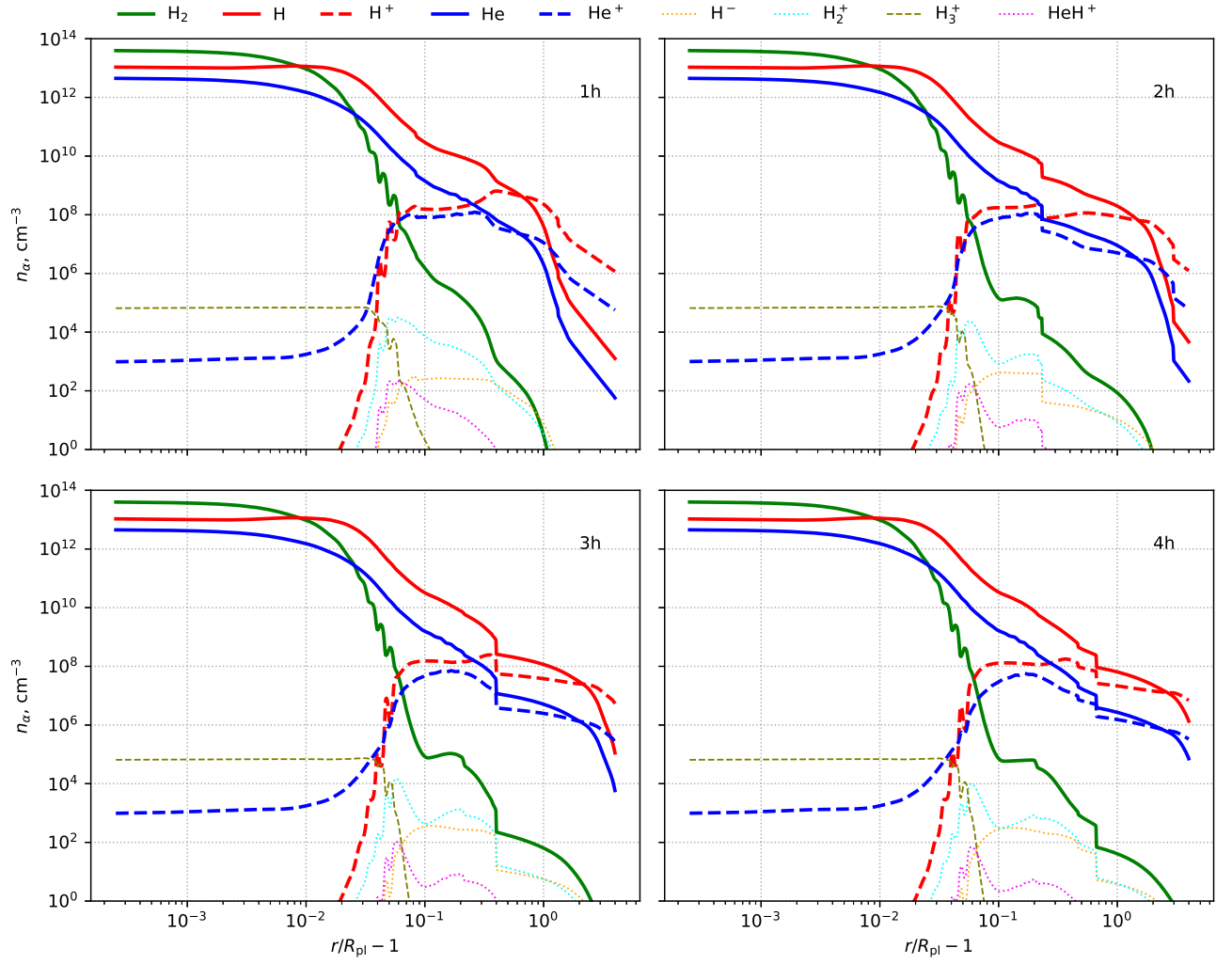


Рисунок 3.12 — То же самое, что и на рис. 3.10, но для модели X3.

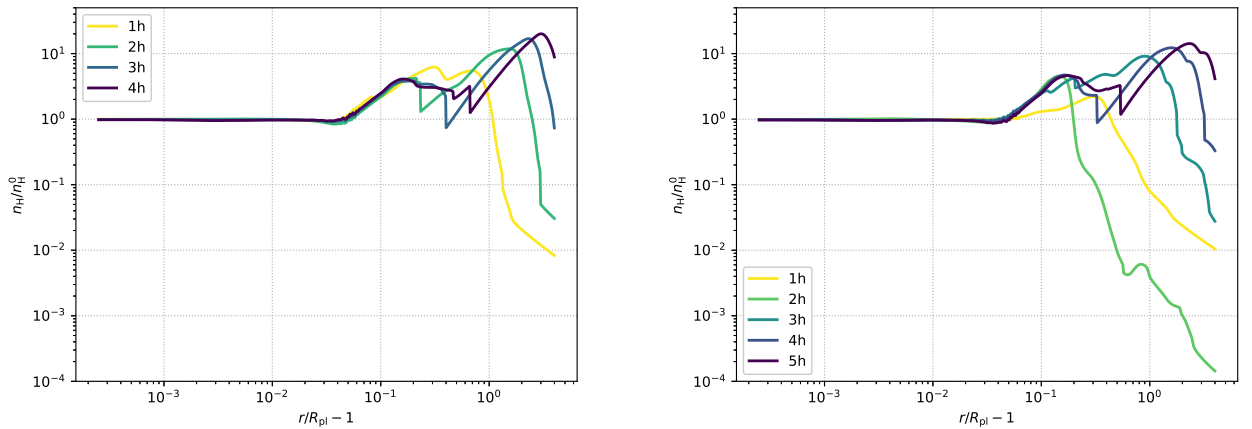


Рисунок 3.13 — Профили отношения концентрации атомарного водорода n_{H} текущего состояния атмосферы к соответствующему значению до вспышки n_{H}^0 для модели X3 одинарной (слева) и X2X3 триггерной (справа) вспышки.

Полученный результат интересен с точки зрения регистрации отклика атмосфер горячих юпитеров на вспышечные воздействия со стороны их родительских звезд. Возможно несколько вариантов наблюдательных проявлений такого отклика атмосферы, которые потенциально можно обнаружить с помощью существующих и планируемых к запуску космических УФ обсерваторий (например, проекты HST и Спектр-УФ). Во-первых, при сильных вспышках, как, например, в модели X3, верхняя атмосфера планеты может существенно разогреться и расшириться (см., рис. 3.12). В первые часы после вспышки, из-за того, что XUV излучение звезды не успевает ионизовать нейтралы во внешней области атмосферы, в этой области, как следует из рис. 3.13, наблюдается довольно сильное (в 10 раз) увеличение концентрации нейтрального водорода. Таким образом, под воздействием сильной звездной вспышки у горячего юпитера образуется расширенная плотная атмосфера. Следовательно, в УФ диапазоне длин волн может возрасти и глубина транзита, $R_{pl}^2/R_{st}^2 = f(\lambda)$, где R_{st} — радиус звезды. Это увеличение глубины транзита потенциально отразится на кривых блеска, полученных по фотометрическим наблюдениям планетной системы в УФ диапазоне, как, например, в работе [133] при регистрации протяженной оболочки у горячего юпитера WASP-12b. В этом случае, начало транзита в УФ диапазоне длин волн за счет большей оптической толщи может опережать начало транзита в видимом диапазоне.

Еще одним важным проявлением реакции атмосферы горячего юпитера на сильную вспышку родительской звезды, которое может быть потенциально обнаружено по спектральным транзитным наблюдениям в УФ диапазоне длин волн, является увеличение поглощения в синем крыле спектральной линии H I Ly α . Это поглощение может быть связано с образованием ЭНА водорода, H_{ENA}, в реакциях перезарядки атомарного H атмосферы экзопланеты с протонами звездного ветра, $H + p \rightleftharpoons H^+ + H_{ENA}$. Данный механизм был предложен в работе [134] для объяснения формы спектральной линии H I Ly α по транзитным наблюдениям атмосферы горячего юпитера HD 209458b. Впоследствии, ЭНА водорода учитывались в численном моделировании для интерпретации спектральных наблюдений оболочек горячих экзопланет (см., например, [13; 135; 137]). Скорость производства ЭНА, в свою очередь, зависит от концентрации нейтрального водорода во внешних слоях атмосферы экзопланеты и концентрации протонов в звездном ветре. Таким образом, при воздействии сильной XUV вспышки на атмосферу горячего юпитера и после-

дующем увеличении концентрации H в верхних частях атмосферы (рис. 3.13), интенсификации планетного ветра (рис. 3.12), глубина транзита в синем крыле линии $H\text{I Ly}\alpha$ может быть значительно увеличена. Это изменение глубины транзита может быть потенциально зарегистрировано с помощью существующих и планируемых УФ телескопов.

Стоит отметить, что указанные наблюдательные особенности могут быть интерпретированы не только, как результат взаимодействия XUV излучения звезды с верхней атмосферой горячей экзопланеты, но и как результат взаимодействия звездного ветра и КВМ с оболочкой данной планеты. Последний тип взаимодействия, в свою очередь, может вносить более существенный вклад в наблюдаемые величины [124]. При этом само взаимодействие КВМ с атмосферой экзопланеты сопровождается вспышками, причем сначала происходит взаимодействие атмосферы с XUV излучением звезды, а затем КВМ взаимодействует с уже возмущенными верхними слоями этой атмосферы. Поэтому, важной задачей является отделить наблюдательные эффекты, возникающие в данных процессах, друг от друга.

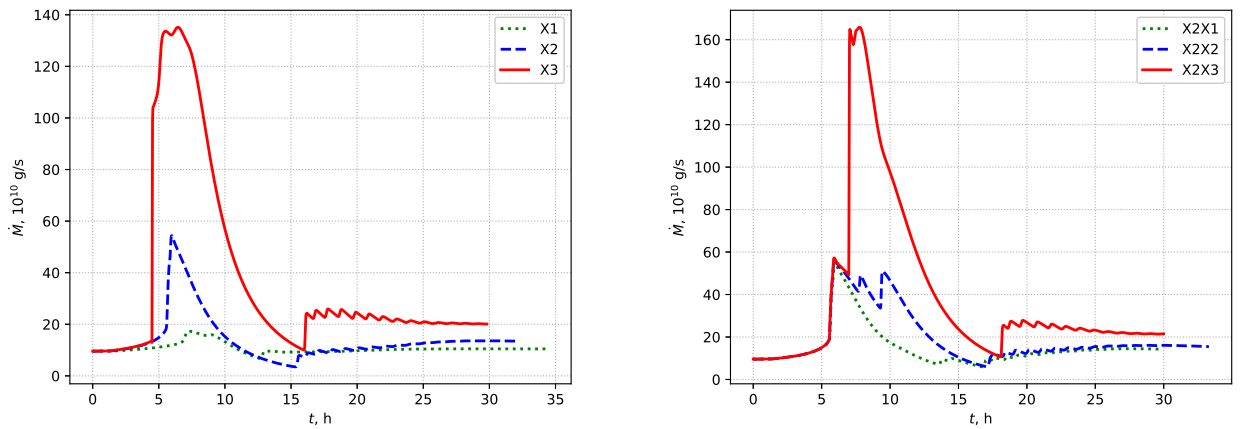


Рисунок 3.14 — Изменение темпа потери массы $\dot{M}$ в результате воздействия одинарной (слева) и триггерной (справа) вспышки.

В стационарном состоянии атмосферы параметр $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v$ является постоянным и определяет темп потери массы планеты вследствие планетного ветра. Поскольку в данном случае рассматривается решение вдоль линии, соединяющей центры планеты и звезды, то с учетом приливной силы данное решение, вообще говоря, не является строго сферически-симметричным. Поэтому следует иметь в виду, что параметр $\dot{M}$ не совпадает с точным значением

темпа потери массы $\dot{M}_{\text{pl}}$ и может отличаться от него в несколько раз. Тем не менее, в рамках одномерной аэрономической модели его можно использовать для оценки реального темпа потери массы атмосферы.

На левой панели рис. 3.14 показаны зависимости величины $\dot{M}$ от времени для моделей X1, X2 и X3. Динамический отклик атмосферы приводит к резкому росту темпа потери массы. В моделях X1, X2 и X3 параметр $\dot{M}$ возрастает в 1.8, 5.7 и 14.1 раза соответственно. Активная фаза динамического отклика продолжается примерно 12 часов после вспышки. Характерный период релаксации к исходному состоянию атмосферы составляет порядка суток.

3.3.2 Повторная вспышка

Были проведены расчеты воздействия на атмосферу горячего юпитера повторной вспышки, состоящей из последовательности двух одинарных вспышек. Продолжительность каждой одинарной вспышки составляла 30 мин. Интервал между двумя отдельными вспышками задавался равным 1 часу. Рассматривался случай, когда параметр X_{max} у первой вспышки равнялся фиксированному значению 100, а у второй варьировался. Было проведено три расчета, в которых для второй вспышки параметр X_{max} задавался равным 10 (модель X2X1), 100 (модель X2X2) и 1000 (модель X2X3).

На рис. 3.15 представлены профили температуры $T(r)$ (вверху) и скорости $v(r)$ (внизу) для модели X2X3. Различные кривые соответствуют различным моментам времени от начала повторной вспышки. Как и в случае одиночной вспышки, повторная вспышка не оказывает практически никакого влияния на глубокие слои атмосферы. Основное воздействие снова приходится на внешние слои атмосферы. Однако при этом структура динамического отклика оказывается более сложной. От каждой отдельной вспышки формируются две ударные волны, распространяющиеся вовнутрь и наружу атмосферы. Эти ударные волны имеют разную интенсивность и эффективно взаимодействуют между собой. В модели X2X3 максимальное значение температуры достигает значения 16700 К, а максимальная скорость доходит до 32.9 км/с. Интересно отметить, что эти значения получились немного меньше, чем для модели X3 одиночной

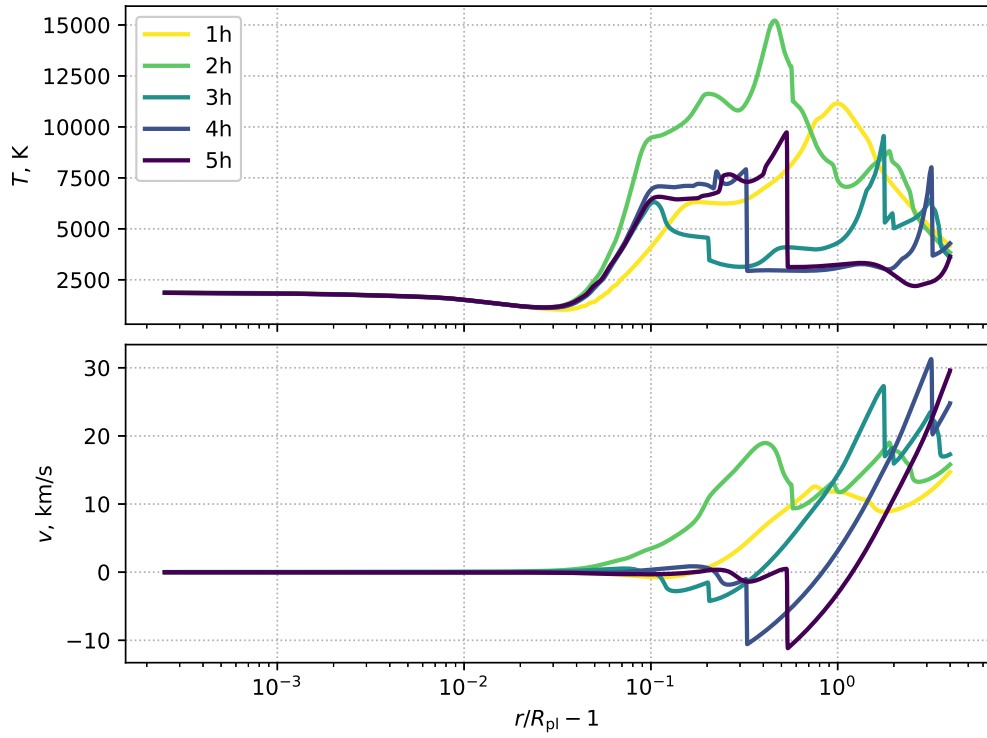


Рисунок 3.15 — Радиальные профили температуры (вверху) и скорости (внизу) в верхней атмосфере горячего юпитера для модели X2X3. Каждая кривая соответствует различному времени, прошедшему от начала звездной вспышки.

вспышки. По-видимому, это обусловлено тем, что к моменту начала второй вспышки X3 атмосфера была уже возмущена первой вспышкой X2.

На рис. 3.16 показаны профили концентраций компонентов n_α для модели X2X3 в различные моменты времени от начала вспышки. Кривые на левой верхней панели (через 1 час от начала вспышки) совпадают с кривыми на левой верхней панели рис. 3.11, поскольку возмущения от второй вспышки еще нет. Однако дальнейшее изменение профилей концентраций уже определяется обеими вспышками. Поэтому профили получаются более сложными. Распространение и взаимодействие ударных волн приводит к оттоку нейтрального газа во внешние слои атмосферы. В результате степень ионизации внешней части атмосферы на некоторое время уменьшается, но затем это вещество вновь ионизируется излучением звезды. В данной модели облачный слой практически полностью диссипирует, но, когда атмосфера приходит в спокойное состояние, восстанавливается вновь.

