

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
космических исследований Российской академии наук,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
"Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

На правах рукописи

Кондратьев Илья Алексеевич

**Магниторотационные процессы в коллапсирующих
сверхновых**

Специальность 1.3.1 —
«Физика космоса, астрономия»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Моисеенко Сергей Григорьевич

Москва — 2024

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Трехмерное численное моделирование теплопроводности во внешних слоях замагниченных нейтронных звезд	21
1.1 Анизотропная теплопроводность в магнитном поле	21
1.2 Модель нейтронной звезды	23
1.3 Одномерная модель внешней замагниченной оболочки нейтронной звезды	25
1.3.1 Аппроксимационные соотношения $T_s - T_b$	28
1.4 Краевая задача для уравнения теплопроводности в коре нейтронной звезды	32
1.5 Распределения температуры нейтронной звезды для осесимметричных магнитных полей дипольного и квадрупольного типов	33
1.6 Результаты расчетов для неосесимметричных конфигураций поля	38
1.7 Наблюдательные проявления для рассчитанных распределений температуры замагниченной вращающейся нейтронной звезды . .	41
1.7.1 Методы построения синтетических тепловых спектров и кривых блеска вращающейся замагниченной нейтронной звезды	41
1.7.2 Результаты расчетов	43
1.8 Заключение к Главе 1	50
Глава 2. Численные методы для моделирования астрофизических МГД-течений с использованием явных и полунявных конечно-объемных подходов . . .	53
2.1 Численная конечно-объемная схема для уравнений газовой динамики	53
2.1.1 Структура расчетной сетки	55
2.1.2 Явная численная схема для уравнений газовой динамики .	57

	Стр.	
2.1.3	Повышение порядка точности по пространству и времени	60
2.1.4	Полуневная численная схема для уравнений газовой динамики	63
2.1.5	Тестовые расчеты	69
2.2	Развитие на систему уравнений магнитной гидродинамики	73
2.3	Учет самогравитации в расчетах	78
2.4	Заключение к Главе 2	80
 Глава 3. Численное моделирование магниторотационной сверхновой с нарушенной зеркальной симметрией магнитного поля		 82
3.1	Магниторотационный механизм взрыва сверхновой и сценарии с нарушением зеркальной симметрии магнитного поля	82
3.2	Начальные модели	85
3.3	Используемые приближения для среды и учет слабых процессов	87
3.4	Результаты расчетов	89
3.4.1	Суперпозиция дипольного и квадрупольного магнитных полей	92
3.4.2	Смещенное дипольное магнитное поле	97
3.4.3	Суперпозиция дипольного и симметричного тороидального магнитных полей	99
3.5	Заключение к Главе 3	103
 Заключение		 108
 Список литературы		 111
 Приложение А. Уравнение состояния в оболочке нейтронной звезды и коэффициенты непрозрачности		 127
A.1	Уравнение состояния	127
A.2	Непрозрачности	128
 Приложение Б. Метод опорных операторов на сетке, состоящей из тетраэдров		 133
B.1	Разностные аналоги дифференциальных операторов	134

	Стр.
Б.2	Граничные операторы 136
Б.3	Тестирование построенных операторов 137
Б.4	Операторная формулировка краевой задачи для уравнения теплопроводности в коре нейтронной звезды 139
Б.5	Алгоритм решения задачи о теплопроводности во внешних слоях замагниченных НЗ 140

Введение

Актуальность работы

Данная диссертация посвящена численному исследованию процессов, связанных с наличием магнитного поля и вращения при взрывах коллапсирующих сверхновых и остывании одиночных нейтронных звезд.

Взрывы сверхновых с коллапсирующим ядром являются одними из самых ярких событий во Вселенной. По окончании стадии термоядерного горения ядро массивной ($M > 8M_{\odot}$) звезды теряет гидродинамическую устойчивость, и за характерное время $\lesssim 1$ секунды после катастрофического сжатия ядра до ядерных плотностей высвобождается огромное количество энергии ($E \sim 10^{53}$ эрг), по порядку величины равное энергии гравитационной связи сколлапсировавшего объекта. Согласно наблюдениям, характерная энергия около $\sim 10^{51}$ эрг передается веществу оболочки ядра, которое выносятся в межзвездную среду в виде взрывной волны, обогащая Вселенную тяжелыми элементами [1; 2]. Несмотря на более чем 50-летнюю историю изучения механизма вспышек, его детали не вполне выяснены к настоящему времени, что делает данную проблему одной из старейших задач фундаментальной астрофизики.

Важной частью исследований в области физики компактных объектов, непосредственно связанной с теорией коллапсирующих сверхновых, является изучение как микроскопических свойств плотного вещества протонейтронной звезды, так и макроскопических параметров самого сколлапсировавшего объекта при его рождении (масса и размер, момент вращения, величина и конфигурация магнитного поля, наличие "кика" [3] – приобретение большой линейной скорости движения), существенным образом влияющих на его дальнейшую эволюцию и наблюдательные проявления. Процессы, определяющие динамику сверхновых, являются существенно нелинейными и многомерными, поэтому обычно прибегают к глобальному (магнито)гидродинамическому численному моделированию гравитационного коллапса звездного ядра и дальнейшего разлета оболочки при наличии нейтринного переноса в веществе, что требует существенных вычислительных мощностей, а также использования современных численных моделей динамики сплошной среды.

При наличии вращения и магнитного поля в звезде возможны взрывы сверхновых посредством магниторотационного механизма [4]. Образующиеся в процессе коллапса ядра нейтронные звезды (НЗ), обладающие сильным магнитным полем – магнитары – представляют собой интерес, поскольку являются природными лабораториями для изучения свойств среды в очень сильных ($B \gg B_c = 4.414 \cdot 10^{13} \text{Гс}$) магнитных полях. Есть ряд наблюдательных и теоретических оценок, а также численных результатов, согласно которым быстро вращающиеся сильнозамагниченные НЗ могут быть центральным элементом при вспышках гиперновых [5] (взрывов, чья энергия в несколько раз выше стандартных сверхновых), а также при длинных гамма-всплесках [6], механизм которых не вполне ясен в настоящее время.

После стадии формирования НЗ, начинается стадия ее остывания, которая длится на протяжении миллионов лет. На этой стадии, в некоторых случаях НЗ можно наблюдать как слабый пульсирующий рентгеновский источник. К настоящему моменту известно несколько объектов, отождествленных с нейтронными звездами, излучающих почти чернотельный спектр в мягком рентгеновском диапазоне, искаженный эффектами наличия сильного магнитного поля. Великолепная Семерка – это неформальное название группы из одиночных, остывающих нейтронных звезд, которые находятся на расстоянии от 120 до 150 парсек от Земли ([7–11], см. также [12]). Эти объекты также называются XDINS (X-ray Dim Isolated Neutron Stars). Долгое время их оставалось только семь, однако недавние наблюдения на XMM-Newton [13] показали, что радиопульсар PSR J0726-2612 также имеет тепловое рентгеновское излучение и может быть похож на объекты "Семерки". Эти объекты интересны также тем, что на основе данных теплового излучения от них можно изучать структуру сильного магнитного поля в нейтронных звездах. Наличие достаточно сильного поля ($B \gg 10^{11} \text{Гс}$) приводит к анизотропии теплового потока в коре и внешней оболочке нейтронной звезды, и, следовательно, неоднородному распределению температуры по ее поверхности. Причиной пульсаций их теплового излучения является то, наблюдатель может видеть за период вращения нейтронной звезды более холодные или более горячие пятна, величина и интенсивность которых существенно зависят от локальной величины и направления магнитного поля источника. Кривые блеска нескольких объектов Семерки (RX J0720.4-3125, RX J0806.4-4123 и RX J0420.0-5022) проявляют достаточно сильные пульсации и имеют несимметричную форму пиков, что, вероятно, определяется наличием