На правой панели рис. 3.13 для обсуждаемой модели X2X3 показаны профили отношения текущего значения концентрации атомарного водорода к соответствующему значению в спокойном состоянии, n_H/n_H^0 . В данном слу-

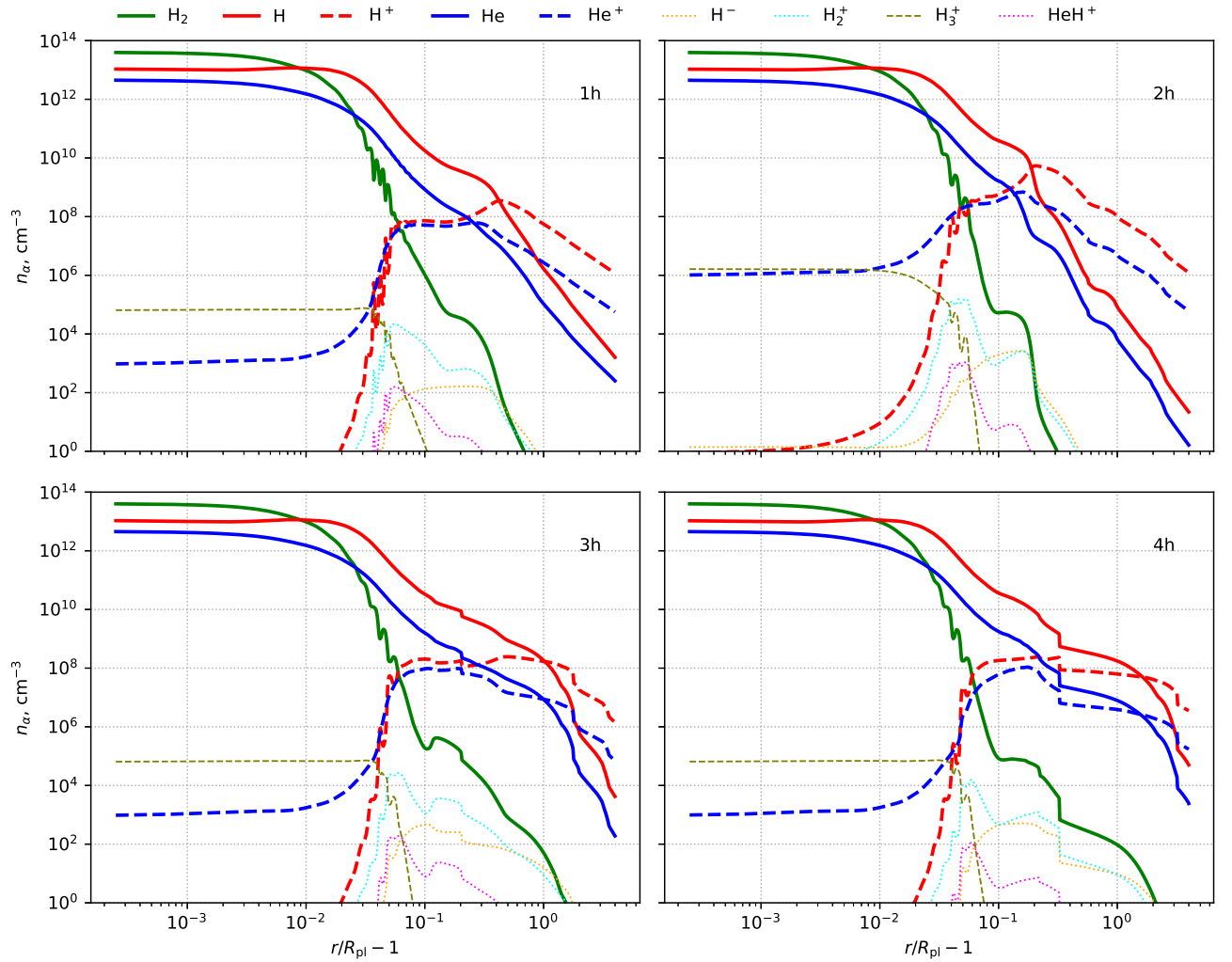


Рисунок 3.16 — Профили концентраций компонентов в верхней атмосфере горячего юпитера для модели X2X3 в различные моменты времени от начала вспышки.

чае вариация этого параметра достигает пяти порядков величины. Таким образом, можно заключить, что повторные вспышки могут приводить к еще более выраженным наблюдательным проявлениям отклика атмосферы на такое воздействие со стороны родительской звезды по сравнению с одинарными вспышками. Это, в свою очередь, может увеличить шансы для обнаружения данных проявлений фотометрическими и спектральными методами с помощью планируемой к запуску обсерватории Спектр-УФ. Такие проявления можно непосредственно фиксировать в наблюдениях возмущенных атмосфер горячих юпитеров.

На правой панели рис. 3.14 представлены зависимости темпа потери массы $\dot{M}$ от времени для моделей X2X1, X2X2 и X2X3. В результате первой вспышки

величина $\dot{M}$ возрастает в 5.7 раз по сравнению со спокойным состоянием атмосферы. В моделях X2X1 и X2X2 дальнейшего увеличения этого параметра не происходит. В модели X2X3 вторая вспышка повышает темп потери массы в 17.3 раз по сравнению с первоначальным значением. Активная фаза динамического отклика продолжается около 15 часов. Период релаксации атмосферы к исходному состоянию, как и в случае одиночной вспышки, составляет порядка суток.

3.4 Заключение к Главе 3

Основной целью данной главы является изучение влияния жесткого излучения родительской звезды на структуру верхней атмосферы горячего юпитера.

Результаты расчетов показали, что с увеличением жесткого УФ излучения звезды внешние слои атмосферы становятся более ионизованными, а структура внутренних слоев меняется слабо. При этом рост потока излучения звезды приводит к диссипации облачного слоя.

Исследование отклика атмосферы горячих экзопланет на вспышечные воздействия показало, что во внешних слоях атмосферы формируются ударные волны, которые приводят к дополнительному перемешиванию вещества. В результате, степень ионизации внешней части атмосферы уменьшается. Однако затем происходит релаксация атмосферы, и это вещество вновь ионизируется излучением звезды. Также было обнаружено, что в первые часы после вспышки концентрация атомарного водорода увеличивается на несколько порядков величины. Данный эффект может быть наблюдаем с помощью планируемой к запуску космической обсерватории Спектр-УФ.

Основные результаты по данной главе опубликованы в работах автора [A2] и [A3].

3.5 Положения, выносимые на защиту по результатам третьей главы

Моделирование влияния вспышечной активности родительской звезды на структуру верхней атмосферы горячих экзопланет-гигантов показало, что в результате дополнительного нагрева возникает динамический отклик, приводящий к образованию ударных волн и заметному увеличению оттока атмосферы. По результатам расчетов установлено, что в случае сильных вспышек, помимо значительного локального нагрева верхней атмосферы возможно также существенное увеличение концентрации водорода во внешних слоях в первые часы после вспышки. Указанные эффекты могут быть наблюдаемы с помощью планируемой к запуску космической обсерватории Спектр-УФ.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы:

1. Для расчета структуры верхних водородно-гелиевых атмосфер горячих экзопланет-гигантов разработана одномерная нестационарная аэрономическая модель, основанная на приближении одножидкостной многокомпонентной гидродинамики.
2. Изучена зависимость гидродинамического оттока атмосферы от внутренних граничных условий и от начального химического состава. Внешние слои атмосферы горячего юпитера оказываются полностью ионизованными, в то время как атмосфера теплого нептона в основном состоит из нейтрального газа.
3. Обнаружен новый тип облаков в атмосферах экзопланет – плотные холодные образования, свободно плавающие в разреженном теплом газе. Облачный слой формируется в результате тепловой неустойчивости в химически реагирующем газе.
4. По результатам расчетов было показано, что в случае сильных вспышек, помимо значительного локального нагрева верхней атмосферы возможно также существенное увеличение концентрации водорода в этих областях в первые часы после вспышки. Указанные эффекты могут быть наблюдаемы с помощью планируемой к запуску космической обсерватории Спектр-УФ.

Перспективы дальнейших исследований:

1. Использование полученных данных в качестве граничных условий для трехмерных расчетов оболочек горячих экзопланет-гигантов.
2. Расширение химического состава компонентов при моделировании верхних атмосфер.
3. Исследование образования облачного слоя в верхних атмосферах.
4. Интерпретация спектральных наблюдений верхних атмосфер на планируемой к запуску космической обсерватории Спектр-УФ.

Благодарности. Соискатель выражает особую благодарность научному руководителю Жилкину А.Г. за всестороннюю помощь в проведении исследований, ценные замечания, переданные знания и формирование научного мышления и мировоззрения. Соискатель благодарен Шематовичу В. И. и Шай-

хисламову Э.Ф. за всестороннюю помощь, переданные знания и совместные научные обсуждения.

Соискатель благодарен коллективу Института астрономии РАН за научные обсуждения, дружелюбную обстановку, которые были очень важны при проведении научных исследований.

Список литературы

1. N. Madhusudhan, M. Agundez, J.L. Moses, Y. Hu, *Space Science Reviews* **205**, 1-4, 285 (2016).
2. L.D. Deming, S. Seager, *J. Geophys. Res.: Planets* **122**, 53 (2017).
3. R. Hobbs, O. Shorttle, N. Madhusudhan, P. Rimmer, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **487**, 2242 (2019).
4. R.I. Dawson, J.A. Johnson, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **56**, 175 (2018).
5. S.-J. Paardekooper, A. Johansen, *Space Science Reviews* **214**, 38 (2018).
6. S. Dash, M. Liton, K. Willacy, et al., *Astrophys. J.* **932**, id.20 (21 pp.) (2022).
7. B. Drummond, P. Tremblin, I. Baraffe, et al., *Astron. and Astrophys.* **594**, A69 (2016).
8. S.-M. Tsai, J.R. Lyons, L. Grosheintz, et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **228**, 20 (2017).
9. E.K.H. Lee, S.-M. Tsai, M. Hammond, et al., *Astron. and Astrophys.* **672**, id.A110 (13 pp.) (2023).
10. Y.G. Gladysheva, A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, *INASAN Science Reports* **7**, 195 (2022).
11. А.Г. Жилкин, Ю.Г. Гладышева, В.И. Шематович, Д.В. Бисикало, *Астрон. журн.* **100** (12), 1190 (2023).
12. А.Г. Жилкин, Ю.Г. Гладышева, В.И. Шематович, Г.Н. Цуриков, Д.В. Бисикало, *Астрон. журн.* **101** (2023) (в печати).
13. Y.G. Gladysheva, A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, *INASAN Science Reports* **5**, 1 (2020).
14. A.G. Zhilkin, Y.G. Gladysheva, D.V. Bisikalo, *INASAN Science Reports* **8**, 26 (2023).

15. Y.G. Gladysheva, A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, INASAN Science Reports **8**, 34 (2023).
16. A.P. Showman, J.J. Fortney, Y. Lian, et al., *Astrophys. J.* **699**, 564 (2009).
17. J.I. Moses, C. Visscher, J.J. Fortney, et al., *Astrophys. J.* **737**, 15 (2011).
18. B. Drummond, N. J. Mayne, J. Manners, et al., *Astrophys. J.* **855**, L31 (2018).
19. D.V. Bisikalo, V.I. Shematovich, P.V. Kaygorodov, A.G. Zhilkin, *Phys. Usp.* **64** (8) (2021).
20. J.E. Owen, R.A. Murray-Clay, E. Schreyer, et al., *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **518**, 4357 (2023).
21. R. Yelle, H. Lammer, and W.-H. Ip, *Space Science Reviews* **139**, 437 (2008).
22. R.V. Yelle, *Icarus* **170**, 167 (2004).
23. A. Garcia Munoz, *Planet. Space Sci.* **55**, 1426 (2007).
24. T.T. Koskinen, M.J. Harris, R.V. Yelle, P. Lavvas, *Icarus* **226**, 1678 (2013).
25. T.T. Koskinen, R.V. Yelle, M.J. Harris, P. Lavvas, *Icarus* **226**, 1695 (2013).
26. I.F. Shaikhislamov, M.L. Khodachenko, Y.L. Sasunov, et al., *Astrophys. J.* **795**, 132 (2014).
27. D. Bisikalo, P. Kaygorodov, D. Ionov, et al., *Astrophys. J.* **764**, 19 (2013).
28. V.I. Shematovich, D.E. Ionov, H. Lammer, *Astron. and Astrophys.* **571**, A94 (2014).
29. D.E. Ionov, Y.N. Pavlyuchenkov, V.I. Shematovich, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **476**, 5639 (2018).
30. A. Garcia Munoz, *Icarus* 392, id. 115373 (2023).
31. H. Lammer, J.F. Kasting, E. Chassefiere, et al., *Space Science Reviews* **139**, 399 (2008).
32. B.J. Fulton, E.A. Petigura, A.W. Howard, et al., *Astron. J.* **154**, 109 (2017).

33. T. Mazeh, T. Holczer, S. Faigler, *Astron. and Astrophys.* **589**, A75 (2016).
34. T.A. Berger, D. Huber, E. Gaidos, J.L. van Saders, *Astrophys. J.* **866**, 99 (2018).
35. J.E. Owen, I.F. Shaikhislamov, H. Lammer, L. Fossati, M.L. Khodachenko, *Space Science Reviews* **216**, 129 (2020).
36. A. Vidal-Madjar, A. Lecavelier des Etangs, J.-M. Desert, G.E. Ballester, et al., *Nature* **422**, 143 (2003).
37. J.L. Linsky, H. Yang, K. France, et al. *Astrophys. J.* **717**, 1291 (2010).
38. A. Lecavelier des Etangs, V. Bourrier, P.J. Wheatley, et al., *Astron. and Astrophys.* **543**, L4 (2012).
39. L. Ben-Jaffel, G.E. Ballester, *Astron. and Astrophys.* **553**, A52 (2013).
40. D. Ehrenreich, V. Bourrier, P.J. Wheatley, et al., *Nature* **522**, 459 (2015).
41. V. Bourrier, A. Lecavelier des Etangs, V. Ehrenreich, et al., *Astron. and Astrophys.* **620**, A147 (2018).
42. J.J. Spake, D.K. Sing, T.M. Evans, et al., *Nature* **557**, 68 (2018).
43. D.K. Sing, P. Lavvas, G.E. Ballester, et al., *Astron. J.* **158**, 91 (2019).
44. J.E. Owen, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* **47**, 67 (2019).
45. J.M. Chadney, T.T. Koskinen, M. Galand, et al., *Astron. and Astrophys.* **608**, A75 (2017).
46. M. Lampon, M. Lopez-Puertas, L.M. Lara, et al., *Astron. and Astrophys.* **636**, A13 (2020).
47. T.T. Koskinen, P. Lavvas, C. Huang, et al., *Astrophys. J.* **929**, 52 (2022).
48. R.O.P. Loyd, T.T. Koskinen, K. France, et al., *Astrophys. J.* **834**, L17 (2017).
49. M. Mansfield, J.L. Bean, A. Oklopčić, et al., *Astrophys. J.* **868**, L34 (2018).
50. H. Lammer, F. Selsis, I. Ribas, et al., *Astrophys. J.* **598**, L121 (2003).

51. D. Kubyshkina, L. Fossati, N.V. Erkaev, et al., *Astrophys. J.* **866**, L18 (2018).
52. E.D. Lopez, J.J. Fortney, N. Miller, *Astrophys. J.* **761**, 59 (2012).
53. J.E. Owen, Y. Wu, *Astrophys. J.* **847**, 29 (2017).
54. L. Ben-Jaffel, *Astrophys. J.* **671**, L61 (2007).
55. L. Ben-Jaffel, S. Sona Hosseini, *Astrophys. J.* **709**, 1284 (2010).
56. A. Vidal-Madjar, J. Desert, A. Lecavelier des Etangs, et al., *Astrophys. J.* **604**, L69 (2004).
57. A. Oklopčić, C.M. Hirata, *Astrophys. J.* **855**, L11 (2018).
58. E.N. Parker, *Astrophys. J.* **128**, 664 (1958).
59. R.A. Murray-Clay, E.I. Chiang, N. Murray, *Astrophys. J.* **693**, 23 (2009).
60. J.H. Guo, *Astrophys. J.* **733**, 98 (2011).
61. D.E. Ionov, V.I. Shematovich, Ya.N. Pavlyuchenkov, *Astron. Rep.* **61**, 387 (2017).
62. F. Tian, O.B. Toon, A.A. Pavlov, H. De Sterck, *Astrophys. J.* **612**, 1049 (2005).
63. T. Penz, N.V. Erkaev, Y.N. Kulikov, et al., *Planetary and Space Science* **56**, 1260 (2008).
64. T.T. Koskinen, J. Y-K. Cho, N. Achilleos, A.D. Aylward, *Astrophys. J.* **722**, 178 (2010).
65. A.S. Arakcheev, A.G. Zhilkin, P.V. Kaigorodov, D.V. Bisikalo, A.G. Kosovichev, *Astron. Repts.* **61**, 932 (2017).
66. A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, *Astron. Repts.* **63**, 550 (2019).
67. A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, P.V. Kaygorodov, *Astron. Repts.* **64**, 259 (2020).
68. A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, *Astron. Repts.* **64**, 563 (2020).
69. A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, *Universe* **7**, 422 (2021).
70. A.G. Zhilkin, *Astron. Repts.* **67**, 307 (2023).

71. G.B. Trammell, P. Arras, Z.-Y. Li, *Astrophys. J.* **728**, 152 (2011).
72. D. McElroy, C. Walsh, A.J. Markwick, et al., *Astron. and Astrophys.*, **550**, A36 (2013).
73. W.F. Huebner, J. Mukherjee, *Planet. Space Sci.* **106**, 11 (2015).
74. T.N. Woods, G.J. Rottman, S.M. Bailey, et al., *Sol. Phys.*, **177**, 133 (1998).
75. Y.B. Zel'dovich, Y.P. Raizer, *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena* (1967).
76. L. Spitzer, *Astrophys. J.*, **109**, 337 (1949).
77. N.G. Bochkarev, *Fundamentals of Interstellar medium Physics* (1992).
78. A. Dalgarno, R.A. McCray, *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **10**, 375 (1972).
79. L. Spitzer, *Physical processes in the interstellar medium* (1978).
80. S. Miller, T. Stallard, J. Tennyson, H. Melin, *Journal of Physical Chemistry A* **117**, 9770 (2013).
81. Д.В. Бисикало, А.Г. Жилкин, А.А. Боярчук, *Газодинамика тесных двойных звезд* (М.: Физматлит, 2013).
82. E.N. Parker, *Astrophys. J.* **132**, 821 (1960).
83. R.S. Steinolfson, F.J. Hundhausen, *J. Geophys. Res.* **93**, 14269 (1988).
84. I.I. Roussev, T.I. Gombosi, I.V. Sokolov, *Astrophys. J.* **595**, L57 (2003).
85. T.L. Totten, J.W. Freeman, S. Arya, *J. Geophys. Res.* **100**, 13 (1995).
86. G.B. Field, *Astrophys. J.* **142**, 531 (1965).
87. T. Yoneyama, *Publ. Astron. Soc. Japan* **25**, 349 (1973).
88. D.V. Bisikalo, V.I. Shematovich, *Astron. Repts.* **59**, 836 (2015).
89. A.A. Boyarchuk, B.M. Shustov, I.S. Savanov, M.E. Sachkov, et al., *Astron. Repts.* **60**, 1, 2016.

90. C.K. Harada, E. M.-R. Kempton, E. Rauscher, et al., *Astrophys. J.* **909**, 85 (2021).
91. C. Helling, eprint arXiv:2205.00454 (2022).
92. A.J. Tylka, C.M.S. Cohen, W.F. Dietrich, M.A. Lee, et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **164**, 536 (2006).
93. C.D. Cohen, A.C. Hindmarsh and P.F. Dubois, *Computers in physics*, **10**, 138 (1996).
94. O. Raukunen, M. Paasilta, R. Vainio, J.V. Rodriguez, et al., *J. Space Weather Space Clim.*, **10**, 24 (2020).
95. V.I. Shematovich, M.Ya. Marov, *Phys. Usp.* **61**, 217 (2018).
96. D.V. Bisikalo, V.I. Shematovich, A.A. Cherenkov, L. Fossati, C. Moestl, *Astrophys. J.* **869**, 108 (2018).
97. M.A. Tilley, A. Segura, V. Meadows, S. Hawley, J. Davenport, *Astrobiology*, **19**, 64 (2019).
98. D.V. Bisikalo, V.I. Shematovich, P.V. Kaygorodov, A.G. Zhilkin, *Phys. Usp.* **64**, 747 (2021).
99. A. Segura, L.M. Walkowicz, , V. Meadows, J. Kasting, S. Hawley, Suzanne , *Astrobiology*, **10**, (2010).
100. D. Atri, S.R.C. Mogan, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **500**, L1 (2021).
101. L.N.R. do Amaral, L. Barnes, A. Segura, R. Luger, *Astrophys. J.* **928**, 12 (15 pp.) (2022).
102. R. Luger, R. Barnes, E. Lopez, J. Fortney, B. Jackson, V. Meadows, *Astrobiology* **15**, 57 (2015).
103. H. Maehara, T. Shibayama, S. Notsu, Y. Notsu, et al., *Nature* **485**, 478 (2012).
104. Y. Notsu, H. Maehara, S. Honda, S.L. Hawley, et al., *Astrophys. J.* **876**, 58 (2019).

105. M.N. Guenther, Z. Zhan, S. Seager, P.B. Rimmer, et al., *Astron. J.* **159**, 60 (2020).
106. D.J. Hollenbach, H.W. Yorke, D. Johnstone, in *Protostars and Planets IV*, ed. V. Mannings, A.P. Boss, S.S. Russell (Tucson, AZ: Univ. Arizona Press), p. 401 (2000).
107. I. Ribas, E.F. Guinan, M. Gudel, M. Audard, *Astrophys. J.* **622**, 1, 680, (2005).
108. A.G. Sreejith, L. Fossati, A. Youngblood, K. France, S. Ambily, *Astron. Astrophys.* **664**, A67, (2020).
109. K. France, N. Arulanantham, L. Fossati, A.F. Lanza, et al., *Astrophys. J. Supl. Ser.* **239**, id. 16, 24 pp. (2018).
110. J.L. Linsky, J. Fontenla, K. France, *Astrophys. J.* **780**, id. 61, 11 pp., (2014).
111. A. Garcia Munoz, *Planet. Space Sci.* **55**, 1426 (2007).
112. M. Salz, S. Czesla, P.C. Schneider, J.H M.M. Schmitt, *Astron. Astrophys.* **586**, A75 (2016).
113. C.P. Johnstone, M. Gudel, H. Lammer, K.G. Kislyakova, *Astron. Astrophys.*, **617**, A107, (2018).
114. P.M. Banks, G. Kockarts, *Aeronomy* (New York: Academic Press, 1973).
115. A. Garcia Munoz, *Planet. Space Sci.* **55**, 1414 (2007).
116. R.W. Schunk, A.F. Nagy, *Ionospheres: physics, plasma physics, and chemistry* (Cambridge Univ. Press, 2nd Ed., 2000, 2009).
117. Mayor M., Queloz D., *Nature* **378**, 355 (1995).
118. A.G. Zhilkin, D.V. Bisikalo, and V. I. Shematovich, *Astron. Rep.* **66**, 1008 (2022).
119. Самарский А.А., Николаев Е.С., *Методы решения сеточных уравнений* (М.: Наука, 1978).
120. M.G. Malygin, R. Kuiper, H. Klahr, et al., *Astron. Astrophys.* **568**, A91, (2014).

121. R.S. Freedman, J. Lustig-Yaeger, J.J. Fortney, et al., *Astrophys. J. Supl. Ser.* **214**, 25, (2014).
122. R.S. Freedman, M.S. Marley, K. Lodders, *Astrophys. J. Supl. Ser.* **174**, 504, (2008).
123. B.M. Shustov, M.E. Sachkov, S.G. Sichevsky, R.N. Arkhangel'sky, et al., *Solar System Research*, **55**(7), 677 (2021).
124. В.И. Шематович, И.Ф. Шайхисламов, А.Г. Жилкин, И.С. Саванов, Г.Н. Цуриков, Д.В. Бисикало, *ФИЗМАТ*, **1**, 33 (2023).
125. A. Segura, L.M. Walkowicz, , V. Meadows, J. Kasting, S. Hawley, Suzanne , *Astrobiology*, **10**, (2010).
126. M.A. Tilley, A. Segura, V. Meadows, S. Hawley, J. Davenport, *Astrobiology*, **19**, 64 (2019).
127. D. Atri, S.R.C. Mogan, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **500**, L1 (2021).
128. L.N.R. do Amaral, L. Barnes, A. Segura, R. Luger, *Astrophys. J.* **928**, 12 (15 pp.) (2022).
129. D.V. Bisikalo, V.I. Shematovich, A.A. Cherenkov, L. Fossati, C. Moestl, *Astrophys. J.* **869**, 108 (2018).
130. D.V. Bisikalo, A.A. Cherenkov, V.I. Shematovich, L. Fossati, C. Moestl, *Astron. Rep.*, **62**, 648 (2018).
131. A.A. Cherenkov, I.F. Shaikhislamov, D.V. Bisikalo, V.I. Shematovich, L. Fossati, C. Moestl, *Astron. Rep.*, **63**, 94 (2019).
132. A.A. Boyarchuk, B.M. Shustov, I.S. Savanov, M.E. Sachkov, et al., *Astron. Repts.* **60**, 1, 2016.
133. L. Fossati, C.A. Haswell, C.S. Froning, L. Hebb, et al., *Astrophys. J.* **714**, L222 (2010).
134. M. Holmstrom, A. Ekenback, F. Selsis, T. Penz, et al., *Nature* **451**, 970 (2008).
135. I.F. Shaikhislamov, M.L. Khodachenko, H. Lammer, K.G. Kislyakova, et al., *Astrophys. J.* **832**, id. 173 (20 pp.) (2016).

136. I.F. Shaikhislamov, M.L. Khodachenko, H. Lammer, K.G. Berezutsky, A. G. , et al., MNRAS **481**, 5315 (2018).
137. M.L. Khodachenko, I.F. Shaikhislamov, H. Lammer, A.G. Berezutsky, et al., Astrophys. J. **885**, id. 67 (20 pp.) (2019).
138. P. Tremblin and E. Chiang, MNRAS, **428**, 2565, 2013.
139. A. Vidal-Madjar, A. Lecavelier des Etangs, J. M. D´esert, G. E. Ballester, R. Ferlet, G. H´ebrard, and M. Mayor, Nature, **422**, 143, 2003.
140. M. Holmstrom, A. Ekenback, F. Selsis, T. Penz, H. Lammer, and P. Wurz, Nature, **451**, 970, 2008.
141. V. I. Shematovich, D. V. Bisikalo, and A. G. Zhilkin, Astronomy Reports, **65**, 203, 2021.
142. B. M. Smirnov, Physics Uspekhi, **44**, 221, 2001.
143. B. G. Lindsay and R. F. Stebbings, Journal of Geophysical Research (Space Physics), **110**, A12213, 2005.
144. Y. Nakai, T. Shirai, T. Tabata, and R. Ito, Atomic Data and Nuclear Data Tables, **37**, 69, 1987.
145. Самарский А.А., *Теория разностных схем* (М.: Наука, 1989).
146. S.K. Godunov, Mat. Sb. **47**, 271 (1959).
147. P.L. Roe, Lect. Notes Phys., **141**, 354 (1980).
148. B. Einfeldt, SIAM J. Numer. Anal. **25**, 294 (1988).
149. S. R. Chakravarthy and S. Osher, AIAA Papers № 85-0363 (1985)

Список рисунков

1.1	Константы скорости реакций фотоионизации и фотодиссоциации k_{ph} (слева) и соответствующие величины энергии излучения Q_{ph} , поглощаемые средой в единицу времени в расчете на один атом (справа). Сплошными линиями показаны зависимости k_{ph} и Q_{ph} от оптической толщины τ , рассчитанные по формулам (1.43) и (1.50) для горячей планеты, находящейся на расстоянии 0.05 а.е. от родительской звезды. Пунктирными линиями показаны соответствующие аналитические аппроксимации.	22
2.1	Профили плотности (слева) и температуры (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для различных вариантов расчета (модели a1–a4).	39
2.2	Профили скорости газа v (сплошные линии) и скорости звука c_s (пунктирные линии) в верхней атмосфере горячего юпитера для модели a2 (слева) и a3 (справа).	39
2.3	Профили оптической толщины τ (слева) и степени ионизации x_{ion} (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для различных вариантов расчета.	40
2.4	Профили концентраций компонентов n_α в верхней атмосфере горячего юпитера для модели a2 (слева) и a3 (справа).	41
2.5	Профили функций нагрева Γ и охлаждения Λ в верхней атмосфере горячего юпитера для модели a2 (слева) и a3 (справа).	42
2.6	Профили плотности (слева) и температуры (справа) в верхней атмосфере теплого нептона для различных вариантов расчета (модели b1–b4).	44
2.7	Профили скорости газа v (сплошные линии) и скорости звука c_s (пунктирные линии) в верхней атмосфере теплого нептона для модели b2 (слева) и b3 (справа).	44
2.8	Профили оптической толщины τ (слева) и степени ионизации x_{ion} (справа) в верхней атмосфере теплого нептона для различных вариантов расчета.	45

2.9	Профили концентраций компонентов n_α в верхней атмосфере теплого нептунa для модели b2 (слева) и b3 (справа).	46
2.10	Константы скорости реакций фотоионизации k_{ph} водорода H (слева), гелия He (в центре) для моделей $\chi 1 - \chi 5$ и выражения $S_i(\lambda)$ (справа)	48
2.11	Полная энергия поглощенного излучения Q_{ph} водорода H (слева) и гелия He (справа) для моделей $\chi 1 - \chi 5$	49
2.12	Профили скоростей газа v (слева) и среднего молекулярного веса μ (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для различных вариантов расчета (модели $\chi 1 - \chi 5$).	51
2.13	Профили температуры T (слева) и плотности ρ (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для различных вариантов расчета (модели $\chi 1 - \chi 5$).	51
2.14	Профили степени ионизации v (слева) и темпа потери массы $\dot{M}$ (справа) для моделей $\chi 1 - \chi 5$	52
2.15	Профили распределения концентраций компонентов n_s для моделей $\chi 1, \chi 3, \chi 5$	52
2.16	Профили эффективных показателей политропы κ_P (сплошная линия) и κ_T (пунктирная линия) для модели a2 (горячий юпитер). .	53
2.17	Изобарическая мода тепловой неустойчивости в химически реагирующем газе	57
2.18	График зависимости функций радиуса давления P от концентрации молекулярного водорода n_{H_2}	58
2.19	Зависимость давления от концентрации молекулярного водорода в условиях верхней атмосферы горячего юпитера для различных значений оптической толщины τ (слева), зависимость эффективного показателя политропы от концентрации молекулярного водорода H_2 в условиях верхней атмосферы горячего юпитера для различных значений оптической толщины τ (справа).	59
3.1	Профили плотности (вверху слева), температуры (вверху справа), скорости (внизу слева) и степени ионизации (внизу справа) в верхней атмосфере горячего юпитера, полученные с учетом (сплошные линии) и без учета (пунктирные линии) приливной силы.	63

3.2	Профили плотности (слева) и температуры (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для моделей $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (вверху), $n_{\text{atm}} = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (в центре) и $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (внизу).	65
3.3	Профили скорости газа v (жирные линии) и скорости звука c_s (тонкие линии) в верхней атмосфере горячего юпитера для моделей $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (вверху), $n_{\text{atm}} = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (в центре) и $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (внизу).	67
3.4	Профили концентраций n_α (слева) и диффузионных скоростей w_α основных компонентов в верхней атмосфере горячего юпитера для модели $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ для потока жесткого излучения звезды 1X (вверху), 10X (в центре) и 100X (внизу).	68
3.5	Профили функций нагрева Γ и охлаждения Λ (справа) в верхней атмосфере горячего юпитера для модели $n_{\text{atm}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ для потока жесткого излучения звезды 1X (вверху), 10X (в центре) и 100X (внизу).	70
3.6	Профили плотности, температуры (вверху слева), скорости (вверху справа), концентраций компонентов (внизу слева) и функций нагрева-охлаждения (внизу справа) в верхней атмосфере горячего юпитера перед вспышкой звезды.	73
3.7	Радиальные профили температуры (вверху) и скорости (внизу) в верхней атмосфере горячего юпитера для модели X1. Каждая кривая соответствует различному времени, прошедшему от начала звездной вспышки.	75
3.8	То же самое, что и на рис. 3.7, но для модели X2.	75
3.9	То же самое, что и на рис. 3.7, но для модели X3.	76
3.10	Профили концентраций компонентов в верхней атмосфере горячего юпитера для модели X1 в различные моменты времени от начала вспышки.	77
3.11	То же самое, что и на рис. 3.10, но для модели X2.	78
3.12	То же самое, что и на рис. 3.10, но для модели X3.	79
3.13	Профили отношения концентрации атомарного водорода n_{H} текущего состояния атмосферы к соответствующему значению до вспышки n_{H}^0 для модели X3 одинарной (слева) и X2X3 триггерной (справа) вспышки.	79

3.14	Изменение темпа потери массы $\dot{M}$ в результате воздействия одинарной (слева) и триггерной (справа) вспышки.	81
3.15	Радиальные профили температуры (вверху) и скорости (внизу) в верхней атмосфере горячего юпитера для модели X2X3. Каждая кривая соответствует различному времени, прошедшему от начала звездной вспышки.	83
3.16	Профили концентраций компонентов в верхней атмосфере горячего юпитера для модели X2X3 в различные моменты времени от начала вспышки.	84
A.1	Профили плотности (слева) и температуры (справа) для различных вариантов расчета.	106
A.2	Профили среднего молекулярного веса μ (слева) и степени ионизации x_{ion} (справа) для различных вариантов расчета.	107
A.3	Профили концентраций компонентов n_s для модели 1 (слева) и 3 (справа).	107
A.4	Профили функций нагрева Γ и охлаждения Λ для модели 1 (слева) и 3 (справа).	108
B.1	Слева, вверху — зависимость концентрации N_{ENA} от времени t в случае $k_{\text{exh}} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$ и $k_{\text{exh}} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$ (а); справа, вверху — разница между численным и аналитическим решениями для N_{ENA} (b); слева, внизу — зависимость от времени концентраций N_{ENA} и p (с); справа, внизу — отклонение концентраций N и N^+ от их начальных значений (d).	117
B.2	Слева — зависимость концентраций N_{ENA} и p от времени t (а); справа — отклонение концентраций N , N^+ , He и He^+ от их начальных значений (b).	118
B.3	Распределение плотности (цвет, изолинии) и скорости (стрелки) в орбитальной плоскости планеты на момент времени, равный примерно одной трети P_{orb} без учета (слева) и с учетом (справа) реакций перезарядки. Значения плотности выражены в единицах ρ_w (см. текст). Пунктирной линией показана граница полости Роша. Светлый кружок в центре соответствует фотометрическому радиусу планеты R_p . Звезда находится слева.	120

- Б.4 Распределение концентрации атмосферного атомарного водорода (цвет, изолинии) и скорости (стрелки) в орбитальной плоскости планеты на момент времени, равный примерно одной трети P_{orb} без учета (слева) и с учетом (справа) реакций перезарядки. Обозначения те же, что и на рис. Б.3. 121
- Б.5 Распределение концентрации ЭНА водорода (цвет, изолинии) и скорости (стрелки) в орбитальной плоскости планеты на момент времени, равный примерно одной трети P_{orb} в модели, учитывающей перезарядку. 122

Список таблиц

1	Сетка реакций водородно-гелиевой химии. Константа скорости для трехчастичной реакции R5 имеет размерность $\text{см}^6/\text{с}$, для фотопроцессов (R23–R30) — с^{-1} , а для всех остальных реакций — $\text{см}^3/\text{с}$	16
2	Коэффициенты аппроксимационной формулы (1.51) для поглощаемой энергии излучения Q_{ph} в процессах фотоионизации и фотодиссоциации.	24
3	Некоторые коэффициенты, используемые для описания процессов, связанных с нейтральными частицами. Параметр γ_n характеризует поляризуемость нейтральной частицы (см^3). Коэффициенты A_α и β_α определяют аппроксимацию (1.83) коэффициента теплопроводности λ ($\text{эрг см}^{-1} \text{с}^{-1} \text{К}^{-1}$) для нейтральных частиц. . .	30
4	Характеристики полученных численных решений для горячего юпитера (модели a1–a4) и теплого нептона (модели b1–b4): T_{max} — максимальная температура, r_s — положение звуковой точки, $\dot{M}_{\text{pl}}$ — темп потери массы.	43
5	Параметр $\dot{M}$, определяющий верхнюю оценку темпа потери массы $\dot{M}_{\text{pl}}$ для различных вариантов расчета.	71

Приложение А

Гидростатическая модель водородно-гелиевой атмосферы горячего юпитера

Рассматривается гидростатическая модель водородно-гелиевой атмосферы горячего юпитера. Равновесное состояние атмосферы можно описать с помощью следующей системы уравнений:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_{\text{pl}}}{r^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$P = \frac{k_{\text{B}} \rho T}{\mu m_{\text{p}}}, \quad (\text{A.2})$$

$$K_s = L_s n_s, \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma = \Lambda. \quad (\text{A.4})$$

Здесь (A.1) является уравнением гидростатики, (A.2) — уравнение состояния, уравнение (A.3) определяет химическое (ионизационное) равновесие, а (A.4) — тепловой баланс. Используются обозначения для величин: r — радиальная координата, отсчитываемая от центра планеты, ρ — плотность, P — давление, T — температура, μ — средний молекулярный вес, M_{pl} — масса планеты, G — гравитационная постоянная, k_{B} — константа Больцмана, m_{p} — масса протона. Для каждого компонента с номером s определены концентрация n_s , темп производства K_s ($\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$) и скорость расхода L_s (с^{-1}). В уравнении теплового баланса величины Γ и Λ представляют собой объемные коэффициенты нагрева и охлаждения соответственно ($\text{эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$).

Предполагается, что атмосфера горячего юпитера имеет водородно-гелиевый химический состав — H , H^- , H^+ , H_2 , H_2^+ , H_3^+ , He , He^+ , HeH^+ , а также электроны e^- . Набор компонентов, сетка реакций, а также учет функций нагрева и охлаждения в данной модели аналогичны модели, описанной в главе 1.