недипольного магнитного поля в них [14]. Многомерное численное моделирование процессов переноса тепла во внешних слоях нейтронных звезд и сравнение его результатов с наблюдательными данными теплового излучения от них позволит лучше прояснить структуру магнитного поля на поверхности нейтронной звезды. Сравнение результатов наблюдений [7; 8] с расчетами тепловой эволюции [12; 15–18] вращающихся замагниченных НЗ может помочь лучше установить структуру магнитного поля в этих объектах, а с недавних пор, с такими современными рентгеновскими телескопами, как *NICER* [19], возможно сравнение размеров наблюдаемого теплового источника с результатами численных моделей, что позволяет наложить более точные ограничения на уравнение состояния сверхплотного вещества по наблюдаемому радиусу [20; 21].

Математические модели, описывающие поведение астрофизической плазмы в указанных здесь объектах, являются сложными нелинейными многомерными (интегро-) дифференциальными уравнениями, ввиду чего решить их аналитически можно только для очень узкого числа случаев при наличии упрощающих рассмотрение предположений. Ввиду этого часто приходится прибегать к численным моделям. Развитие различных численных подходов, написание комплексов программ для моделирования различных систем, а также их использование для исследования различных задач астрофизики представляют собой отдельный интерес и являются основной частью раздела относительно молодой науки – *Вычислительной астрофизики*. Часто космическая плазма может рассматриваться как сжимаемая среда без учета диссипативных процессов, поскольку такие безразмерные параметры среды, как, например, число Рейнольдса, велики ввиду больших размеров систем. Ввиду этого при исследовании динамики космической плазмы широко используются численные модели идеальных сплошных сред. В основном, используются три подхода к моделированию уравнений газовой динамики/магнитной гидродинамики. Одним из первых методов, который начал применяться для моделирования астрофизических течений, является метод конечных разностей, аппроксимирующий исходные дифференциальные уравнения гидродинамики при помощи Эйлера или Лагранжевого подхода с использованием искусственной вязкости на ударных волнах [22–24]. Такие расчетные коды, как *ZEUS – 2D* [25], разработанный в начале 90-х годов, используются астрофизиками и по сей день. Вторым подходом является использование бессеточного метода частиц, который аппроксимирует дифференциальные уравнения динамики среды в лагранжевой

форме. Наиболее употребляемым подходом является гидродинамика сглаженных частиц – smoothed particles hydrodynamics (SPH), разработанная в конце 70-х годов [26]. Не смотря на ранние проблемы данного метода ввиду наличия численного шума, плохого разрешения неустойчивостей, а также сильного размазывания ударных волн, данный подход активно дорабатывался в последующие годы [27; 28] и используется в настоящее время для большого числа астрофизических задач в силу своей простоты для программирования, сохранения углового момента, а также достаточно быстрого и эффективного учета самогравитации. Наконец, третий – и самый употребляемый – подход основан на решении уравнений динамики среды в интегральной форме [29] с использованием решения задачи Римана для расчета потоков между ячейками. Данный подход называется методом конечного объема, и в настоящее время он является распространенным методом для моделирования астрофизических течений в рамках Эйлера подхода. Для моделирования диссипативных процессов вообще, и теплопроводности в компактных объектах в частности, характерно использование конечно-разностных подходов с неявными схемами, что приводит к решению больших разреженных систем алгебраических уравнений [30].

Степень проработанности рассматриваемой области

Магниторотационные сверхновые и формирование быстролетающих нейтронных звезд

За последние 50 лет было предложено несколько механизмов взрыва сверхновых с коллапсирующим ядром (см., напр., [2]), тем или иным образом объясняющих возникновение взрывной волны и ее энергетику, свойства компактного объекта, а также параметры нейтринного и гравитационного излучения. Среди наиболее разработанных ветвей современной теории коллапсирующих сверхновых можно выделить нейтринный и магниторотационный (MP) механизмы. В рамках нейтринного механизма [31; 32], возникшая вблизи протонейтронной звезды ударная волна отскока, движущаяся наружу, останавливается падающим на центр веществом с периферии ядра звезды по

прохождении ~ 100 км. Последующее взаимодействие нейтрино с веществом за фронтом стоячей ударной волны, а также усиливающие его гидродинамические эффекты, такие как конвекция [32; 33], неустойчивость стоячей аккрецирующей ударной волны (SASI - Standing Accretion Shock Instability, [34]), приводят к перемешиванию и нагреву вещества и дальнейшему движению ударной волны наружу. Данный механизм требует точного учета эффектов взаимодействия нейтрино с веществом в оболочке сверхновой, поскольку именно нейтринный нагрев вещества играет доминирующую роль в ускорении стоячей ударной волны. Несмотря на существенные успехи в разработке теории нейтринного механизма взрыва, использование многомерных комплексов программ для решения уравнений гидродинамики с учетом переноса нейтрино в веществе (см., напр., [35]), в настоящее время предсказываемая в расчетах энергия взрыва в рамках нейтринного механизма существенно меньше наблюдаемых значений [36] (см., однако, недавние работы для быстро вращающихся предсверхновых [37], в которых энергия взрыва приближается к наблюдаемым значениям).

MP механизм, предложенный в работе [4], с другой стороны, несколько смягчает требования к учету нейтринной физики, однако требует наличия в ядре звезды вращения и магнитного поля. В рамках MP механизма после коллапса, ввиду его неоднородности, система представляет собой быстровращающуюся протонейтронную звезду и дифференциально вращающуюся оболочку. Далее, замороженное магнитное поле в системе усиливается за счет вращательной энергии оболочки, "накручиваясь" со временем. Увеличение магнитного давления приводит к возникновению волны сжатия, которая быстро переходит в движущуюся наружу быструю магнитогидродинамическую (МГД) ударную волну, генерирующую взрыв сверхновой. Как одномерные МГД расчеты, выполненные в 1970-х годах, с простым учетом нейтринной физики [38; 39], так и современные многомерные модели (см. работы с различным учетом нейтрино, конфигураций вращения и магнитного поля [40—46], в том числе в рамках релятивистской МГД с двухмоментным учетом переноса нейтрино [47—51]) позволяют получить как наблюдаемую энергетiku взрыва, так и характерные свойства кривых нейтринного излучения во время коллапса, предсказания гравитационно-волновых сигналов, а также характерные параметры протонейтронной звезды, что делает магниторотационный механизм одним из самых реалистичных. Угловая скорость в оболочке спадает наружу, что является необходимым условием для возникновения магнитовращательной

неустойчивости (МВН, MRI - magnetorotational instability, [41; 52; 53]). Это может приводить к экспоненциальному росту поля вблизи протонейтронной звезды и более эффективной перекачке энергии вращения в энергию взрыва сверхновой. Дополнительный интерес представляют трехмерные модели МР-сверхновых, которые стали возможны в последние годы [5; 46; 49; 54]. В рамках 3D моделей струйные выбросы из сверхновых могут потерять устойчивость за счет изгибной МГД-неустойчивости, обнаруженной в работе [46], что уменьшает эффективность МР-механизма. С другой стороны, в трехмерных моделях возможна еще более эффективная, чем в 2D, перекачка энергии вращения в энергию магнитного поля за счет неосесимметричных мод МВН и динамо-эффекта [55]. В настоящее время в теории МР сверхновых остается еще много открытых вопросов.

В рамках МР механизма, в силу наличия выделенного направления (ось вращения), взрыв сверхновой всегда получается существенно несферичным, при разлете оболочки возможно формирование струйных коллимированных выбросов - джетов (см., напр., расчеты [43; 45] и данные недавних наблюдений [56]). Однако, при нарушении зеркальной симметрии магнитного поля в предсверхновой возможна дополнительная асимметрия выброса относительно экваториальной плоскости. Это происходит ввиду того, что в разных полушариях усиление тороидального магнитного поля будет происходить по-разному, приводя к струйным выбросам различной интенсивности. В этом случае в системе возможно формирование нескомпенсированного импульса. В силу закона сохранения импульса это должно приводить к образованию линейной скорости ("kick", кик) у протонейтронной звезды. Наличие киков наблюдается у большого количества НЗ [3; 57–60], характерная величина скорости составляет несколько сотен километров в секунду. Стандартным способом генерации скорости НЗ при ее формировании считается наличие асимметрии выброса вещества во взрывах сверхновых и/или анизотропия в нейтринном излучении после коллапса. Асимметрия взрыва сверхновой может генерироваться разными способами. Так, в рамках нейтринного механизма [61–63] анизотропия взрыва и соответствующий ей нескомпенсированный импульс, передаваемый нейтронной звезде, генерируются главным образом ввиду возникновения конвекции и SASI за фронтом стоячей ударной волны отскока. При наличии сильного магнитного поля для электронов возникают эффекты квантования Ландау, приводящие к тому, что меняется как фазовый объем, так и сечение взаимодействия для

бета-процессов, ввиду чего локальная нейтринная светимость изменится в соответствии с конфигурацией поля при величинах $B \gtrsim 10^{15}$ Гс. Это также может привести к передаче импульса от нейтрино к веществу и асимметрии взрыва сверхновой и, вследствие этого, к возникновению кика (см. [64–67]).

В простейшем случае генерации асимметрии взрыва МГД-процессами, зеркальная симметрия магнитного поля предсверхновой нарушается уже при наличии комбинации из четного и нечетного (в смысле разложения в ряд исходной конфигурации поля) мультиполей в структуре магнитного поля предсверхновой [68]. В другом варианте, возможно присутствие начального тороидального поля, симметричного относительно экваториальной плоскости совместно, например, с дипольным полем [69] (см. также недавнюю работу [5]). Дополнительно, в ядре звезды возможно наличие смещенной относительно центра симметричной конфигурации магнитного поля, что подтверждается наблюдениями (см., напр., [70]). В настоящий момент не вполне ясно, какие именно скорости могут возникать у НЗ в рамках МР механизма сверхновых при наличии асимметричных магнитных полей, поскольку систематических численных исследований по данному вопросу еще не проводилось.

Тепловая эволюция вращающихся замагниченных нейтронных звезд

Работы по тепловым процессам в НЗ имеют достаточно долгую историю, насчитывающую около 40 лет (см. обзоры [21; 71]), а также широкий спектр решаемых задач. По сравнению темпа охлаждения НЗ в рамках теоретических предсказаний с наблюдениями [72] можно предсказать свойства их оболочек, а также ставить ограничения на уравнения состояния сверхплотного вещества в ядре НЗ. На стадии охлаждения НЗ может наблюдаться как тусклый рентгеновский источник [9; 10]. Одни из наиболее интересных объектов такого вида – это т.н. ”Великолепная семерка” – семь одиночных радиотихих НЗ, излучающих почти чернотельный спектр, модифицированный эффектами магнитного поля. На поверхности НЗ магнитные поля могут составлять $\sim 10^{12-13}$ Гс и более. Один из способов оценки величины магнитного поля на поверхности НЗ основан на наблюдении их теплового излучения в мягком рентгеновском диапазоне [11; 73]. Детектируемые кривые блеска по периоду вращения нейтронных

звезд имеют периодическую природу в объектах типа "Семерки". Периодические изменения спектра таких объектов говорят о неоднородном распределении их поверхностной температуры, связанном с влиянием поля [74]. Неоднородное распределение температуры на поверхности НЗ определяется анизотропной теплопроводностью вырожденного вещества при наличии сильного магнитного поля. В оболочках нейтронных звезд, состоящих из плазмы вырожденных (становящихся ультррелятивистскими при плотности $\rho \gg 10^6$ г/см³) электронов, и невырожденных нерелятивистских ядер, подавляется теплопроводность поперек силовых линий магнитного поля. Давление определяется электронами, ядра находятся в состоянии кулоновского кристалла, при этом тепло переносится также электронами, с участием лучистой теплопроводности во внешних слоях компактной звезды. Степень подавления теплового потока перпендикулярно магнитному полю определяется параметром магнетизации $\omega\tau$, где τ - среднее время между электрон-ядерными соударениями, $\omega = eB/m_e c$ - плазменная циклотронная частота. Исследования по теплопроводности в нейтронных звездах проводятся, как правило, с рассмотрением глобальных численных моделей переноса тепла в коре [12; 15–18], при наличии одномерных моделей излучающих оболочек (см., напр., [75]). В цитируемых исследованиях рассмотрены различные конфигурации магнитных полей (как правило, или дипольной структуры [12; 76], или комбинации диполя и сильного тороидального поля в коре, моделирующего магнитарную активность [18]), все работы проведены в двумерной постановке. Характерные пульсации теплового потока на кривой блеска, полученные в данных работах, могут достигать существенных значений ($PF > 0.1 - 0.3$) в зависимости от величины и конфигурации магнитного поля в коре нейтронной звезды, что может быть зарегистрировано современными рентгеновскими телескопами. Ряд работ также посвящен сравнению кривых блеска рентгеновских источников с предсказаниями численных моделей (см., напр., [14; 20] при наличии соосных дипольного и квадрупольного полей), к которым, в некотором смысле, относится и часть данной работы, посвященная исследованию качественных особенностей на кривых блеска в зависимости от конфигурации (неосесимметричного) поля без привязки к конкретным наблюдениям. В цитируемых работах [14; 20] решается обратная задача нахождения конфигурации магнитного поля путем сравнения большой модельной выборки кривых блеска для разных (осесимметричных) магнитных полей с конкретными данными наблюдений. Наконец, ряд работ в данной области посвящен уни-

фикации наблюдательных проявлений [71] от разных типов нейтронных звезд путем решения задачи эволюции распределения температуры совместно с эволюцией магнитного поля. Наблюдательные проявления нейтронных звезд (т.е. детектирование объекта в виде пульсара, нейтронной звезды с магнитарной активностью, или объекта типа "Великолепной семерки") существенно зависят от тензоров тепло- и электропроводности, а также эффекта Холла в коре нейтронной звезды (см. работы [17; 18; 71], где рассматриваются модели магнитотепловой эволюции нейтронных звезд в 2D постановке). Недавно, получили свое развитие и трехмерные модели магнитотепловой эволюции при наличии ряда упрощающих предположений [77; 78].