Для данной модели предполагалось, что профили температуры $T(r)$ и среднего молекулярного веса $\mu(r)$ известны, а из уравнений (A.1) и (A.2) можно получить профиль плотности

$$\rho(r) = \rho_{\text{atm}} \frac{\mu(r)}{\mu_{\text{atm}}} \frac{T_{\text{atm}}}{T(r)} \exp \left[-\frac{GM_{\text{pl}} m_{\text{p}}}{k_{\text{B}}} \int_{R_{\text{pl}}}^r \frac{\mu(x) dx}{T(x) x^2} \right], \quad (\text{A.5})$$

где R_{pl} — фотометрический радиус горячего юпитера, а ρ_{atm} , T_{atm} и μ_{atm} — значения величин на фотометрическом радиусе. Оставшиеся два уравнения (A.3) и (A.4) перепишем для нестационарного случая,

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} = K_s - L_s n_s, \quad (\text{A.6})$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \Gamma - \Lambda, \quad (\text{A.7})$$

где удельная внутренняя энергия

$$\varepsilon = \frac{k_B T}{(\gamma - 1) \mu m_p}, \quad (\text{A.8})$$

а $\gamma = 5/3$ — показатель адиабаты (учитываются только поступательные степени свободы частиц). В пределе при $t \rightarrow \infty$ решения этих уравнений переходят в решения соответствующих стационарных уравнений (A.3) и (A.4).

Численный алгоритм сводится к следующему. В интервале $R_{\text{pl}} \leq r \leq r_{\text{max}}$ строится расчетная сетка, узлы которой r_i , $i = 0, \dots, N$ в общем случае распределены неравномерно. В начальный момент времени $t = 0$ задаем изотермическую атмосферу с однородным химическим составом. В качестве основного параметра решения используется значение плотности на фотометрическом радиусе ρ_{atm} . Зная распределения всех величин в момент времени t^n и выбирая некоторый шаг Δt , величины на следующем временном слое $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ находим в несколько последовательных этапов. Средний молекулярный вес μ при этом всегда можно вычислить по известным значениям концентраций компонентов n_s с помощью формулы (1.16).

1) В каждой расчетной ячейке $i + 1/2$ ($r_i \leq r \leq r_{i+1}$) решаются уравнения химической кинетики (A.6) и находятся значения концентраций компонентов $n_{s,i+1/2}^{n+1}$. Для решения этих уравнений использовался алгоритм, описанный в разделе 1.2.2 главы 1.

2) В каждой ячейке $i + 1/2$ решается уравнение теплового баланса (A.7) и с учетом уравнения состояния (A.8) находятся новые значения температуры $T_{i+1/2}^{n+1}$. Для численного решения уравнения (A.7) использовалась неявная схема, основанная на методе Ньютона.

3) По найденным на предыдущих этапах профилям μ и T численно вычисляется интеграл (A.5) и находится новый профиль плотности $\rho_{i+1/2}^{n+1}$. Поскольку плотность изменилась, то концентрации компонентов n_s пересчитываются при

условии сохранения массового содержания:

$$n_s^{n+1} \rightarrow \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n} n_s^{n+1}. \quad (\text{A.9})$$

Здесь слева стоит концентрация, полученная на первом этапе алгоритма, а выражение справа определяет новое значение концентрации.

Выполнение этих трех этапов продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто условие сходимости решения. Шаг по времени Δt во всех расчетах задавался постоянным. Из-за достаточно большой теплоемкости атмосферы характерное время выхода к стационарному решению оказывается порядка нескольких месяцев, что составляет десятки орбитальных периодов планеты. На характерное время установления естественно также влияют скорости химических, ионизационных и диссоциативных процессов.

На рис. А.1–А.4 представлены результаты расчетов гидростатической структуры атмосферы планеты HD 209458b, параметры которой приведены в главе 2.

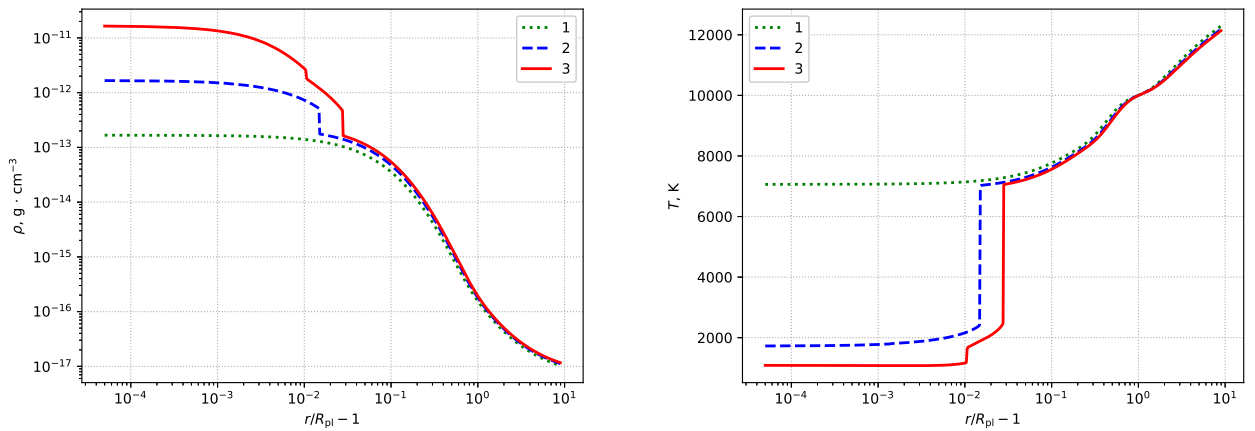


Рисунок А.1 — Профили плотности (слева) и температуры (справа) для различных вариантов расчета.

В качестве параметра модели задавалось значение плотности на фотометрическом радиусе $\rho_{\text{atm}} = n_{\text{atm}} m_p$, где n_{atm} — соответствующая концентрация. Расчеты проводились для трех вариантов: $n_{\text{atm}} = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ (модель 1), $n_{\text{atm}} = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ (модель 2) и $n_{\text{atm}} = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (модель 3). Химический состав атмосферы характеризовался параметром χ , который принимался равным $\chi = 0.05$. В начальный момент времени массовые содержания всех фракций за исключением атомарного водорода H и гелия He задавались в виде очень малых величин.

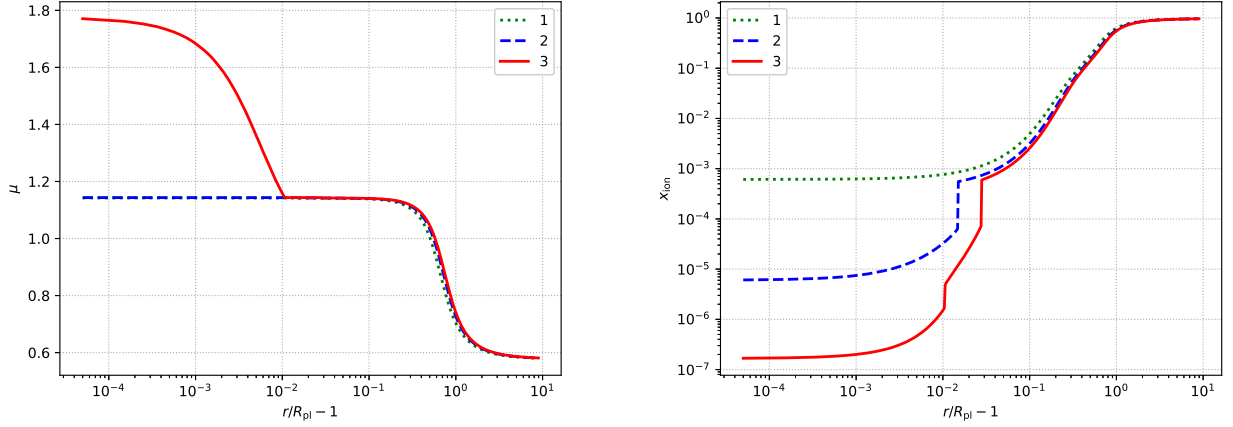


Рисунок А.2 — Профили среднего молекулярного веса μ (слева) и степени ионизации x_{ion} (справа) для различных вариантов расчета.

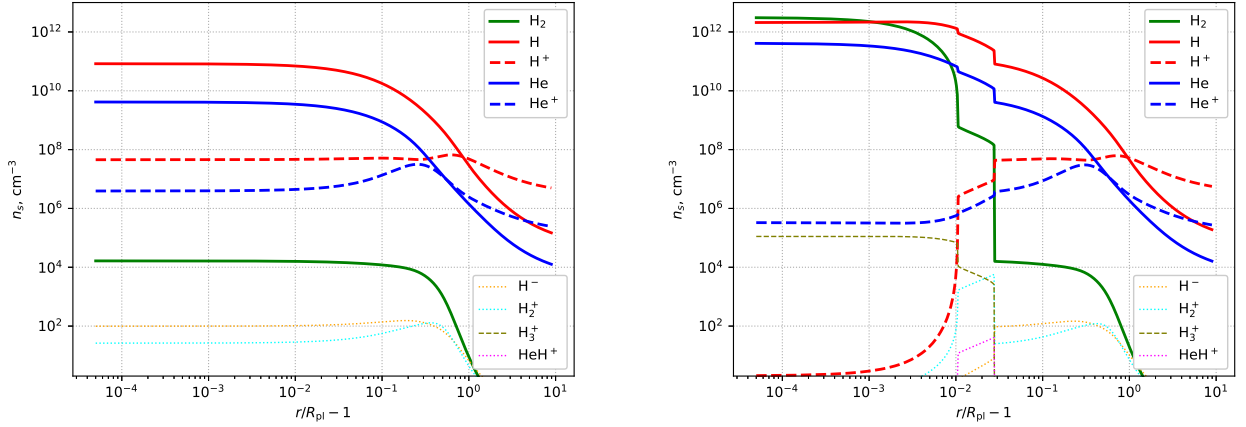


Рисунок А.3 — Профили концентраций компонентов n_s для модели 1 (слева) и 3 (справа).

Анализ результатов расчетов позволяет прийти к следующим выводам. Самые глубокие слои атмосферы (толщина менее $0.05R_{\text{pl}}$) характеризуются высокой плотностью (левая панель рис. А.1) и низкой температурой (правая панель рис. А.1). В модели 3 температура этих слоев оказывается порядка 1000 К. Далее температура начинает резко возрастать из-за эффективного нагрева жестким излучением звезды. На высоте более R_{pl} она остается уже фактически постоянной и равной порядка 10^4 К. Между этими двумя зонами формируется переходный слой атмосферы, в котором температура монотонно возрастает.

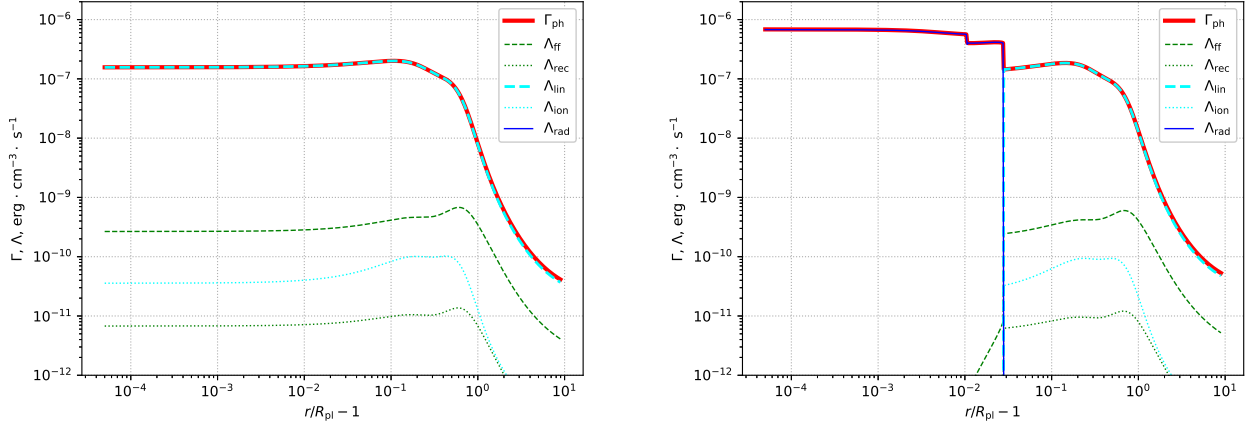


Рисунок А.4 — Профили функций нагрева Γ и охлаждения Λ для модели 1 (слева) и 3 (справа).

Во внутренних частях атмосферы степень ионизации x_{ion} близка к нулю (правая панель рис. А.2), а в самых внешних частях вещество является почти полностью ионизованным. Средний молекулярный вес μ (левая панель рис. А.2) во внешней атмосфере соответствует полностью ионизованной водородно-гелиевой плазме с заданным химическим составом (параметр χ). Во внутренней части величина μ соответствует смеси, состоящей в основном из атомов водорода и гелия. В модели 3 в самых глубоких слоях атмосферы получается много молекулярного водорода H_2 . Поэтому значение среднего молекулярного веса такой смеси увеличивается.

На рис. А.3 показаны высотные профили концентраций компонентов n_s для модели 1 (левая панель) и 3 (правая панель). Молекулярный водород в модели 1 существенной роли не играет. Его формирование (реакция R5 из табл. 1) происходит медленно из-за относительно высокой температуры (порядка 2000 K). Внутренние части атмосферы состоят из смеси, состоящей из нейтральных атомов водорода и гелия. Внешняя часть атмосферы состоит из водородно-гелиевой плазмы. В модели 3 температура во внутренних частях оказывается достаточно низкой (около 1000 K) и поэтому здесь формируется много молекул водорода H_2 . В переходной зоне атмосферы снова получаем нейтральную смесь атомов водорода и гелия. А самая внешняя область атмосферы, как и в модели 1, состоит из водородно-гелиевой плазмы.

Профили функций нагрева Γ и охлаждения Λ для моделей 1 (левая панель) и 3 (правая панель) представлены на рис. А.4. Функция нагрева показана

сплошной жирной линией. В модели 1 (низкая плотность) тепловой баланс определяется процессами излучения в линиях (главным образом в линии $\text{Ly}\alpha$), $\Lambda \approx \Lambda_{\text{lin}}$. В модели 3 (высокая плотность) эти процессы доминируют только во внешней части атмосферы. Во внутренних частях тепловой баланс определяется охлаждением за счет излучения молекул H_3^+ , $\Lambda \approx \Lambda_{\text{rad}}$. Остальные механизмы охлаждения дают малый вклад. Таким образом, можно сказать, что в каждой зоне атмосферы доминирует свой механизм охлаждения.

Приложение Б

Образование энергетических нейтральных атомов в оболочках горячих юпитеров

В данном разделе рассматриваются реакции перезарядки с протонами звездного ветра, протекающие в водородно-гелиевой оболочке горячего юпитера. Получена система дифференциальных уравнений химической кинетики для этих реакций на примере атомов водорода и гелия. Рассматриваются как аналитические решения этой системы, так и численные [138]. Представлены результаты трехмерного численного моделирования структуры протяженной оболочки типичного горячего юпитера с учетом ЭНА.

Транзитные спектры горячих юпитеров имеют ряд особенностей. Например, в работе [139] с помощью наблюдений на космическом телескопе им. Хаббла был получен спектр поглощения водорода в линии $\text{Ly}\alpha$ для горячего юпитера HD 209458b. Анализ спектра позволяет утверждать, что в окрестности планеты присутствуют атомы водорода, движущиеся к наблюдателю со скоростями порядка 130 км/с. Кроме того, наблюдается довольно равномерное поглощение в фиолетовой части в диапазоне скоростей от -130 до -45 км/с. Наконец, имеется поглощение в красной части спектра в диапазоне скоростей от 30 до 105 км/с. Как оказалось, такие свойства спектра очень трудно объяснить распределением нейтральных атомов водорода в самой оболочке планеты, а также возможными механизмами их ускорения. Для интерпретации свойств наблюдаемого спектра существует ряд возможных объяснений [55], [140], одним из которых является процесс формирования энергетических нейтральных атомов (ЭНА) водорода.

Энергетические нейтральные частицы в экзосферах планет Солнечной системы непосредственно регистрируются космическими аппаратами (см., например, [118; 141]). К их образованию приводит взаимодействие протонов солнечного ветра с компонентами верхней атмосферы в результате реакций перезарядки. Характерные скорости энергетических нейтральных частиц оказываются порядка скоростей протонов солнечного ветра. В результате на спектр поглощения в линии $\text{Ly}\alpha$ будет влиять не только распределение по скоростям нейтральных атомов водорода оболочки планеты, но и распределение по скоростям ЭНА водорода. Поэтому учет ЭНА водорода в численных моделях

протяженных оболочек горячих юпитеров является важным с точки зрения интерпретации наблюдений (см., например, [135]).

Б.1 Реакция перезарядки водорода

Для исследования структуры протяженных оболочек горячих юпитеров используется трехмерная численная модель, основанная на приближении многокомпонентной магнитной гидродинамики [138]. Эта модель, в частности, позволяет не только учитывать магнитное поле, но также и эволюцию химического состава оболочки. Помимо основной сетки реакций водородно-гелиевой химии, которые протекают в области протяженных оболочек горячих юпитеров (Таблица 1), для нее также характерны специфические реакции, обусловленные взаимодействием планеты с родительской звездой. Одной из таких реакций, является перезарядка нейтральных атомов оболочки протонами звездного ветра, в результате чего формируются ЭНА водорода. Эти реакции в силу малой концентрации ЭНА не вносят существенного вклада в изменения химического состава и не влияют на динамику оболочки [15]. Однако учет этих реакций важен с точки зрения интерпретации наблюдательных проявлений протяженных оболочек горячих юпитеров, поскольку характерные скорости ЭНА и атомов водорода в самой оболочке сильно различаются между собой.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда в реакциях перезарядки участвует только атомарный водород. Данная реакция может идти как в прямом, так и в обратном направлении. Ее формула имеет следующий вид:



Скорость протекания прямой реакции k_{exh} определяется относительной скоростью v протона p и атома водорода H , а также соответствующим сечением взаимодействия $\sigma_{\text{exh}}(v)$, зависящим от относительной скорости. Реакция (Б.1) является резонансной (см., например, [142]), т.е. идет с образованием промежуточной квазимолекулы. Сечение взаимодействия монотонно уменьшается с ростом относительной скорости, достигая максимума в нуле [143]. Скорость ре-

акции определяется выражением

$$k_{\text{exh}} = \langle \sigma_{\text{exh}} v \rangle = \int_{v_{\text{thr}}}^{\infty} \sigma_{\text{exh}}(v) v f(v) dv, \quad (\text{Б.2})$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по скоростям, нижний предел в интеграле v_{thr} определяет энергетический барьер, при котором начинается реакция, а $f(v)$ — функция распределения протонов по скоростям, которая учитывает температуру T_w и скорость v_w звездного ветра в окрестности планеты. В случае перезарядки водорода можно считать $v_{\text{thr}} = 0$. Для параметров ветра $T_w = 730000$ К и $v_w = 130$ км/с, соответствующих горячему юпитеру HD 209458b, получаем значение константы $k_{\text{exh}} = 6.64 \cdot 10^{-8}$ см³/с.

С другой стороны, известно, что солнечный ветер имеет быструю и медленную компоненты, скорости которых различаются почти в два раза. Поэтому константа реакции перезарядки k_{exh} также может соответствующим образом варьироваться.

Константа скорости обратной реакции (Б.2) вычисляется с помощью аналогичного выражения. Поскольку сечения этих реакций практически совпадают, то константы скоростей прямой и обратной реакции различаются незначительно. Поэтому в дальнейшем для упрощения расчетов будем считать их одинаковыми.

Введем обозначения для концентраций компонентов, принимающих участие в реакции перезарядки водорода:

$$n_1 = n(\text{p}), \quad n_2 = n(\text{H}_{\text{ENA}}), \quad n_3 = n(\text{H}), \quad n_4 = n(\text{H}^+). \quad (\text{Б.3})$$

Запишем для реакций (Б.1) уравнения химической кинетики. Методика получения этих уравнений описана в разделе 1.2.2. Система уравнений имеет следующий вид:

$$\dot{n}_1 = -F, \quad \dot{n}_2 = F, \quad \dot{n}_3 = -F, \quad \dot{n}_4 = F, \quad (\text{Б.4})$$

где F определяется соотношением

$$F = k_{\text{exh}}(n_1 n_3 - n_2 n_4). \quad (\text{Б.5})$$

Начальные значений концентраций компонентов обозначим в виде:

$$n_1(0) = a_1, \quad n_2(0) = a_2, \quad n_3(0) = a_3, \quad n_4(0) = a_4. \quad (\text{Б.6})$$

Нетрудно показать, что система обыкновенных дифференциальных уравнений (Б.4), (Б.5) имеет аналитическое решение, которое может быть записано следующим образом:

$$n_1 = \alpha + (a_1 - \alpha) e^{-\beta t}, \quad (\text{Б.7})$$

$$n_2 = a_2 + a_1 - n_1 \quad (\text{Б.8})$$

$$n_3 = a_3 - a_1 + n_1 \quad (\text{Б.9})$$

$$n_4 = a_4 + a_1 - n_1 \quad (\text{Б.10})$$

где обозначено

$$\alpha = (a_1 + a_2)(a_1 + a_4)/(a_1 + a_2 + a_3 + a_4), \quad (\text{Б.11})$$

$$\beta = k_{\text{exh}}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4). \quad (\text{Б.12})$$

Решение выражено через концентрацию протонов, поскольку формирование ЭНА определяет поток частиц звездного ветра. Стационарное решение можно получить, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$. Для концентрации протонов находим:

$$n_1 = \alpha, \quad (\text{Б.13})$$

а значения остальных компонентов n_2 , n_3 , n_4 определяются из соотношений (Б.8)–(Б.10).

Б.2 Реакция перезарядки для произвольного числа компонентов

Реакция перезарядки с протонами звездного ветра имеет место не только для атомарного водорода, но также и для других компонентов, входящих в состав протяженной оболочки. В общем виде прямую и обратную реакции перезарядки можно записать следующим образом:



где A_s — компонент сорта s , а A_s^+ — соответствующий ион.

Для концентраций протонов, ЭНА водорода, а также компонентов A_s , A_s^+ введем следующие обозначения:

$$n_p = n(p), \quad n_{\text{ENA}} = n(H_{\text{ENA}}), \quad n_s = n(A_s), \quad \bar{n}_s = n(A_s^+). \quad (\text{Б.15})$$

Начальные концентрации этих компонентов

$$a_p = n_p(0), \quad a_{\text{ЕНА}} = n_{\text{ЕНА}}(0), \quad a_s = n_s(0), \quad \bar{a}_s = \bar{n}_s(0). \quad (\text{Б.16})$$

Уравнения химической кинетики для компонентов с номером s можно записать в виде

$$\dot{n}_s = -F_s, \quad \dot{\bar{n}}_s = F_s. \quad (\text{Б.17})$$

Здесь F_s — функция, описывающая скорость изменения концентрации компонента с номером s , которая определяется соотношением:

$$F_s = k_s (n_p n_s - n_{\text{ЕНА}} \bar{n}_s), \quad (\text{Б.18})$$

зависящим от коэффициента скорости реакции k_s для соответствующего компонента. В силу того, что протоны и ЭНА водорода принимают участие во всех реакциях перезарядки (Б.14), то для общего случая скорости изменения концентраций этих частиц примут вид:

$$\dot{n}_p = -F, \quad \dot{n}_{\text{ЕНА}} = F, \quad (\text{Б.19})$$

где

$$F = \sum_s F_s, \quad (\text{Б.20})$$

а суммирование проводится по всем компонентам с номером s .

Для удобства дальнейших выкладок введем дополнительные обозначения для полной концентрации компонентов и их ионов соответственно,

$$N = \sum_s n_s, \quad \bar{N} = \sum_s \bar{n}_s. \quad (\text{Б.21})$$

Начальные значения для полных концентраций обозначим как

$$A = N(0), \quad \bar{A} = \bar{N}(0). \quad (\text{Б.22})$$

При этом скорость изменения полной концентрации также представляет собой сумму скоростей изменения каждого из компонентов, которую запишем в виде:

$$\dot{N} = -F, \quad \dot{\bar{N}} = F. \quad (\text{Б.23})$$

Уравнения (Б.19) и (Б.23) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичную системе (Б.4), для которой уже

получено аналитическое решение (Б.7)–(Б.10). Опираясь на это решение, можно сразу написать выражения для n_p и $n_{\text{ЕНА}}$:

$$n_p = a_p - A + N, \quad (\text{Б.24})$$

$$n_{\text{ЕНА}} = a_{\text{ЕНА}} + A - N. \quad (\text{Б.25})$$

Также из уравнений (Б.17) можно выразить концентрации ионов A_s^+ через концентрации компонентов A_s :

$$\bar{n}_s = \bar{a}_s + a_s - n_s. \quad (\text{Б.26})$$

Таким образом, на основании полученных выражений (Б.24)–(Б.26), функции F_s можно выразить через концентрации компонентов A_s , протонов p и ЭНА водорода ЕНА . Выполнив все необходимые преобразования, получим следующую систему неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{n}_s = \alpha_s + \beta_s n_s + \gamma_s N, \quad (\text{Б.27})$$

где параметры

$$\alpha_s = -k_s(A + a_{\text{ЕНА}})(a_s + \bar{a}_s), \quad (\text{Б.28})$$

$$\beta_s = k_s(a_p + a_{\text{ЕНА}}), \quad (\text{Б.29})$$

$$\gamma_s = k_s(a_s + \bar{a}_s). \quad (\text{Б.30})$$

Стационарное решение системы уравнений (Б.27) определяется алгебраическим соотношением

$$\alpha_s + \beta_s n_s + \gamma_s N = 0. \quad (\text{Б.31})$$

Для случая одной компоненты приходим к рассмотренному в разделе Б.1 решению, описывающему перезарядку водорода. Поскольку в рамках данной работы мы рассматриваем водородно-гелиевую оболочку горячего юпитера, то для случая двух компонентов (атомы водорода и гелия), задача сводится к следующей системе уравнений:

$$\dot{n}_1 = \alpha_1 + \beta_1 n_1 + \gamma_1(n_1 + n_2), \quad (\text{Б.32})$$

$$\dot{n}_2 = \alpha_2 + \beta_2 n_2 + \gamma_2(n_1 + n_2), \quad (\text{Б.33})$$

где n_1 — концентрация водорода H , а n_2 — концентрация гелия He . Для системы дифференциальных уравнений (Б.32) и (Б.33) можно получить аналитическое

решение. Однако в силу того, что характеристическое уравнение может содержать комплексные корни, в численных расчетах удобнее использовать не аналитическое решение, а неявную разностную схему для моделирования решения системы.

Б.3 Численное моделирование

В данном разделе рассмотрены результаты тестовых расчетов реакций перезарядки и трехмерного численного моделирования структуры протяженной оболочки горячего юпитера с учетом этих процессов.

В тестовых расчетах решались уравнения химической кинетики для случаев водородной и водородно-гелиевой оболочек горячих юпитеров. В качестве начальных значений концентраций компонентов для тестового расчета были взяты следующие значения (в см^{-3}):

$$n(p) = 1.4 \cdot 10^3, \quad n(\text{H}_{\text{ENA}}) = 0, \quad (\text{Б.34})$$

$$n(\text{H}) = 3 \cdot 10^3, \quad n(\text{H}^+) = 5 \cdot 10^3, \quad (\text{Б.35})$$

$$n(\text{He}) = 3 \cdot 10^3, \quad n(\text{He}^+) = 5 \cdot 10^3. \quad (\text{Б.36})$$

Степень ионизации атомарного водорода и гелия составляет величину 0.625.

Для случая чисто водородной химии были проведены расчеты по нескольким дополнительным критериям. В частности, оценивалась относительная погрешность неявной схемы расчета системы (Б.4) по сравнению с аналитическим решением (Б.7)–(Б.10). Кроме того, были посчитаны распределения H_{ENA} при различных значениях константы скорости реакции k_{exh} . Результаты расчетов представлены на рис. Б.1.

На панели (а) рис. Б.1 (слева вверху) показаны аналитические зависимости концентраций ЭНА водорода от времени, полученные для двух значений скорости реакции перезарядки $k_{\text{exh}} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$ и $k_{\text{exh}} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$, различающихся между собой в два раза. Во втором решении переход к стационарному состоянию осуществляется примерно в два раза быстрее. При этом, как следует из выражений (Б.8)–(Б.10) и (Б.13), значения концентраций в стационарном состоянии от скорости реакции не зависят. Остальные расчеты проводились для

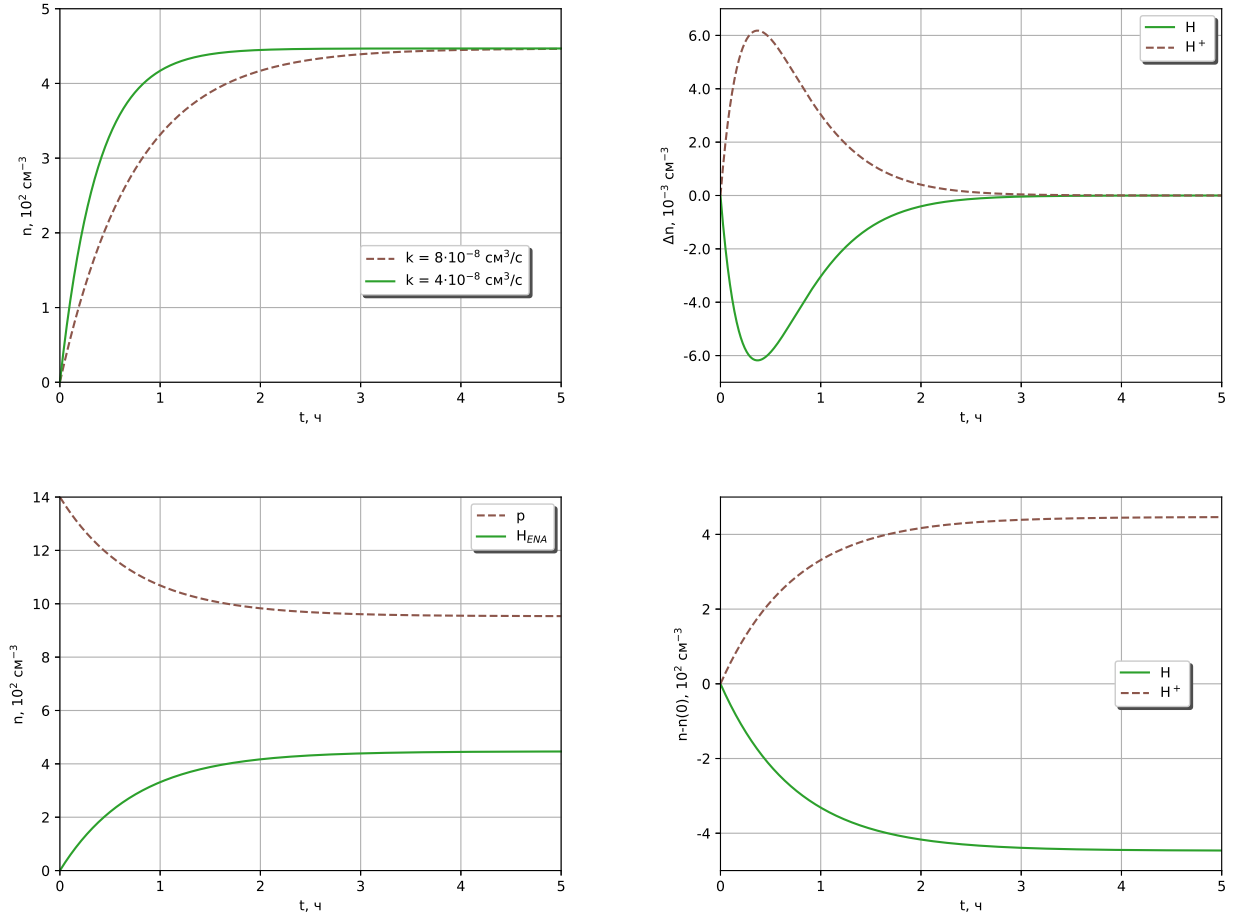


Рисунок Б.1 — Слева, сверху — зависимость концентрации H_{ENA} от времени t в случае $k_{exh} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$ и $k_{exh} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$ (а); справа, сверху — разница между численным и аналитическим решениями для H_{ENA} (б); слева, внизу — зависимость от времени концентраций H_{ENA} и p (с); справа, внизу — отклонение концентраций H и H^+ от их начальных значений (д).

случая $k_{exh} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$. На панели (б) рис. Б.1 (справа сверху) представлено изменение во времени глобальной ошибки численного решения, которое определяется разностью в данный момент времени t между численным и аналитическим решением для концентраций H и H^+ . Численное решение получено с помощью неявной разностной схемы, предложенной в работе [138]. Видно, что разница между аналитическим решением и численной схемой имеет порядок 10^{-3} , при этом графики симметричны поскольку концентрация H убывает, а H^+ возрастает. Решения практически совпадают и в численном коде для учета реакций перезарядки можно использовать как аналитическое решение, так и разностную схему.

Графики, представленные на нижних панелях рис. Б.1, показывают полученные зависимости от времени концентраций компонентов для перезарядки водорода. Расчеты проводились на основе аналитического решения (Б.7)–(Б.10). Концентрации участвующих в реакции компонентов за время порядка 5 часов приходят в стационарное состояние. Поток протонов звездного ветра приводит к образованию ЭНА водорода. Однако за счет обратных реакций изменения концентраций этих компонентов взаимно компенсируют друг друга. На правой нижней панели (d) рис. Б.1 показаны отклонения концентраций H и H^+ от их начальных значений. Видно, что эти зависимости расположены симметрично относительно оси абсцисс. Это свойство отражает закон сохранения заряда в реакции перезарядки и полностью согласуется с аналитическим решением. Складывая выражения (Б.9) и (Б.10), находим: $n_3 + n_4 = a_3 + a_4$. Концентрации H и H^+ переходят в стационарное состояние за характерное время 5 часов.

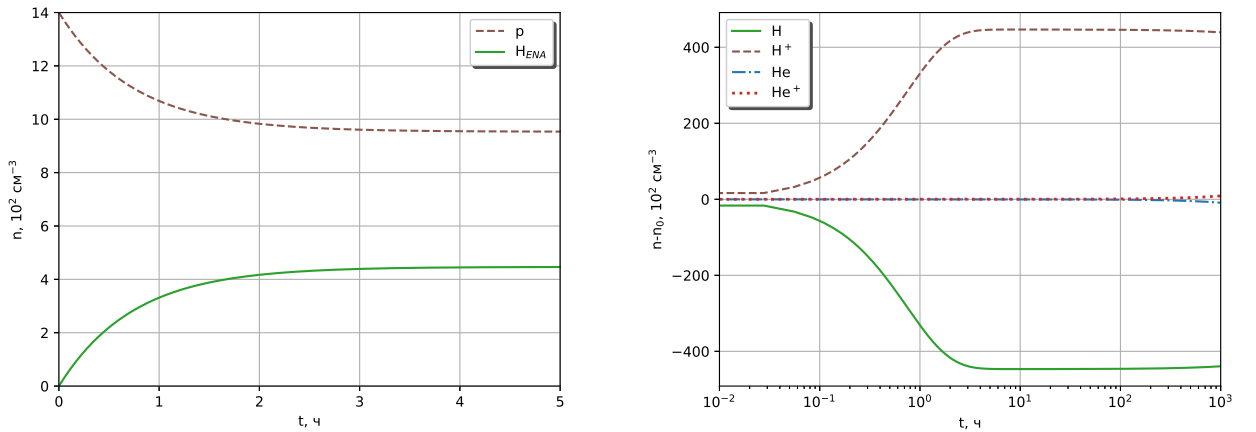


Рисунок Б.2 — Слева — зависимость концентраций H_{ENA} и p от времени t (a); справа — отклонение концентраций H , H^+ , He и He^+ от их начальных значений (b).

В случае водородно-гелиевой оболочки горячего юпитера при учете перезарядки гелия необходимо знать значение соответствующей константы скорости реакции. Эту величину можно вычислить по формуле (Б.2). Сечение $\sigma_{\text{exh}}(v)$ для этой реакции были взяты из работы [144]. Данная реакция является нерезонансной и имеет энергетический барьер v_{th} , которому соответствует энергия 11 эВ. Сечение достигает максимального значения $\sigma_{\text{max}} \approx 9 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$ на энергии взаимодействия примерно 20 кэВ. Подставляя в выражение (Б.2) пара-

метры звездного ветра в окрестности горячего юпитера HD 209458b, получаем значение константы $k_{\text{exh}} = 1.77 \cdot 10^{-12} \text{ см}^3/\text{с}$. Заметим, что эта величина оказывается на четыре порядка меньше константы скорости перезарядки водорода. Это обусловлено тем, что первая реакция является резонансной и поэтому ее эффективное сечение существенно больше.