Дополнительно, часть работ посвящена расчетам кинетических коэффициентов электронов в коре нейтронной звезды. Модели остывания нейтронных звезд требуют достаточно точного учета зависимости кинетических коэффициентов электронов в коре от магнитного поля, поскольку и диагональные, и Холловские члены в тензорах кинетических коэффициентов могут существенно влиять на распределение физических величин по коре и поверхности нейтронной звезды [21; 79; 80].

Численные методы для моделирования астрофизических задач

Метод конечного объема основан на аппроксимации интегральных уравнений среды в форме законов сохранения массы, импульса и энергии для уравнений газовой динамики с дополнительным законом сохранения для магнитного потока в МГД. Исходные дифференциальные уравнения в дивергентной форме интегрируются по объему расчетной ячейки [29; 81], после чего применяется теорема Гаусса на сетке. В каждой ячейке получается постоянное состояние среды, для которого изменение за шаг по времени равно изменению потоков сохраняющихся (консервативных) величин через границы ячейки. Для корректной эволюции среды необходимо использовать выражение для потока, как можно более близкое к физической постановке задачи. Впервые эта идея была выражена С.К. Годуновым [82], который предположил, что для вычисления потока между ячейками нужно использовать решение задачи о распаде произвольного разрыва (задаче Римана) между двумя постоянными состоя-

ниями среды вблизи границы. Метод Годунова исходно был методом первого порядка точности. Однако позднее данный метод был развит на более высокие порядки аппроксимации по пространству с использованием квазимонотонных кусочно-полиномиальных уточнений расчетных величин для построения более точных выражений для потока (см. [29; 83; 84]). В настоящее время большинство расчетных кодов основано на этом подходе с использованием явных схем для моделирования уравнений среды (см. [35; 85; 86]). Однако, такие подходы могут быть не очень эффективны в силу условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви [87] для явных схем, если в системе присутствуют области с очень большой скоростью звука. Такие ситуации часто возникают при моделировании течений с разрешенными на сетке протозвездами и протонейтронными звездами. В этом случае подходы, основанные на полуневных схемах, исключаящих скорость звука из условия устойчивости, могут быть более привлекательными. Идея применить классический полуневный подход [88] из методов для несжимаемой гидродинамики к сжимаемым течениям была предложена в работе [89], однако только относительно недавно свое развитие получили т.н. All-Mach number solvers (см. [90—94] для газовой динамики и [95; 96] для МГД), позволяющие единообразно моделировать как сжимаемые течения с высокими числами Маха, так и почти несжимаемую жидкость, при этом выполнение законов сохранения и разрывы будут воспроизводиться корректно в силу использования консервативных методов конечного объема.

Применение стандартных Эйлеровых подходов в криволинейных координатах при моделировании важных в астрофизических приложениях течений с сильным крупномасштабным вращением также может существенно ухудшить качество решения ввиду того, что шаг по времени будет определяться быстрой скоростью вращения компактного объекта или аккреционного диска вблизи него, а диссипация численной схемы пропорциональна высокой скорости вращения. Для случая двойных систем, когда вращение фиксировано и имеет известную структуру, для улучшения качества метода можно перейти в неинерциальную систему отсчета [81], однако в этом случае консервативность уравнений нарушается. Для решения этой проблемы также используются квазилагранжевы подходы вдоль направления вращения по азимутальной координате исключаящие быструю орбитальную скорость из расчета потоков. Одна из первых работ на эту тему – метод *FARGO* (Fast Advection in Rotating Gaseous Objects), предложенный в работе [97] для моделирования

Кеплеровского вращения протопланетных дисков. Данный метод не работает с дозвуковым вращением, характерным для протозвезд и МР сверхновых, поскольку "квазилагранжевость" достигается за счет дискретной перестройки сетки без изменения ее структуры для средней орбитальной скорости в кратное число раз большей характерной скорости звука, чего невозможно достичь при дозвуковом вращении. Более гибкий подход предложен в работе [98], посвященной коду *DISCO* для моделирования МГД-процессов в контексте аккреции в двойных и дисковых системах. В данной работе реализована вращающаяся сетка переменной структуры, в котором каждая грань может двигаться с произвольной скоростью в азимутальном направлении. Данный подход лежит в классе т.н. смешанных Эйлерово-Лагранжевых (СЭЛ) методов (см., напр., [99; 100]), в которых потоки через границы ячеек рассчитываются в системе отчета движущейся грани. Ввиду этого уменьшаются ошибки адвекции схем, а также смягчается условие устойчивости для допустимого шага по времени. Использование криволинейных геометрий и квазилагранжевого подхода совместно с полунеявными методами в настоящее время не рассматривалось.

Для исследования процессов теплопроводности в нейтронных звездах, рассмотренных в данной диссертации, используются неявные схемы конечно-разностные типа Крэнка-Николсона для параболических уравнений [30; 76; 101]. В данной работе конечно-разностный метод опорных операторов был развит на трехмерные задачи для моделирования теплопроводности в коре нейтронной звезды. При моделировании магнитотепловой эволюции нейтронных звезд в систему добавляется уравнение на эволюцию магнитного поля в приближении электронной МГД. В настоящее время используются конечно-объемные методы Годуновского типа для учета эффекта Холла в коре [71] в 2D, а также спектральные методы при рассмотрении трехмерных задач [77; 78].

Целью настоящей работы являются изучение влияния неосесимметричных конфигураций магнитных полей на процессы анизотропного переноса тепла во внешних слоях нейтронных звезд и связанные с ним наблюдательные проявления, а также исследование свойств компактного объекта (приобретенной скорости протонейтронной звезды) и морфологии взрыва в рамках магниторотационного сценария вспышек коллапсирующих сверхновых при наличии экваториально несимметричных магнитных полей в ядре звезды-предсверхновой.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить распределения температуры в коре и на поверхности замагниченной нейтронной звезды. Построить по рассчитанным распределениям поверхностной температуры синтетические кривые блеска и тепловые спектры. Для этого необходимо разработать комплекс программ для численного решения трехмерного уравнения теплопроводности в коре и внешней оболочке замагниченной нейтронной звезды; разработать комплекс программ для построения тепловых спектров и кривых блеска замагниченной нейтронной звезды, излучающей в тепловом диапазоне.
2. Исследовать задачу о коллапсе ядра массивной звезды и магниторотационном взрыве сверхновой при нарушении зеркальной симметрии магнитного поля. Для этого необходимо разработать комплекс программ для моделирования многомерных уравнений магнитной гидродинамики при наличии самогравитации и уравнения состояния общего вида, заданного в табличной форме, с учетом процессов излучения и поглощения нейтрино и антинейтрино.

Научная новизна:

1. Впервые было проведено трехмерное самосогласованное исследование распространения тепла во внешних слоях замагниченных нейтронных звезд и его наблюдательных проявлений.
2. Впервые разработан комплекс программ для исследования астрофизических МГД-течений при помощи полунявной численной схемы высокого порядка точности с использованием подвижности сетки в криволинейной геометрии для уравнения состояния общего вида, самогравитации и учета нейтринных потерь.
3. Было выполнено оригинальное систематическое исследование возникновения больших линейных скоростей (эффект отдачи) нейтронных звезд, формирующихся при магниторотационных взрывах сверхновых. Впервые проведено сравнение различных способов генерации экваториальной асимметрии магниторотационного взрыва сверхновой.

Практическая значимость

Полученные распределения температуры на поверхности нейтронной звезды, а также синтетические кривые блеска для них, позволяют объяснить

качественные особенности наблюдаемых кривых блеска одиночных вращающихся нейтронных звезд, связанные со структурой магнитного поля.

Разработанный комплекс программ для решения трехмерного уравнения теплопроводности в коре нейтронной звезды и моделирования синтетических кривых блеска по получаемым распределениям температуры может быть использован для сравнения реальных спектров и кривых блеска теплового излучения нейтронных звезд с предсказаниями теоретических моделей без предположений о симметрии магнитного поля.

Численное моделирование магниторотационного взрыва сверхновой с нарушением зеркальной симметрии магнитного поля позволило получить эффект отдачи нейтронных звезд и возникновение больших линейных скоростей при их рождении. Это позволяет естественным образом объяснить существование быстролетающих нейтронных звезд.

Разработанный комплекс программ для решения многомерных уравнений магнитной гидродинамики при наличии самогравитации и нейтринных потерь может быть использован для моделирования совершенно разных замагниченных течений как астрофизической, так и лабораторной плазмы.

Методология и методы исследования. Все исследования, изложенные в тексте диссертации, проведены при помощи методов численного моделирования. Для расчетов теплопроводности во внешних слоях (Глава 1) замагниченной нейтронной звезды использовался трехмерный конечно-разностный метод опорных операторов, хорошо зарекомендовавший себя в различных двумерных астрофизических расчетах [22; 23; 102]. Сеточные аналоги дифференциальных операторов построены на сетке из тетраэдров. Для расчета модели внешней оболочки использовались стандартные методы Рунге-Кутты решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методики для гидродинамических уравнений, изложенные в Главе 2, используют аппарат метода конечного объема [29; 81] для уравнений, записанных в форме законов сохранения. В МГД-коде реализована процедура очистки дивергенции магнитного поля [103]. Для МГД расчетов взрыва коллапсирующих сверхновых в Главе 3 также использовался метод конечного объема в сферических координатах с использованием приближенного метода Годуновского типа [104]. Использовались кусочно-параболический метод [84] для уточнения порядка точности по пространству и монотонный метод Рунге-Кутты третьего порядка точности по времени [105].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Впервые на основе разработанных комплексов программ для трехмерного моделирования теплопроводности в коре нейтронной звезды при наличии тензора теплопроводности, зависящего от магнитного поля были получены трехмерные распределения температуры в коре и на поверхности нейтронной звезды. Были построены синтетические кривые блеска. Исследовано влияние неосесимметричных полей на наблюдательные проявления одиночных радиотихих нейтронных звезд.
2. Для моделирования самогравитирующих многомерных астрофизических МГД течений разработан комплекс программ с использованием метода конечного объема. Он основан как на явных по времени схемах высокого порядка точности, так и с использованием полунявных алгоритмов с более мягким условием устойчивости. Комплекс программ реализован на подвижной сетке, позволяющей учесть вращение квазилагранжевым способом, позволяющим более эффективно моделировать течения с дифференциальным вращением, такие как аккреционные диски и магниторотационные сверхновые.
3. Показано, что протонейтронная звезда при магниторотационном взрыве сверхновой может приобрести линейную скорость до 500 километров в секунду. Это согласуется с наблюдательными данными для большинства известных нейтронных звезд. Рассмотрено несколько сценариев с разными начальными конфигурациями магнитных полей – присутствие в ядре звезды мультиполей разного порядка, наличие смещенного дипольного поля, а также присутствие сильного тороидального поля в дополнение к дипольному полю.

Достоверность полученных численных результатов подтверждается использованием хорошо разработанных численных методов, сравнением тестовых расчетов с известными аналитическими и численными результатами, а также качественным совпадением результатов с имеющимися наблюдательными данными по сверхновым с коллапсирующим ядром и остывающим замагниченным нейтронным звездам, качественным совпадением в ряде предельных и тестовых случаев с результатами других групп (научные группы, специализирующиеся на релятивистской астрофизике/физике коллапсирующих сверхновых из университетов Валенсии (Испания) и Монаш (Австралия)). Основные результаты опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены в качестве устных и стендовых докладов на следующих международных конференциях:

1. Kondratyev I.A., Moiseenko S.G., Bisnovaty-Kogan G.S., Glushikhina M.V. “Anisotropic heat transfer in outer layers of neutron stars”, XXXI Canary Islands Winter School of Astrophysics 24 November 2019, Tenerife, Spain
2. Kondratyev I.A., Moiseenko S.G., Bisnovaty-Kogan G.S., Glushikhina M.V. “Three - dimensional simulation of stationary heat transfer in magnetized neutron star” The Modern Physics of Neutron Stars and Relativistic Gravity - 2021, 27.09.2021 - 30.09.2021, Erevan, Armenia
3. Kondratyev I.A., Moiseenko S.G. “A semi - implicit multidimensional unstructured gas dynamical solver for astrophysical applications” Sixteenth Marcel Grossmann Meeting-MG16, 05.07.2021 - 10.07.2021, online
4. I.A. Kondratyev, S.G. Moiseenko “Semi-implicit numerical method for differentially rotating compressible astrophysical flows”, Fifth Workshop on Numerical Modeling in MHD and Plasma Physics: Methods, Tools, and Outcomes, 12-14 Oct 2022, Online
5. I.A. Kondratyev, S.G. Moiseenko, G.S. Bisnovaty-Kogan “Magnetorotational supernova explosions: jets and mirror symmetry violation”, Sixth Workshop on Numerical Modeling in MHD and Plasma Physics: Methods, Tools, and Outcomes, 12-13 Oct 2023, Moscow, Russia
6. I.A. Kondratyev “2D simulations of magnetorotational supernova explosions with violated mirror symmetry”, Sixth Workshop on Numerical Modeling in MHD and Plasma Physics: Methods, Tools, and Outcomes, 7-9 Nov 2023, Online

На научных семинарах:

1. ”Магнитоплазменные процессы в релятивистской астрофизике” (Таруса, 2018, 2022, 2023, 2024 г.)
2. Теоретического отдела Физического института РАН (Москва, 2020 г.)
3. ”Вычислительные методы и математическое моделирование” Института Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, 2021 г.)
4. Главной (Пулковской) Астрономической Обсерватории РАН (ГАО РАН, Москва, 2023 г.)