Результаты тестовых расчетов перезарядки для водородно-гелиевой химии представлены на рис. Б.2. На левой панели показаны зависимости от времени концентраций p и H_{ENA} . На правой панели рисунка приведены графики отклонения концентраций H , H^+ , He и He^+ от их начальных значений. Решение получено с помощью неявной схемы, аналогичной схеме из работы [138] для перезарядки водорода. Система уравнений химической кинетики в данном случае является жесткой, поскольку константы скорости реакций для водорода и гелия различаются на 4 порядка величины. Значения концентраций немного отличаются от соответствующих значений, полученных в предыдущем случае (см. рис. Б.1). Это обусловлено тем, что в реакциях перезарядки теперь участвует гелий, увеличивающий общее количество образованных ЭНА водорода. Зависимости, представленные на правой панели рис. Б.2, снова оказываются симметричными относительно оси абсцисс, что является следствием закона сохранения заряда в реакциях перезарядки.

Переход к стационарному состоянию в данном случае осуществляется иерархическим образом. Вначале, как и в предыдущем случае, происходит быстрый за время порядка 5 часов переход к квази-стационарному состоянию, которое соответствует равновесию по отношению к перезарядке водорода. Этот характерный период определяется большой константой скорости $k_{\text{exh}} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{с}$. Затем на фоне этого квази-стационарного состояния осуществляется гораздо более медленный переход к глобальному стационарному состоянию, в котором уравниваются уже все реакции перезарядки. Этот медленный переход происходит за характерное время в несколько десятков лет и определяется малой константой скорости. Для расчетов было взято примерное значение $k_{\text{exh}} = 4 \cdot 10^{-12} \text{ см}^3/\text{с}$. На графиках Б.2 показана только фаза перехода к квази-стационарному состоянию.

Полученные результаты тестовых расчетов дают основания полагать, что написанный блок программного кода для реакции перезарядки водородно-гелиевой оболочки работает корректно. Это дало возможность встроить его в основной численный код многокомпонентной МГД модели [69]. Учет реакций

перезарядки с протонами звездного ветра производился на отдельном этапе численного алгоритма в соответствии с общей методикой расщепления по физическим процессам. Учитывалась только химия, относящаяся к реакциям перезарядки водорода и гелия.

В качестве объекта исследований был взят типичный горячий юпитер HD 209458b. Параметры и начальные значения задавались такие же, как и в статье [69] для модели протяженной оболочки квази-открытого типа в случае сверх-альфвеновского режима обтекания звездным ветром.

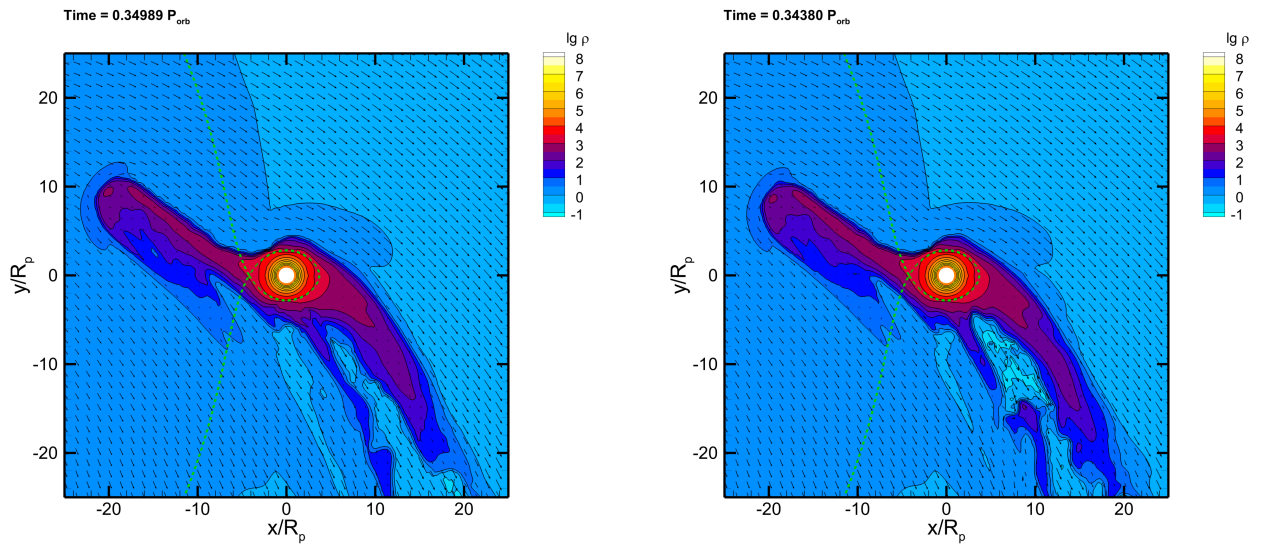


Рисунок Б.3 — Распределение плотности (цвет, изолинии) и скорости (стрелки) в орбитальной плоскости планеты на момент времени, равный примерно одной трети P_{orb} без учета (слева) и с учетом (справа) реакций перезарядки. Значения плотности выражены в единицах ρ_w (см. текст). Пунктирной линией показана граница полости Роша. Светлый кружок в центре соответствует фотометрическому радиусу планеты R_{pl} . Звезда находится слева.

Результаты численного моделирования демонстрируют рис. Б.3–Б.5. На рис. Б.3 представлено распределение плотности (цвет, изолинии) и скорости (стрелки) в орбитальной плоскости системы. На рис. Б.4 вместо плотности показано распределение концентрации атмосферного атомарного водорода $n(\text{H})$. Плотность вещества ρ выражена в единицах плотности звездного ветра в окрестности планеты $\rho_w = 2.3 \cdot 10^{-21} \text{ г/см}^3$. Граница полости Роша показана пунктирной линией. Планета расположена в центре расчетной области. Полученное решение соответствует моменту времени порядка трети орбитального

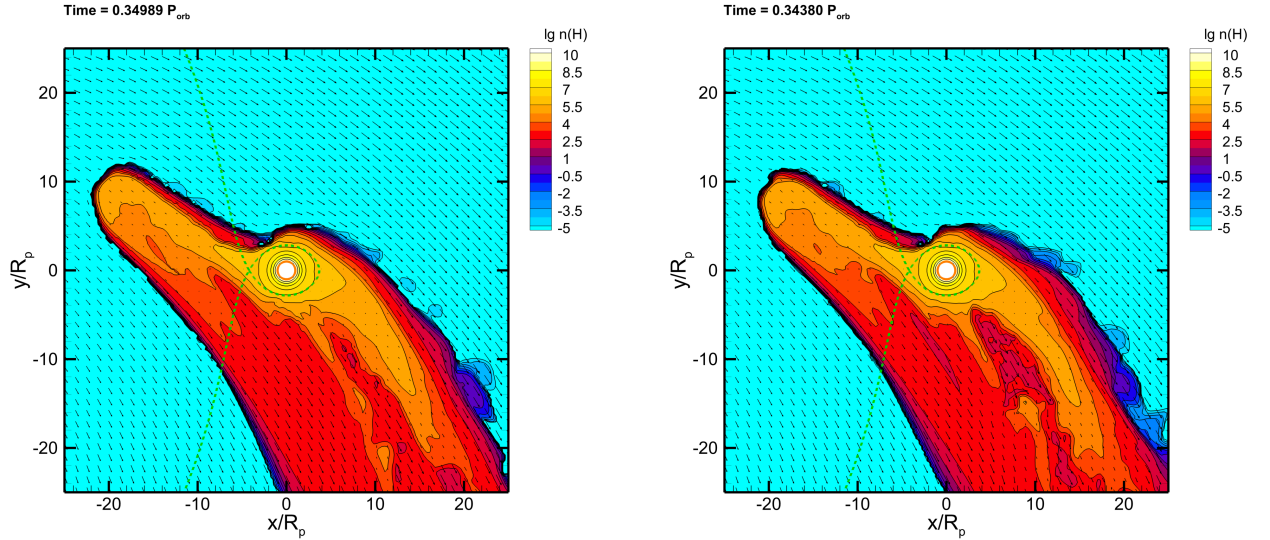


Рисунок Б.4 — Распределение концентрации атмосферного атомарного водорода (цвет, изолинии) и скорости (стрелки) в орбитальной плоскости планеты на момент времени, равный примерно одной трети P_{orb} без учета (слева) и с учетом (справа) реакций перезарядки. Обозначения те же, что и на рис. Б.3.

периода P_{orb} от начала счета. На рис. Б.5 показано распределение концентрации ЭНА водорода в орбитальной плоскости системы в модели, учитывающей реакции перезарядки.

Структура течения в полученном решении полностью соответствует аналогичной структуре, полученной в работе [69]. Реакции перезарядки с протонами звездного ветра не оказывают влияния на структуру и динамику протяженной оболочки горячего юпитера, поскольку масса образующихся ЭНА водорода мала по сравнению с массой вещества оболочки. Учет в численной модели процессов перезарядки и формирования ЭНА водорода нужен для последующей интерпретации наблюдений с точки зрения полученных результатов расчетов.

В численной модели, основанной на приближении многокомпонентной магнитной гидродинамики, диффузия компонент не учитывается. Поэтому все компоненты плазмы (в том числе и ЭНА водорода) движутся со скоростями, равными средней массовой скорости. В момент транзита наблюдатель располагается справа от планеты и звезды (см. рис. Б.5). По отношению к такому наблюдателю ЭНА водорода, движущиеся в магнитосферном хвосте планеты, будут иметь отрицательные скорости вдоль луча зрения. Поэтому излучение этих атомов будет давать вклад в фиолетовой части линии $\text{Ly}\alpha$. Однако суще-

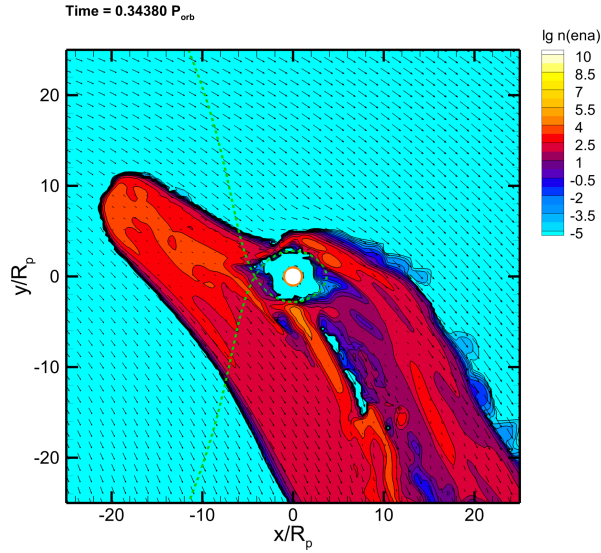


Рисунок Б.5 — Распределение концентрации ЭНА водорода (цвет, изолинии) и скорости (стрелки) в орбитальной плоскости планеты на момент времени, равный примерно одной трети P_{orb} в модели, учитывающей перезарядку.

ственная часть ЭНА водорода находится в области струи вещества, вытекающей из окрестности внутренней точки Лагранжа L_1 (слева от планеты). Лучевые скорости этих атомов будут отрицательными и, следовательно, их излучение будет сдвинуто в красную часть линии $\text{Ly}\alpha$.

Таким образом, на качественном уровне все свойства наблюдаемой линии $\text{Ly}\alpha$ [139] в модели воспроизводятся. Однако в количественном плане при этом могут быть существенные расхождения. Дело в том, что скорости ЭНА водорода могут сильно отличаться от средней массовой скорости, особенно в разреженных частях оболочки вдали от планеты. Данное замечание справедливо как в отношении этих частиц в магнитосферном хвосте планеты, так и в зоне истечения.

Приложение В

Описание численных методов

В.1 Метод конечного объема для сферических координат

Запишем в консервативной форме уравнения одножидкостной многокомпонентной гидродинамики в сферических координатах. Уравнения для непрерывности, движения, энергии и массовых долей компонентов имеют следующий вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\rho v^2 + P)] = \rho f + \frac{2P}{r}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \rho \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{r^2} \left[r^2 \rho v \left(\varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \right] = \rho v f + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho Q, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \xi_\alpha) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho \xi_\alpha v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho \xi_\alpha w_\alpha) + S_\alpha, \quad \alpha = 1 \dots N, \quad (\text{B.4})$$

где ρ — плотность вещества, v — средняя массовая радиальная скорость, P — полное давление, ε — удельная внутренняя энергия, T — температура, f — удельная внешняя сила, Q — функция источника для процессов нагрева и охлаждения, S_α — функция источника, связанная с химическими реакциями, ξ_α — массовая доля компоненты, w_α — диффузионная скорость компоненты, N — количество компонентов.

Для численного решения системы уравнений (B.1) — (B.4) воспользуемся методикой разбиения по физическим процессам. На первом этапе решается система многокомпонентной гидродинамики без учета дополнительных источников. Система принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\rho v^2 + P)] = \frac{2P}{r}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \rho \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho v \left(\varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \right] = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \xi_\alpha) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho \xi_\alpha v) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Введем в расчетной области разностную сетку, структура которой определяется массивом узлов (r_i) . Расчетные сеточные величины относятся к ячейкам $i + 1/2$, которые нумеруются полуцелыми индексами. Значения величин в момент времени t^n внутри ячеек считаются постоянными. Геометрические факторы при этом рассматриваются в качестве переменных величин. Базовая схема строится на основе метода конечного (контрольного) объема (например, [145]).

Ячейка с номером $i + 1/2$ представляет собой сферический слой толщиной $\Delta r_{i+1/2} = r_{i+1} - r_i$. Объем такой ячейки определяется выражением

$$\Delta V = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = 4\pi \Delta r r_c \bar{r}. \quad (\text{B.9})$$

Индексами 1 и 2 условно обозначены левая и правая границы ячейки по координате r . Для обозначений арифметических средних используется черта сверху. Например,

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}. \quad (\text{B.10})$$

Дополнительная средняя величина определяется выражением

$$r_c = \frac{2r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{3(r_1 + r_2)}. \quad (\text{B.11})$$

Все уравнения (B.5) — (B.8) формально могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F) = R, \quad (\text{B.12})$$

где $u(r, t)$ — неизвестная функция, F — поток в координатном направлении r , а R — функция источников. Для численного решения уравнения (B.12) будем использовать схему годуновского типа [146], поэтому внутри объема ячейки физические величины и поток F на соответствующих границах считаются постоянными. Чтобы избавиться от коэффициентов при пространственных производных, умножим обе части уравнения (B.12) на r^2 . Приходим к следующему уравнению

$$r^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F) = r^2 R. \quad (\text{B.13})$$

Проинтегрируем это уравнение по времени t на интервале от t^n до t^{n+1} , а также по координате $r_1 \leq r \leq r_2$. Первое слагаемое левой части запишется в виде

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{r_1}^{r_2} dr r^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \left(u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n \right) \Delta r r_c \bar{r}. \quad (\text{B.14})$$

Для второго слагаемого левой части получим

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{r_1}^{r_2} dr r^2 F = \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \left[r_2^2 F(r_2, t) - r_1^2 F(r_1, t) \right]. \quad (\text{B.15})$$

Обозначим $F_i^{n+1/2}$ среднее по времени на интервале $t^n \leq t \leq t^{n+1}$, которое определяется следующим выражением

$$F_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt F(r_i, t). \quad (\text{B.16})$$

Тогда выражение (B.15) можно записать в виде

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{r_1}^{r_2} dr r^2 F = \Delta t \Delta \left[r^2 F^{n+1/2} \right], \quad (\text{B.17})$$

где

$$\Delta \left[r^2 F^{n+1/2} \right] = r_2^2 F_2^{n+1/2} - r_1^2 F_1^{n+1/2}. \quad (\text{B.18})$$

В результате интегрирования слагаемого правой части уравнения (B.13) получим выражение

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{r_1}^{r_2} dr r^2 R = \Delta t \Delta r r_c \bar{r} R_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad (\text{B.19})$$

где $R_{i+1/2}^{n+1/2}$ определяется соотношением

$$R_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} dt R(r_{i+1/2}, t). \quad (\text{B.20})$$

Потоки через границы ячеек в (B.14), (B.18), (B.19) определены с помощью правила усреднения по времени. Оператор (B.18) определяет разности

величин на границах ячеек. При получении выражения (В.19) считалось, что функция источника R определяется только физическими величинами и, следовательно, является постоянной внутри контрольного объема. Если же эта функция содержит геометрические факторы, то этот интеграл необходимо вычислять более корректным образом.

Собирая результаты интегрирования (В.14) — (В.19), приходим к соотношению баланса (интегральный закон сохранения для ячейки с индексом $i+1/2$):

$$\left(u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n\right) \Delta r r_c \bar{r} + \Delta t \Delta_r \left[r^2 F^{n+1/2}\right] = \Delta t \Delta r r_c \bar{r} R_{i+1/2}^{n+1/2}. \quad (\text{В.21})$$

Делим обе части на $\Delta V \Delta t$ и приходим к следующей разностной схеме

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{\Delta_r \left[r^2 F^{n+1/2}\right]}{r_c \bar{r} \Delta r} = R_{i+1/2}^{n+1/2}. \quad (\text{В.22})$$

Полученная схема (В.22) обладает свойством консервативности. В разностной схеме годуновского типа [146] потоки вычисляются на основе решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. В данном случае разностная схема Роу-Эйнфельдта-Ошера имеет первый порядок аппроксимации по времени. Поэтому без потери точности функции источников можно вычислять в момент времени t^n . К виду (В.22) приводятся разностные схемы для уравнения непрерывности (В.5), движения (В.6), энергии (В.7), массовых долей компонентов (В.8).

При выводе разностной схемы (В.22) считалось, что функции внутри ячейки являются постоянными. Однако функция источника R может содержать геометрические факторы. В этом случае соответствующий интеграл необходимо вычислять более корректным образом. В системе уравнений (В.5) — (В.8) геометрический источник ($R = 2P/r$) содержится в уравнении (В.6). В этом случае можно получить

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} dt \int_{r_1}^{r_2} dr r^2 \frac{2P}{r} = \Delta t \Delta r r_c \bar{r} \cdot \frac{2P_{i+1/2}^{n+1/2}}{r_c}. \quad (\text{В.23})$$

Это выражение, в частности, позволяет в точности скомпенсировать силы давления в случае однородной среды. В самом деле, оставляя в схеме (В.22) для уравнения движения (В.6) только члены с давлением, имеем

$$\frac{r_2^2 P_{i+1}^{n+1/2} - r_1^2 P_i^{n+1/2}}{r_c \bar{r} \Delta r} = \frac{2P_{i+1/2}^{n+1/2}}{r_c}. \quad (\text{В.24})$$

В однородной среде должно быть и $P_{i+1}^{n+1/2} = P_i^{n+1/2} = P_{i+1/2}^{n+1/2}$ это соотношение удовлетворяется тождественно.