5. Астрофизической группы Института Теоретической и Экспериментальной Физики (ИТЭФ НИЦ "Курчатовский институт", 2023 г.)
6. Астрофизический семинар Института Астрономии РАН (ИНАСАН, 2024 г.)

Личный вклад. Все представленные в диссертации результаты получены автором в результате совместных исследований. Все программное обеспечение, описанное в тексте диссертации, разработано и протестировано автором лично. Численные и аналитические расчеты, результаты которых доложены в данной работе, также выполнены лично автором. В равном с соавторами вкладе выполнялись физическая и математическая постановки задач, выбор численных методик, а также участие в интерпретации результатов расчетов. Результаты, выносимые на защиту, согласованы с соавторами.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 7 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 141 страницу, включая 39 рисунков и 11 таблиц. Список литературы содержит 174 наименования на 16 страницах.

Глава 1. Трехмерное численное моделирование теплопроводности во внешних слоях замагниченных нейтронных звезд

1.1 Анизотропная теплопроводность в магнитном поле

Распределение температуры в коре НЗ определяется уравнением теплопроводности, которое в стационарном случае имеет вид

$$\nabla \cdot (\hat{\kappa} \cdot \nabla T) + f = 0 \quad (1.1)$$

здесь $\hat{\kappa}$ есть тензор теплопроводности, f задает источники и стоки тепла. В данной работе мы ищем стационарное распределение температуры в коре НЗ и предполагаем отсутствие стоков и источников $f = 0$.

В коре нейтронной звезды материя находится в особом состоянии кулоновского кристалла, в котором энергия электростатического взаимодействия между ионами существенно меньше энергии Ферми электронов. В таких условиях столкновения высокоэнергетических электронов с ионами приближенно можно рассматривать как со свободными частицами, т.е. как столкновения в газе. В пренебрежении во всех членах отношением масс электрона и иона $m_e/m_N \ll 1$ эти различия несущественны.

Тензор теплопроводности $\hat{\kappa}$ для сильно вырожденных электронов в магнитном поле получен в приближении Лоренца методом Чепмена-Энскога. Тензор учитывает потоки тепла вдоль и поперек магнитного поля, а также холловский поток тепла. Он записывается в декартовых координатах следующим образом [80]

$$\begin{cases} \kappa_{ij} = \frac{k_B^2 T n_e}{m_e^*} \tau \left(\kappa^{(1)} \delta_{ij} + \kappa^{(2)} \varepsilon_{ijk} \frac{B_k}{B} + \kappa^{(3)} \frac{B_i B_j}{B^2} \right), \\ \kappa^{(1)} = \frac{5\pi^2}{6} \left(\frac{1}{1+(\omega\tau)^2} - \frac{6}{5} \frac{(\omega\tau)^2}{(1+(\omega\tau)^2)^2} \right), \\ \kappa^{(2)} = -\frac{4\pi^2}{3} \omega\tau \left(\frac{1}{1+(\omega\tau)^2} - \frac{3}{4} \frac{(\omega\tau)^2}{(1+(\omega\tau)^2)^2} \right), \\ \kappa^{(3)} = \frac{5\pi^2}{6} (\omega\tau)^2 \left(\frac{1}{1+(\omega\tau)^2} + \frac{6}{5} \frac{1}{(1+(\omega\tau)^2)^2} \right), \end{cases} \quad (1.2)$$

где $n_e = \frac{\rho Z}{A m_u}$ – концентрация электронов, m_u – атомная единица массы, Z и A – зарядовое и массовое числа иона соответственно; k_B – постоянная Больцмана, $\tau = \frac{3}{32\pi^2} \frac{h^3}{m_e^* Z e^4 \Lambda}$ – среднее время между электрон-ядерными столкновениями, h

- постоянная Планка, Λ - кулоновский логарифм [106; 107]. Мы использовали значение кулоновского логарифма из работы [108] в коре и оболочке, его значение может незначительно отличаться от единицы. Ввиду того, что электроны в коре НЗ релятивистские из-за сильного вырождения, вместо массы электрона m_e мы рассматриваем эффективную массу $m_e^* = m_e \sqrt{1 + p_{Fe}^2/m_e^2 c^2}$, приближенно учитывающую релятивистские эффекты, p_{Fe} - импульс Ферми электронов. Параметр магнетизации $\omega\tau$ существенно меняется в толщине коры НЗ, при плотности $\rho \sim 10^{10}$ г/см³ значение параметра $\omega\tau \sim 1$ при значении индукции магнитного поля $B \sim 10^{13}$ Гс. Приблизительно $\omega\tau \sim B/\rho^{2/3}$ в коре НЗ при $\rho = 10^{10} - 2 \cdot 10^{14}$ г/см³. При этом из (1.2) следует, что коэффициенты теплопроводности поперек и вдоль магнитного поля записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \kappa_{e\perp} = \frac{k_B^2 T n_e \tau \kappa^{(1)}}{m_e^*}, \\ \kappa_{e\parallel} = \frac{k_B^2 T n_e \tau (\kappa^{(1)} + \kappa^{(3)})}{m_e^*}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Отметим здесь также важную деталь. Вдоль магнитного поля для коэффициента теплопроводности сильно вырожденного электронного газа (см. вышеупомянутые работы [79; 109], а также [110]) обычно используется численно другое значение

$$\kappa'_e = \frac{\pi^2 k_B^2 T n_e \tau}{3 m_e^*}, \quad (1.4)$$

что в два с половиной раза меньше, чем в (1.2). В ряде астрофизических работ электронная теплопроводность используется именно в такой постановке. Выражение (1.4) безусловно верно для электронного газа в металлах в земных условиях, где оно выводится в приближении, что средняя скорость электронов равна нулю. Из уравнения Больцмана в приближении Лоренца следует, что поток тепла и средняя скорость вдоль магнитного поля (что эквивалентно случаю без поля), когда движение электронов рассматривается как свободное, равны

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\parallel} &= -\frac{640 k_B m_e (k_B T)^4}{\Lambda n_N Z^2 e^4 h^3} (G_5 - \frac{1}{2} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_4) \cdot \nabla T - \frac{128 m_e (k_B T)^5 G_{5/2}}{\Lambda n_N Z^2 e^4 h^3 G_{3/2}} G_4 \cdot \mathbf{d}_e \\ \langle \mathbf{v}_e \rangle &= -\frac{128 k_B m_e (k_B T)^3}{\Lambda n_N n_e Z^2 e^4 h^3} (G_4 - \frac{5}{8} \frac{G_{5/2}}{G_{3/2}} G_3) \cdot \nabla T - \frac{32 m_e (k_B T)^4 G_{5/2}}{\Lambda n_N n_e Z^2 e^4 h^3 G_{3/2}} G_3 \cdot \mathbf{d}_e, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где n_N - концентрация ядер, вектор \mathbf{d}_e определяет диффузионный поток тепла (см., например, [111]). Функция G_n в пределе сильного вырождения записывается следующим образом:

$$G_n(x_0) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left[\frac{x_0^n}{n} + \frac{\pi^2}{6} (n-1)x_0^{n-2} \right],$$

здесь $x_0 = \frac{p_{fe}^2}{2m_e k_B T}$, а $\Gamma(n)$ - гамма-функция. Полагая равной нулю среднюю скорость электронов $\langle \mathbf{v}_e \rangle$ и выражая из второй формулы в (1.5) вектор диффузии \mathbf{d}_e через градиент температуры и подставляя его в формулу для \mathbf{q}_{\parallel} , можно получить выражение для коэффициента теплопроводности вырожденных электронов (1.4).

Во внешних слоях нейтронных звезд текут электрические токи, возникает термоэлектрический эффект [112], поддерживающий магнитное поле в коре и оболочке, и средняя скорость не равна нулю. Перенос тепла и электропроводность уже определяются не одним, а четырьмя процессами - теплопроводностью, диффузией, термодиффузией и диффузионным термоэффектом [113]. При таком подходе, в пренебрежении диффузионным потоком тепла, получаются выражения для коэффициентов теплопроводности (1.3). В данной работе мы пренебрегаем всеми процессами, кроме теплопроводности, полагая равной нулю не среднюю скорость электронов, а вектор диффузии. Отметим, что оба подхода являются приближенными, и мы оставляем полное согласованное рассмотрение всех четырех процессов для будущей работы.

1.2 Модель нейтронной звезды

Для построения модели теплопроводности с использованием тензора (1.2) в коре нейтронной звезды необходимо знать распределение магнитного поля, плотности и химического состава в ней. В данной работе конфигурация магнитного поля задается постоянным магнитным диполем в центре звезды

$$\mathbf{B} = \frac{B_{pd} R_{NS}^3}{2} \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{d} r^2}{r^5} \quad (1.6)$$

где B_{pd} - значение индукции дипольного магнитного поля на магнитном полюсе поверхности НЗ, \mathbf{d} - единичный вектор в направлении магнитного диполя, R_{NS} -

радиус НЗ. Также была рассмотрена квадрупольная конфигурация магнитного поля, задаваемая следующим образом [114]:

$$\mathbf{B} = B_{pq} R_{NS}^4 \left(\frac{r^2 - 5z^2}{2r^7} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{e}_z z}{r^5} \right), \quad (1.7)$$

где \mathbf{e}_z - единичный вектор, направленный вдоль оси z , а B_{pq} - значение индукции квадрупольного поля на полюсах. При рассмотрении осесимметричных моделей в данной главе диссертации рассмотрены соосные распределения дипольного (1.6) и квадрупольного (1.7) полей, а при рассмотрении полей без осевой симметрии предполагается, что дипольная компонента может быть повернута на произвольный угол $\Theta_b \in [0, \pi/2]$ относительно квадрупольной.

Плотность ρ явным образом входит в тензор теплопроводности (1.2) и в эффективную массу электрона. Для получения профиля плотности в НЗ было решено уравнение Толмена-Оппенгеймера-Волкова для не вращающейся НЗ при нулевой температуре:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{-G(\rho + \frac{P}{c^2})(m + 4\pi r^3 \frac{P}{c^2})}{r(r - \frac{2Gm}{c^2})} \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ P = P(\rho) \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь G - гравитационная постоянная, P - давление, r - расстояние от центра звезды. На рис. 1.1 представлены графики зависимости плотности и массы НЗ от расстояния в километрах для центральной плотности $\rho_c = 1 \cdot 10^{15}$ г/см³. Масса данной НЗ $M_{NS} = 1.42 M_{sun}$.

Уравнение состояния взято из работы [115], результаты которой базируются на работах [116; 117]. Уравнение состояния в [115] рассчитано одним и тем же методом для коры и ядра НЗ при помощи расчетов с эффективным потенциалом взаимодействия между нуклонами ядерной материи при больших плотностях при нулевой температуре. Ядро НЗ при таком уравнении состояния состоит из нейтронов, протонов, электронов и мюонов.

Как и в работе [76], уравнение теплопроводности решается нами не до внешней границы внутренней коры с $\rho = \rho_{drip} = 4 \cdot 10^{11}$ г/см³, а до $\rho = \rho_{out} = 10^{10}$ г/см³, чтобы как можно больше расширить область решения трехмерной задачи. Здесь ρ_{drip} задает плотность, при которой начинается испарение нейтронов из перегруженных нейтронами ядер. Таким образом, радиус внутренней границы коры $R_{in} = 10.594$ км при $\rho = \rho_{in} = 2 \cdot 10^{14}$ г/см³, а радиус внешней

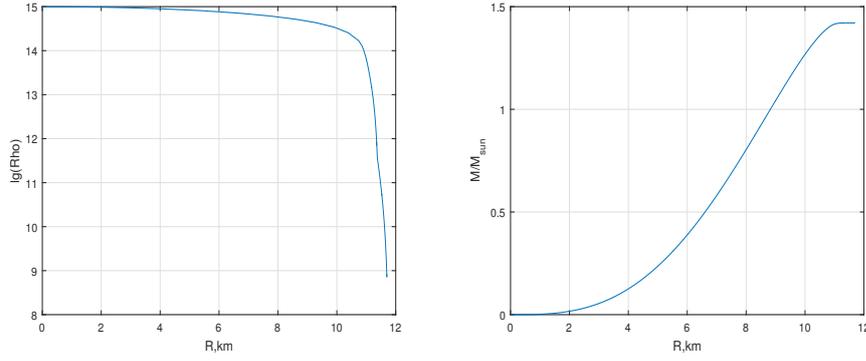


Рисунок 1.1 — Зависимость плотности (слева) в НЗ и массы НЗ (справа) от расстояния до центра НЗ для центральной плотности $\rho_c = 1 \cdot 10^{15}$ г/см³

границы коры $R_{out} = 11.618$ км при $\rho = 10^{10}$ г/см³; толщина такой коры составляет 1.024 км. Для полученного численно распределения плотности в коре была получена аналитическая аппроксимация решения в виде:

$$\lg \rho = -5.185(r - R_{in})^2 + 1.06(r - R_{in}) + 14.22 + 0.13 + 0.45 \exp(-10(r - R_{in})) - 0.35 \exp(-3(r - R_{in} - 0.11)) - 0.27 \exp(-10|r - R_{in} - 0.79|), \quad (1.9)$$

где r - расстояние от центра НЗ в километрах; погрешность этой аппроксимации составляет менее 1.2%.

Отметим здесь также, что в данной работе во внешней оболочке (см. ниже) рассматривается полностью ионизированная плазма железа с $Z = 26$ и $A = 56$, а в коре учитывается нейтронизация вещества. Эффективные значения Z и A как функции плотности в коре НЗ взяты из классической работы Байма, Бете и Петика [118] для $\rho < \rho_{drip}$, и из работы Байма, Петика и Сазерленда [119] для $\rho > \rho_{drip}$.