В.2 Схема Роу-Эйнфельдта-Ошера

Нужно задать правила вычисления потоков через границы ячеек для разностной схемы (В.22). Для этого будем на каждой границе решать задачу Римана о распаде произвольного разрыва. Задача Римана сводится к решению следующего уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (\text{В.25})$$

с начальными условиями

$$\mathbf{u}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0 \\ \mathbf{u}_R, & x > 0. \end{cases} \quad (\text{В.26})$$

В нашем случае векторы консервативных переменных и потоков имеют следующий вид

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \\ \rho \xi_\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ v \rho h \\ \rho v \xi_\alpha \end{pmatrix}, \quad (\text{В.27})$$

где для упрощения записи введены обозначения для плотности полной энергии

$$E = \rho \varepsilon + \rho \frac{v^2}{2} \quad (\text{В.28})$$

и полной удельной энтропии газа

$$h = \varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2}. \quad (\text{В.29})$$

Точное решение системы (В.25) громоздко и неудобно, поэтому вместо точного решения будем использовать приближенное. Одним из таких приближенных решений является решение, получаемое методом Роу [147]. В этом методе вместо

решения задачи Римана для исходной системы нелинейных уравнений (В.25) решается линеаризованная задача

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \hat{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{В.30})$$

с теми же начальными условиями (В.26).

Для того, чтобы решения исходной (В.25) и линеаризованной (В.30) задач были согласованными, матрица $\hat{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ должна удовлетворять следующим трем условиям.

1) *Гиперболичность*. Матрица $\hat{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ должна быть гиперболической. В противном случае задача Римана для системы линеаризованных уравнений (В.30) теряет смысл.

2) *Согласованность*. Матрица $\hat{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ должна гладко переходить в матрицу гиперболичности $\hat{A}(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$ в пределе при $\mathbf{u}_L \rightarrow \mathbf{u}_R = \mathbf{u}$.

3) *Консервативность*. Матрица $\hat{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ должна удовлетворять условию консервативности по отношению к разрывам:

$$\hat{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \cdot \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{F}, \quad (\text{В.31})$$

где обозначено $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L$, $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L$. В этом случае решение линеаризованной задачи о распаде разрыва (В.30) будет удовлетворять тем же интегральным законам сохранения, что и решение исходной нелинейной задачи (В.25).

Как известно, решение задачи Римана для линейной гиперболической системы уравнений (В.30) представляет собой совокупность сильных разрывов, скорости которых равны собственным значениям λ_α матрицы Роу $\hat{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$. Индекс α определяет номер характеристики. Соответствующие скачки величин на разрывах

$$[\mathbf{u}]_\alpha = \mathbf{r}_\alpha \Delta S^\alpha, \quad (\text{В.32})$$

где квадратные скобки означают скачки величин при переходе через разрыв, $\Delta S^\alpha = \mathbf{l}^\alpha \cdot \Delta \mathbf{u}$ — характеристические амплитуды, а $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{l}^\alpha$ — правые и левые собственные векторы матрицы Роу. На каждом разрыве должны удовлетворяться соответствующие условия Гюгонио:

$$\lambda_\alpha [\mathbf{u}]_\alpha = [\mathbf{F}]_\alpha. \quad (\text{В.33})$$

Матрица гиперболичности для уравнений одномерной многокомпонентной гидродинамики (B.26) — (B.27) имеет следующую структуру:

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \dots & 0 \\ \hline & A_{ik} & & & & & \\ -\xi_1 v & \xi_1 & 0 & \dots & 0 & v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\xi_N v & \xi_N & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & v \end{array} \right). \quad (\text{B.34})$$

Как видно, эта матрица состоит из четырех блоков. В левом верхнем блоке размерности 3×3 расположены элементы A_{ik} матрицы Роу для гидродинамики. Индексы i и k пробегает значения от 1 до 3. Все элементы правого верхнего блока размерности $N \times 3$ равны нулю. Левый нижний блок имеет размерность $3 \times N$. В строке с номером s этого блока первый элемент равен $-\xi_s v$, второй элемент равен ξ_s , а остальные элементы равны нулю. Правый нижний блок размерности $N \times N$ является диагональным, причем все его диагональные элементы равны v . Матрица описывающая гидродинамическую часть имеет вид

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q - v^2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ (q - h)v & h - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{pmatrix}, \quad (\text{B.35})$$

где $q = (\gamma - 1)v^2/2$.

Матрицу Роу будем искать в виде $\hat{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \hat{A}(\mathbf{u}_*)$, где матрица A определяется выражением (B.34), а $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ определяют некоторые роевские средние значения консервативных переменных. При таком определении условие гиперболичности выполняется автоматически, поскольку матрица $\hat{A}(\mathbf{u}_*)$ является гиперболической. Условие согласованности выполняется, если $\mathbf{u}_* \rightarrow \mathbf{u}$ при $\mathbf{u}_L \rightarrow \mathbf{u}_R = \mathbf{u}$. Поэтому остается удовлетворить только третьему условию, консервативности.

Для определения промежуточного значения $\mathbf{u}_*$ нужно записать условие (B.31) для матрицы (B.35) и решить соответствующие уравнения. Первое уравнение сводится к тождеству

$$\Delta(\rho v) = \Delta(\rho v). \quad (\text{B.36})$$

В качестве роевского среднего плотности можно использовать геометрическое среднее

$$\rho = \sqrt{\rho_L \rho_R}. \quad (\text{B.37})$$

Второе уравнение имеет вид

$$(q_* - v_*^2 v) \Delta \rho + (3 - \gamma) v_* \Delta (\rho v) + (\gamma - 1) \Delta E = \Delta (\rho v^2 + P). \quad (\text{B.38})$$

Уравнение (B.38) можно преобразовать в квадратное уравнение относительно v_* . Для этого воспользуемся определением q

$$q - v^2 = (\gamma - 1) = (\gamma - 1) \frac{v^2}{2} - v^2 = (\gamma - 3) \frac{v^2}{2}. \quad (\text{B.39})$$

Уравнение (B.38) перепишется в виде

$$\Delta \rho v_*^2 - 2 \Delta (\rho v) v_* + \Delta (\rho v^2) = 0. \quad (\text{B.40})$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$v_{*1,2} = \frac{\Delta (\rho v) \pm \sqrt{(\Delta (\rho v))^2 - \Delta \rho \Delta (\rho v^2)}}{\Delta \rho}. \quad (\text{B.41})$$

В уравнении (B.41) раскроем скобки относительно $\mathbf{u}_L$ и $\mathbf{u}_R$. Выражение под квадратным корнем преобразуется к виду

$$(\rho_R v_R - \rho_L v_L)^2 - (\rho_R - \rho_L) (\rho_R v_R^2 - \rho_L v_L^2) = \rho_R \rho_L (v_R - v_L)^2. \quad (\text{B.42})$$

Тогда решение уравнения (B.40) примет вид

$$v_{*1,2} = \frac{\rho_R v_R - \rho_L v_L \pm \sqrt{\rho_R \rho_L} |v_R - v_L|}{\rho_R - \rho_L}. \quad (\text{B.43})$$

После раскрытия модуля $|v_R - v_L|$ получим 4 корня уравнения (B.40), которые совпадают попарно. Таким образом, получаем 2 корня уравнения, которые после преобразования имеют вид

$$v_{*1} = \frac{v_R \sqrt{\rho_R} - v_L \sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_R} - \sqrt{\rho_L}}, \quad (\text{B.44})$$

$$v_{*2} = \frac{v_R \sqrt{\rho_R} + v_L \sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}. \quad (\text{B.45})$$

Поскольку при выполнении условия $\rho_R = \rho_L$ в уравнении (B.44) будет возникать неопределенность, то в качестве решения v_* возьмем корень (B.45).

Третье уравнение

$$(q_* - h_*) v_* \Delta \rho + [h_* - (\gamma - 1) v_*^2] \Delta (\rho v) + \gamma v_* \Delta E = \Delta (v \rho h). \quad (\text{B.46})$$

Данное уравнение является линейным относительно h_* , поэтому его удобно записать в виде

$$(\Delta (\rho v) - v_* \Delta \rho) h_* = \Delta (v \rho h) - q_* v_* \Delta \rho + (\gamma - 1) v_*^2 \Delta (\rho v) - \gamma v_* \Delta E. \quad (\text{B.47})$$

Воспользовавшись определениями для выражений E (B.28) и h (B.2) корень уравнения (B.47) в координатах $\mathbf{u}_L$ и $\mathbf{u}_R$ принимает значение

$$h_* = \frac{h_L \sqrt{\rho_L} + h_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}. \quad (\text{B.48})$$

Четвертое уравнение

$$-\xi_\alpha v \Delta (\rho) + \xi_\alpha \Delta (\rho v) + v \Delta (\rho \xi_\alpha) = \Delta (\rho v \xi_\alpha). \quad (\text{B.49})$$

Это уравнение (B.49) является линейным относительно ξ_α и корень этого уравнения равен

$$\xi_\alpha = \frac{\xi_{\alpha L} \sqrt{\rho_L} + \xi_{\alpha R} \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}. \quad (\text{B.50})$$

Найдем собственные значения матрицы Роу для многокомпонентной гидродинамики (B.34). Они определяются из решения следующего характеристического уравнения

$$\det(\hat{A} - \lambda \hat{I}) = 0, \quad (\text{B.51})$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица или в развернутом виде

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q - v^2 & (3 - \gamma) v - \lambda & \gamma - 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ (q - h) v & h - (\gamma - 1) v^2 & \gamma v - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline -\xi_1 v & \xi_1 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -\xi_N v & \xi_N & 0 & \dots & 0 & \end{array} \right| = 0. \quad (\text{B.52})$$

Определитель в левой части (B.52) имеет блочный вид. Его можно разложить на произведение двух определителей следующим образом

$$\det(\hat{A} - \lambda \hat{I}) = \det(A_{ik} - \lambda \delta_{ik}) \det(B_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0, \quad (\text{B.53})$$

где B_{ik} — матрица размерности $N \times N$ составленная из правого нижнего блока определителя (В.52), δ_{ik} — символ Кронекера. Отсюда видно, что искомые собственные значения являются корнями двух уравнений

$$\det(A_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0 \quad (\text{В.54})$$

и

$$\det(B_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0. \quad (\text{В.55})$$

Рассмотрим сначала второе уравнение (В.55). Матрица B_{ik} может быть представлена в виде $B_{ik} = v \delta_{ik}$. Поэтому

$$\det(B_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = (v - \lambda)^N \det \delta_{ik} = (v - \lambda)^N. \quad (\text{В.56})$$

Отсюда находим собственные значения для дополнительных характеристик

$$\lambda_s = v, \quad s = 1, \dots, N. \quad (\text{В.57})$$

Первое уравнение (В.54) можно представить в виде

$$(\lambda - v) \left[\lambda^2 - 2v\lambda - h(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{v^2}{2} \right] = 0. \quad (\text{В.58})$$

Одним из корней является

$$\lambda_E = v, \quad (\text{В.59})$$

которое описывает энтропийную характеристику. В силу соотношений

$$c_s^2 = (\gamma - 1) \left(h - \frac{v^2}{2} \right), \quad (\text{В.60})$$

$$\varepsilon = \frac{c_s^2}{\gamma(\gamma - 1)}. \quad (\text{В.61})$$

квадратное уравнение, определяющее второй множитель в (В.58), можно переписать в более удобном виде

$$\lambda^2 - 2v\lambda + (v^2 - c_s^2) = 0. \quad (\text{В.62})$$

Корнями этого уравнения являются значения

$$\lambda_{\pm S} = v \pm c_s, \quad (\text{В.63})$$

определяющие две звуковые характеристики.

Правые собственные векторы матрицы $\text{Роу } \hat{A}$ обозначим следующим образом

$$\mathbf{r} = (r^1, r^2, r^3, \tilde{r}^1, \dots, \tilde{r}^N)^T, \quad (\text{B.64})$$

где значок T обозначает транспонирование. Первые 3 компонента вектора соответствуют гидродинамической части. Оставшиеся N компонент, помеченные тильдами, соответствуют уравнениям (B.8) для массовых долей ξ_s . Распишем уравнения для правых собственных векторов

$$\hat{A} \cdot \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}. \quad (\text{B.65})$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^3 A_{ik} r^k = \lambda r^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.66})$$

$$-\xi_s v r^1 + \xi_s r^2 + v \tilde{r}^s = \lambda \tilde{r}^s, \quad s = 1, \dots, N. \quad (\text{B.67})$$

Рассмотрим сначала гидродинамические характеристики, когда λ определяются собственными значениями матрицы A_{ik} . Из первого уравнения (B.66) следует, что в этом случае первые 3 компоненты r^i вектора $\mathbf{r}$ совпадают с соответствующими компонентами правых собственных векторов матрицы A_{ik} ,

$$\bar{\mathbf{r}}_{-S} = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c_s \\ h - v c_s \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{r}}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2v \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{r}}_{+S} = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c_s \\ h + v c_s \end{pmatrix}. \quad (\text{B.68})$$

Оставшиеся компоненты правого собственного вектора могут быть найдены из дополнительных уравнений (B.67). Если $\lambda \neq v$, то для каждой компоненты $\tilde{r}^s$ правого вектора можно написать:

$$\tilde{r}^s = \frac{\xi_s}{\lambda - v} (r^2 - v r^1). \quad (\text{B.69})$$

Отсюда для звуковых характеристик получаем $\tilde{r}^s = \xi_s$. Для энтропийной характеристики $\lambda = v$, $r^1 = 1$, $r^2 = v$ и, следовательно, все дополнительные уравнения (B.67) удовлетворяются автоматически. Это означает, что в этом случае мы можем выбрать $\tilde{r}^s$ произвольным образом. Без ограничения общности их можно положить равными нулю. В результате получаем следующие правые собственные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{-S} &= (1, v - c_s, h - v c_s, \xi_1, \dots, \xi_N)^T, \\ \mathbf{r}_{+S} &= (1, v + c_s, h + v c_s, \xi_1, \dots, \xi_N)^T, \\ \mathbf{r}_E &= (2, 2v, v^2, 0, 0, \dots, 0)^T. \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

Для дополнительных характеристик, соответствующих собственным значениям λ_s , приходим к следующим уравнениям:

$$\sum_{k=1}^3 A_{ik} r^k = v r^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.71})$$

$$r^2 - v r^1 = 0, \quad s = 1, \dots, N. \quad (\text{B.72})$$

Уравнения для компонент r^i совпадают с соответствующими уравнениями для энтропийной характеристики. Поэтому будем считать, что r^i совпадает с вектором $\bar{\mathbf{r}}_E$. Соотношение (B.72) при этом будет удовлетворяться тождественно. Значения $\tilde{r}^s$ остаются произвольными. Их необходимо выбирать таким образом, чтобы получить линейно-независимый набор векторов. Для этого достаточно для характеристики, соответствующей номеру s , задать $\tilde{r}^s = 1$, а остальные компоненты положить равными нулю. В результате получаем следующий набор дополнительных правых собственных векторов

$$\mathbf{r}_s = (2, 2v, v^2, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T. \quad (\text{B.73})$$

Здесь единица стоит на месте компоненты с номером $3 + s$. Поскольку векторы $\mathbf{r}_s$ и $\mathbf{r}_E$ являются линейно-независимыми, а собственные значения для этих характеристик одинаковые ($\lambda = v$), то, не нарушая линейной-независимости, можно вектор $\mathbf{r}_s$ заменить разностью $\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_E$. В этом случае получим набор единичных векторов

$$\mathbf{r}_s = (0, \dots, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T. \quad (\text{B.74})$$

Таким образом, матрица правых собственных векторов имеет вид

$$\hat{R} = \{\mathbf{r}_\alpha\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ v - c_s & v + c_s & 2v & 0 & \dots & 0 \\ h - v c_s & h + v c_s & v^2 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1 & \xi_1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_N & \xi_N & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.75})$$

Столбцы этой матрицы определяются компонентами правых собственных векторов. Первые два столбца описывают звуковые характеристики $\mp S$. Третий столбец описывает энтропийную характеристику. Остальные столбцы соответствуют дополнительным характеристикам.

Рассмотрим теперь левые собственные векторы матрицы $\text{Роу } \hat{A}$

$$\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3, \tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_N), \quad (\text{B.76})$$

где первые 3 компонента вектора снова соответствуют гидродинамической части, а оставшиеся N компонент, помеченные тильдами, соответствуют уравнениям (B.8) для массовых долей ξ_s . Соотношение для левых собственных векторов имеет вид

$$\mathbf{l} \cdot \hat{A} = \lambda \mathbf{l}. \quad (\text{B.77})$$

Левые $\mathbf{l}$ и правые $\mathbf{r}$ собственные векторы определены с точностью до произвольных множителей. Удобно эти множители выбрать такими, чтобы выполнялось следующее условие нормировки

$$\mathbf{l}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad (\text{B.78})$$

где δ_β^α — символ Кронекера. Определим матрицу левых собственных векторов

$$\hat{L} = \{\mathbf{l}^\alpha\}. \quad (\text{B.79})$$

Строки этой матрицы определяются компонентами левых собственных векторов. Первые две строки описывают звуковые характеристики $\mp S$. Третья строка описывает энтропийную характеристику. Остальные строки соответствуют дополнительным характеристикам. С учетом этого определения выражение (B.78) можно записать следующим образом

$$\hat{L} \cdot \hat{R} = \hat{I}. \quad (\text{B.80})$$

Следовательно, матрица левых собственных векторов равна обратной матрице правых собственных векторов

$$\hat{L} = \hat{R}^{-1}. \quad (\text{B.81})$$

Элементарные, но довольно громоздкие вычисления, приводят к следующему виду матрицы левых собственных векторов

$$\hat{L} = \frac{1}{N_l} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{v(vc_s - v^2 + 2h)}{c_s} & -\frac{1}{2} \frac{v(2vc_s - v^2 + 2h)}{c_s} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{v(vc_s + v^2 - 2h)}{c_s} & -\frac{1}{2} \frac{v(2vc_s + v^2 - 2h)}{c_s} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ h - v^2 & v & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -v^2 \xi_1 & 2\xi_1 v & -2\xi_1 & N_l & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v^2 \xi_N & 2\xi_N v & -2\xi_1 & 0 & \dots & N_l \end{pmatrix}, \quad (\text{B.82})$$

где нормирующий коэффициент

$$N_l = 2h - v^2 = \frac{2c_s^2}{\gamma - 1}. \quad (\text{B.83})$$

Проводя некоторые упрощения, перепишем левые собственные векторы в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l}^{-S} &= \frac{1}{N_l} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{vc_s}{\gamma - 1}, -\frac{c_s}{\gamma - 1} - v, 1, 0, \dots, 0 \right), \\ \boldsymbol{l}^{+S} &= \frac{1}{N_l} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{vc_s}{\gamma - 1}, \frac{c_s}{\gamma - 1} - v, 1, 0, \dots, 0 \right), \\ \boldsymbol{l}^E &= \frac{1}{N_l} (h - v^2, v - 1, -1, 0, \dots, 0), \\ \boldsymbol{l}^s &= \frac{1}{N_l} (-v^2 \xi_s, 2v \xi_s, -2\xi_s, 0, \dots, N_l, \dots, 0). \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

С помощью полученных выражений для левых собственных векторов легко вычислить характеристические амплитуды

$$\Delta S^\alpha = \boldsymbol{l}^\alpha \cdot \Delta \boldsymbol{u}. \quad (\text{B.85})$$

Поскольку для всех гидродинамических характеристик дополнительные компоненты левых собственных векторов $\tilde{l}_s = 0$, то соответствующие выражения для характеристических амплитуд не изменяются,

$$\Delta S^{-S} = \frac{1}{2c_s^2} (\Delta P - \rho c_s \Delta v), \quad (\text{B.86})$$

$$\Delta S^{+S} = \frac{1}{2c_s^2} (\Delta P + \rho c_s \Delta v), \quad (\text{B.87})$$

$$\Delta S^E = \frac{1}{2c_s^2} (c_s^2 \Delta \rho - \Delta P). \quad (\text{B.88})$$

Остальные дополнительные характеристики принимают значение

$$\Delta S^s = 2\xi_s \Delta S^E + \rho \Delta \xi_s, \quad s = 1, \dots, N, \quad (\text{B.89})$$

где ρ — роевское среднее для плотности (B.37).

Поток в схеме Роу определяется следующим выражением

$$\boldsymbol{F}_* = \frac{\boldsymbol{F}_L + \boldsymbol{F}_R}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| \boldsymbol{r}_{\alpha} \Delta S^{\alpha}. \quad (\text{B.90})$$

Эта формула дает правило вычисления численного потока для разностной схемы (B.22).

Энтропийная поправка

В методе Роу используется приближенное решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва, содержащее только сильные разрывы. Поэтому если для данной характеристики в точном решении возникает волна разрежения, то в методе Роу она заменяется ударной волной. В большинстве случаев влияние неэволюционных сильных разрывов, возникающих в решении задачи Римана, компенсируется численной вязкостью. Однако этого оказывается недостаточно в случае неэволюционных стационарных ударных волн, которые возникают в стационарной звуковой точке трансзвуковых волн разрежения. В случае газовой динамики такие ситуации возникают в стационарных звуковых точках трансзвуковых волн разрежения. Для устранения этих проблем необходимо в соответствующем месте увеличивать численную вязкость.

В работе Эйнфельдта [148] был предложен простой способ введения энтропийной поправки, которая воздействует только на неэволюционные ударные волны, в то время как на эволюционные скачки эта операция не оказывает влияния. В случае газовой динамики энтропийную поправку необходимо использовать для звуковых характеристик для предотвращения появления в решении ударных волн разрежения. В результате энтропийная поправка Эйнфельдта в схеме Роу сводится к тому, что вместо исходных выражений для собственных значений (В.57), (В.63), соответствующих звуковым волнам, будем подставлять модифицированные выражения

$$\lambda_{+S} = \max\{v + c_s, v_R + c_{s,R}\}, \quad (\text{В.91})$$

$$\lambda_{-S} = \min\{v - c_s, v_L - c_{s,L}\}. \quad (\text{В.92})$$

Как показывают тестовые расчеты такая поправка работает корректно и действительно предотвращает появление в решении ударных волн разрежения [81].

Повышающая поправка

Определим вдоль координаты r узлы сетки r_i , где индекс i пробегает значения от 0 до N_r . Ячейки будем нумеровать полуцелыми индексами. При этом координаты центров ячеек определим с помощью выражений

$$r_{i+1/2} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}. \quad (\text{В.93})$$

Будем считать, что сетка является неоднородной и размер ячейки зависит от значения индекса. Введем величины, характеризующие шаги сетки

$$h_i = r_{i+1/2} - r_{i-1/2}, \quad (\text{В.94})$$

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}. \quad (\text{B.95})$$

С учетом этих обозначений схему Рун-Эйнфельдта-Ошера можно записать в виде

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1/2}^{n+1} - \mathbf{u}_{i+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i}{h_{i+1/2}} = 0, \quad (\text{B.96})$$

где n – номер временного слоя, Δt – временной шаг. Численные потоки через границы ячеек определяются следующими выражениями

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^0 + \delta \mathbf{F}_i, \quad (\text{B.97})$$

$$\mathbf{F}_i^0 = \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} + \mathbf{F}_{i-1/2}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| \mathbf{r}_{\alpha} \Delta S^{\alpha}, \quad (\text{B.98})$$

$$\delta \mathbf{F}_i = \frac{h_i}{2} \sum_{\alpha} \text{limiter}(\Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_i h_i^{-1}, \Delta_{\alpha}^{+} \mathbf{F}_{i-1} h_{i-1}^{-1}) - \frac{h_i}{2} \sum_{\alpha} \text{limiter}(\Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_i h_i^{-1}, \Delta_{\alpha}^{-} \mathbf{F}_{i+1} h_{i+1}^{-1}), \quad (\text{B.99})$$

$$\Delta_{\alpha}^{\pm} \mathbf{F}_i = \frac{1}{2} (\lambda_{\alpha} \pm |\lambda_{\alpha}|) \mathbf{r}_{\alpha} \Delta S^{\alpha}, \quad (\text{B.100})$$

где функция-ограничитель

$$\text{limiter}(x, y) = \frac{1 + \varphi}{2} \text{minmod}(\beta x, y) + \frac{1 - \varphi}{2} \text{minmod}(x, \beta y), \quad (\text{B.101})$$

$$\text{minmod}(x, y) = \frac{1}{2} [\text{sign}(x) + \text{sign}(y)] \min(|x|, |y|). \quad (\text{B.102})$$

В наших расчетах параметры схемы были заданы равными их оптимальным значениям $\varphi = 1/3$, $\beta = 4$ [81]. При таких значениях схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и третий порядок аппроксимации по пространству. Повышающие TVD (total variation diminishing) поправки Ошера [149] для потоков (B.98) учитывают неоднородность сетки.

В.3 Теплопроводность

При решении основной системы уравнений методом расщепления по физическим процессам возникает этап учета теплопроводности, который описывается следующим уравнением

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (\text{B.103})$$

где ρ — плотность среды, ε — удельная внутренняя энергия, t — время, а $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока. Связь теплового потока с градиентом температуры задается законом Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (\text{B.104})$$

где λ — коэффициент теплопроводности, а T — температура. Размерность левой части уравнения (B.103) соответствует плотности энергии, выделяемой в единицу времени

$$\left[\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] = [\nabla \cdot \mathbf{q}] = \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}. \quad (\text{B.105})$$

Для дальнейшего анализа удобно выразить внутреннюю энергию ε через температуру. В случае идеального газа

$$\varepsilon = c_V T, \quad (\text{B.106})$$

где c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме, которая определяется следующим выражением

$$c_V = \frac{k_B}{(\gamma - 1)\mu m_p}, \quad (\text{B.107})$$

где k_B — постоянная Больцмана, а γ — показатель адиабаты, m_p — масса протона, μ — средний молекулярный вес. Подставляя (B.106) и (B.104) в (B.103), получаем уравнение теплопроводности в терминах температуры

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T). \quad (\text{B.108})$$

В сферических координатах уравнение (B.108) принимает вид

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (\text{B.109})$$

Для численного решения уравнения (B.109) применяется неявная абсолютно устойчивая разностная схема

$$\rho c_V \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \hat{D}^{n+1} T^{n+1}, \quad (\text{B.110})$$

где $\hat{D}$ — разностный оператор, аппроксимирующий правую часть уравнения (B.109). Коэффициент теплопроводности λ зависит от температуры T ,

поэтому в неявной схеме оператор $\hat{D}$ берем в момент времени t^{n+1} . В результате схема (B.110) оказывается нелинейной.

Для нахождения температуры на следующем шаге t^{n+1} необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений. Для ее решения организуем итерационный процесс, который выглядит следующим образом

$$\rho_{cV} \frac{T^{(p+1)} - T^{(0)}}{\Delta t} = \hat{D}^{(p)} T^{(p+1)}, \quad (\text{B.111})$$

где $T^{(0)} = T^n$. Заметим, что разностный оператор $\hat{D}$ берется на предыдущем операционном шаге, в результате чего схема (B.110) оказывается линейной. При условии сходимости итерационного процесса при $p \rightarrow \infty$ должно выполняться условие $T^{(p)} \rightarrow T^{n+1}$, которое дает нам искомое решение. Оператор $\hat{D}$ представляет собой разностный аналог дифференциального оператора и выражается через коэффициенты A , B и C

$$\hat{D}T_c = AT_L + BT_C + CT_R, \quad (\text{B.112})$$

где T_L , T_C и T_R — значения температуры в соседних узлах сетки. Коэффициенты определяются соотношениями

$$A = \frac{r_1^2 \lambda_1}{r_c \bar{r} \Delta r \Delta r_1}, \quad (\text{B.113})$$

$$C = \frac{r_2^2 \lambda_2}{r_c \bar{r} \Delta r \Delta r_2}, \quad (\text{B.114})$$

$$B = -A - C. \quad (\text{B.115})$$

Подставляя (B.112) в (B.110), получаем систему уравнений для нахождения $T^{(p+1)}$

$$\rho_{cV} \frac{T_c^{(p+1)} - T_c^{(0)}}{\Delta t} = AT_L^{(p+1)} + BT_c^{(p+1)} + CT_R^{(p+1)}. \quad (\text{B.116})$$

Из (B.116) получим выражение

$$\rho_{cV} T_c^{(0)} = -\Delta t AT_L^{(p+1)} + (\rho_{cV} - \Delta t B) T_c^{(p+1)} - \Delta t CT_R^{(p+1)}. \quad (\text{B.117})$$

Введем обозначения

$$a_1 = \frac{r_1^2 \lambda_1}{\Delta r_1} \Delta t, \quad (\text{B.118})$$

$$a_2 = \frac{r_2^2 \lambda_2}{\Delta r_2} \Delta t. \quad (\text{B.119})$$

Тогда коэффициенты ΔtA , ΔtB , ΔtC примут вид

$$\Delta tA = \frac{a_1}{r_c \bar{r} \Delta r}, \quad (\text{B.120})$$

$$\Delta tC = \frac{a_2}{r_c \bar{r} \Delta r}, \quad (\text{B.121})$$

$$\Delta tB = -\frac{a_1 + a_2}{r_c \bar{r} \Delta r}. \quad (\text{B.122})$$

Приходим к схеме для прогонок

$$-a_1 T_L^{(p+1)} + (d_1 + a_1 + a_2) T_c^{(p+1)} - a_2 T_R^{(p+1)} = f_1, \quad (\text{B.123})$$

где d_1 и f_1 определяются соотношениями

$$d_1 = \rho c_v r_c \bar{r} \Delta r, \quad (\text{B.124})$$

$$f_1 = \rho c_v r_c \bar{r} \Delta r T_c^{(0)}. \quad (\text{B.125})$$

На внешней границе $r = r_{\max}$ задавалось условие отсутствия теплового потока

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (\text{B.126})$$

где $\lambda = \lambda_{\text{mol}}$. В алгоритме потоковой прогонки [119] это условие можно реализовать с помощью следующего выражения

$$T_{N_r+1/2}^{(p+1)} - T_{N_r-1/2}^{(p+1)} = 0. \quad (\text{B.127})$$

На внутренней границе $r = r_{\min}$ необходимо учесть тепловой поток, идущий из недр планеты. Этот вопрос уже обсуждался в разделе 1.3.3. Для полноты картины приведем еще раз это описание. Введем фиктивный поглощающий слой, толщина Δr которого равна размеру самой внутренней ячейки расчетной сетки. При этом центр этого слоя совпадает с положением внутренней границы $r = r_{\min}$. Тогда, пренебрегая в этом слое молекулярной теплопроводностью λ_{mol} , граничное условие в разностной схеме можно написать как

$$-\lambda_{\text{rad}} \frac{T_{1/2} - T_{-1/2}}{\Delta r} = q_{\text{rad}}, \quad (\text{B.128})$$

где $T_{1/2}$ и $T_{-1/2}$ — значения температуры в соседних ячейках справа и слева от внутренней границы. На каждом шаге p итерационного процесса это условие принимает вид

$$T_{-1/2}^{(p+1)} - T_{1/2}^{(p+1)} = \frac{3}{16} \Delta \tau T_{\text{atm}}^4 \left(T_{1/2}^{(p)} \right)^{-3}, \quad (\text{B.129})$$

где $\Delta \tau = \kappa \rho \Delta r$ — оптическая толщина поглощающего слоя.

В.4 Диффузия

Для моделирования переноса отдельных химических компонентов в верхних атмосферах горячих юпитеров используется уравнение многокомпонентной диффузии. Диффузионная скорость для компонента сорта α определяется выражением

$$w_\alpha = \eta_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{n_\alpha}{n} + \left(1 - \frac{m_\alpha}{m} \right) \frac{\partial}{\partial r} \ln P + \alpha_{T,\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \ln T \right] + K_E \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{n_\alpha}{n}, \quad (\text{B.130})$$

где $\eta_\alpha = D_\alpha + K_E$ – обобщенный коэффициент диффузии, D_α – коэффициент молекулярной диффузии, K_E – коэффициент турбулентной диффузии, $\alpha_{T,\alpha}$ – коэффициент термодиффузии.

Уравнение неразрывности для каждого компонента в сферически-симметричном случае принимает вид

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_\alpha w_\alpha). \quad (\text{B.131})$$

После подстановки выражения (B.130) для w_α получаем

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \eta_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_\alpha u_\alpha), \quad (\text{B.132})$$

где u_α – скорость, определяемая следующим выражением

$$u_\alpha = D_\alpha \left[\left(1 - \frac{m_\alpha}{m} \right) + \alpha_{T,\alpha} \right] \frac{\partial}{\partial r} \ln T - \left[\frac{m_\alpha}{m} D_\alpha + K_E \right] \frac{\partial}{\partial r} \ln n. \quad (\text{B.133})$$

Для численного решения уравнения (B.132) применяется неявная абсолютно устойчивая разностная схема. Общий вид схемы

$$\frac{n_\alpha^{n+1} - n_\alpha^n}{\Delta t} = \hat{D}^{n+1} n_\alpha^{n+1} + \hat{L}^{n+1} n_\alpha^{n+1}, \quad (\text{B.134})$$

где $\hat{D}$ – диффузионный оператор, $\hat{L}$ – оператор, который аппроксимирует второе слагаемое в правой части (B.132).

В связи с нелинейностью задачи используется итерационный процесс

$$\frac{n_\alpha^{(p+1)} - n_\alpha^{(0)}}{\Delta t} = \hat{D}^{(p)} n_\alpha^{(p+1)} + \hat{L}^{(p)} n_\alpha^{(p)}, \quad (\text{B.135})$$

где $n_\alpha^{(0)} = n_\alpha^n$ – начальное приближение.

Расчетная область разбивается на N ячеек. Для произвольной ячейки C с соседями L (левый) и R (правый) диффузионный оператор аппроксимируется выражением

$$\hat{D}n_{\alpha,C} = An_{\alpha,L} + Bn_{\alpha,C} + Cn_{\alpha,R}. \quad (\text{B.136})$$

После подстановки в уравнение (B.135) получаем для каждой ячейки

$$-\Delta t A n_{\alpha,L}^{(p+1)} + (1 - \Delta t B) n_{\alpha,C}^{(p+1)} - \Delta t C n_{\alpha,R}^{(p+1)} = n_{\alpha,C}^{(0)} + \Delta t \hat{L}^{(p)} n_{\alpha,C}^{(p)}. \quad (\text{B.137})$$

Вводя обозначения

$$a_1 = \frac{r_L^2 \eta_{\alpha,L}}{\Delta r_L} \Delta t, \quad (\text{B.138})$$

$$a_2 = \frac{r_R^2 \eta_{\alpha,R}}{\Delta r_R} \Delta t, \quad (\text{B.139})$$

$$d_1 = r_C^2 \Delta r, \quad (\text{B.140})$$

$$f_1 = d_1 \left[n_{\alpha,C}^{(0)} + \Delta t \hat{L}^{(p)} n_{\alpha,C}^{(p)} \right], \quad (\text{B.141})$$

уравнение (B.137) принимает вид

$$-a_1 n_{\alpha,L}^{(p+1)} + (d_1 + a_1 + a_2) n_{\alpha,C}^{(p+1)} - a_2 n_{\alpha,R}^{(p+1)} = f_1. \quad (\text{B.142})$$

Для обеспечения устойчивости и физической корректности при больших градиентах концентрации вводится ограничение на диффузионную скорость

$$|w_\alpha| \leq w_{\max}, \quad (\text{B.143})$$

где $w_{\max}$ – максимально допустимая скорость диффузии (например, $w_{\max} = 0.1c_s$).

Скорректированный коэффициент диффузии вычисляется как

$$\tilde{\eta}_\alpha = \eta_\alpha \cdot \frac{1}{1 + X}, \quad (\text{B.144})$$

где

$$X = \frac{1}{w_{\max} n_\alpha} \left| \eta_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial r} \right|. \quad (\text{B.145})$$

Скорость также ограничивается

$$\tilde{u}_\alpha = \text{sign}(u_\alpha) \min(|u_\alpha|, w_{\max}). \quad (\text{B.146})$$

На границах расчетной области ($r = R_{\text{pl}}$ и $r = r_{\text{out}}$) задается условие нулевого диффузионного потока

$$\Phi_\alpha = 0. \quad (\text{B.147})$$

Для левой границы это условие аппроксимируется как

$$\eta_0^{(p)} \frac{n_C^{(p+1)} - n_L^{(p+1)}}{\Delta r} + u_0^{(p)} n_0^{(p)} = 0, \quad (\text{B.148})$$

откуда

$$n_C^{p+1} - n_L^{(p+1)} = -\frac{\Delta r}{\eta_0^{(p)}} u_0^{(p)} n_0^{(p)}. \quad (\text{B.149})$$

В методе прогонки это соответствует коэффициентам

$$k_1 = 1, \quad (\text{B.150})$$

$$m_1 = \frac{\Delta r}{\eta_0} u_0 n_0. \quad (\text{B.151})$$

Аналогичные условия формулируются для правой границы.

Представленная схема является абсолютно устойчивой, консервативной и обеспечивает физически корректное описание процессов многокомпонентной диффузии в верхних атмосферах экзопланет.