1.3 Одномерная модель внешней замагниченной оболочки нейтронной звезды

Внешние слои нейтронных звезд, при $\rho < 10^{10}$ г/см³, имеют толщину ~ 100 метров, при этом в данной области происходят очень большие перепады плотности и температуры. С вычислительной точки зрения пространственно разрешить такую область на трехмерной сетке не удастся. При параметрах

внешней оболочки также необходимо учитывать процессы радиационного переноса, поскольку в приповерхностной области они становятся доминирующими. Тепловая структура оболочки в данной работе исследуется в стационарном, локальном, плоско-параллельном приближении, для расчета связи локальной температуры поверхности T_s с локальной температурой T_b при $\rho = 10^{10}$ г/см³ на дне оболочки. На всей площади поверхности принимается, что радиальный градиент температуры и тепловой поток поперек оболочки много больше, чем вдоль нее [75]. Ниже дан вывод уравнения, описывающего тепловую структуру оболочки, приведенный в работе [75]. В одномерном приближении уравнение теплопроводности имеет вид [111; 120]:

$$F \equiv \sigma T_s^4 = \kappa \frac{dT}{dz} = \frac{16\sigma T^3 dT}{3 d\tau}, \quad \kappa = \frac{16\sigma T^3}{3K\rho} \quad (1.10)$$

здесь F - локальная плотность потока тепла, предполагаемая постоянной поперек оболочки, κ - эффективный коэффициент теплопроводности в направлении нормали к поверхности, K - эффективная непрозрачность, соответствующая данному значению коэффициента κ , координата поперек оболочки с учетом эффектов общей теории относительности имеет вид $z = (R_{NS} - r)e^{\Phi(R_{NS})}$, где $e^{\Phi(R_{NS})} = (1 - r_g/R_{NS})^{-1/2}$, а r_g - гравитационный радиус, σ - постоянная Стефана-Больцмана. Отметим также, что излучение с поверхности предполагается локально чернотельным.

Интегрирование уравнения (1.10) дает профиль температуры в оболочке $T \approx T_s(\frac{3}{4}\tau + \frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}$, где $\tau = \int_{-\infty}^z K\rho dz$ - оптическая толщина оболочки. Постоянная интегрирования отвечает приближению Эддингтона [111; 120] ($\tau = \frac{2}{3}$ на излучающей поверхности).

При $z \ll R_{NS}$ релятивистское уравнение гидростатического равновесия (первое уравнение системы (1.8)) может быть приведено к Ньютоновской форме:

$$\frac{dP}{dz} = g_s \rho, \quad (1.11)$$

где P - давление, $g_s = GM_{NS}/(R_{NS}^2 \sqrt{1 - r_g/R_{NS}})$ ускорение свободного падения на поверхности НЗ. Из этого уравнения вместе с (1.10) можно получить уравнение тепловой структуры внешней оболочки НЗ

$$\frac{dT}{dP} = \frac{3K T_s^4}{16g_s T^3}. \quad (1.12)$$

Перенос тепла в оболочке определяется суммой двух процессов - лучистой и электронной теплопроводностью. Таким образом, эффективный коэффициент теплопроводности $\kappa = \kappa_r + \kappa_e$. Его можно выразить через коэффициенты теплопроводности вдоль (κ_{\parallel}) и поперек (κ_{\perp}) силовых линий магнитного поля в виде [73]

$$\kappa = \kappa_{\parallel} \cos^2 \theta_B + \kappa_{\perp} \sin^2 \theta_B \quad (1.13)$$

где θ_B - угол между нормалью к поверхности и магнитным полем. Получить выражение (1.13) для электронной теплопроводности можно следующим образом. Для градиента температуры направленного по нормали к поверхности ($\nabla T \equiv \nabla T_z$), проекция на нормаль свертки тензора электронной теплопроводности (1.2) с ∇T , в отсутствие холловского члена, запишется в виде

$$(\hat{\kappa}_e \cdot \nabla T)_z = \kappa_{e\perp} \nabla T + (\kappa_{e\parallel} - \kappa_{e\perp})(\vec{B} \cdot \nabla T) \cos \theta_B / B. \quad (1.14)$$

Для градиента температуры направленного по нормали к оболочке из (1.14), с учетом (1.2), получаем

$$\kappa_{e\perp} \cdot \nabla T + (\kappa_{e\parallel} - \kappa_{e\perp}) \nabla T \cos^2 \theta_B, \quad (1.15)$$

откуда для электронной теплопроводности следует соотношение (1.13).

Для коэффициентов лучистой теплопроводности в работе [121] получены значения для случаев вдоль ($\kappa_{r\parallel}$) и поперек ($\kappa_{r\perp}$) магнитного поля при учете свободно-свободного поглощения и Томсоновского рассеяния. Аналогичные рассуждения для тензора лучистой теплопроводности приводят к формуле (1.13). Непрозрачность в этом случае равна

$$K_r = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa_r(B, \theta_B)\rho}. \quad (1.16)$$

Как было отмечено в [122], уравнение (1.12) может быть неприменимо в областях, где поле очень велико, и близко к тангенциальному. В этом случае тепловой поток по нормали к поверхности может быть сильно подавлен и стать сравнимым с тепловым потоком вдоль оболочки, параллельно полю. В данной работе этот эффект не рассматривается.

Уравнение (1.12) решалось численно адаптивным методом Рунге-Кутты 4-5 порядка точности с переменным шагом расчетной сетки. В качестве граничного условия на поверхности излучающей оболочки принимается $T = T_s$,

при этом давление на поверхности P_s находится из условия Эддингтона $P_s \approx \frac{2g_s}{3K_s}$ [111]. При известной зависимости $K_s(T_s, \rho_s)$ для непрозрачности, и $P_s(T_s, \rho_s)$ для уравнения состояния, условие Эддингтона однозначно определяет поверхностные значения P_s и ρ_s при заданном T_s . В Приложении А приведены описания используемых уравнения состояния и коэффициентов непрозрачности в оболочке НЗ.

1.3.1 Аппроксимационные соотношения $T_s - T_b$

Используя описанные в предыдущих разделах физические условия, имеющие место во внешней оболочке НЗ, можно решить уравнение (1.12) при различных значениях магнитного поля. В ходе расчетов были получены наборы распределений температуры в оболочке НЗ для разных значений T_s , B и θ , связывающие локальную температуру на поверхности НЗ T_s с температурой, вдоль радиуса, на дне оболочки T_b , по заданному значению индукции магнитного поля B и угла θ между направлением магнитной силовой линии и нормалью к поверхности НЗ, которые считаются постоянными во внешней оболочке. Обзор существующих к настоящему моменту $T_s - T_b$ -соотношений может быть найден в [21].

Как было отмечено в [72], $T_s - T_b$ -соотношение зависит от значения коэффициентов теплопроводности в "полосе чувствительности" (sensitivity strip) на плоскости $\rho - T$, находящейся около "точки поворота" (turning point), где $\kappa_e \sim \kappa_r$. Точка поворота в случае теплопереноса при наличии магнитного поля сдвигается в область более высоких плотностей с ростом поля. Вдоль магнитного поля этот эффект провоцируется уменьшением непрозрачности, а поперек поля - уменьшением непрозрачности и подавлением коэффициента электронной теплопроводности поперек полю.

На Рис. 1.2 представлены графики распределения температуры в оболочке НЗ, для поверхностной температуры $T_s = 10^6$ К. Нижние сплошные отвечают распределению температуры вдоль ($\theta_B = 0$), а верхние пунктирные - поперек ($\theta_B = \pi/2$) магнитному полю. На Рис. 1.3 изображены графики распределения температуры в оболочке НЗ с фиксированной температурой на дне оболочки для звезды с дипольным магнитным полем при различных его значениях B_p

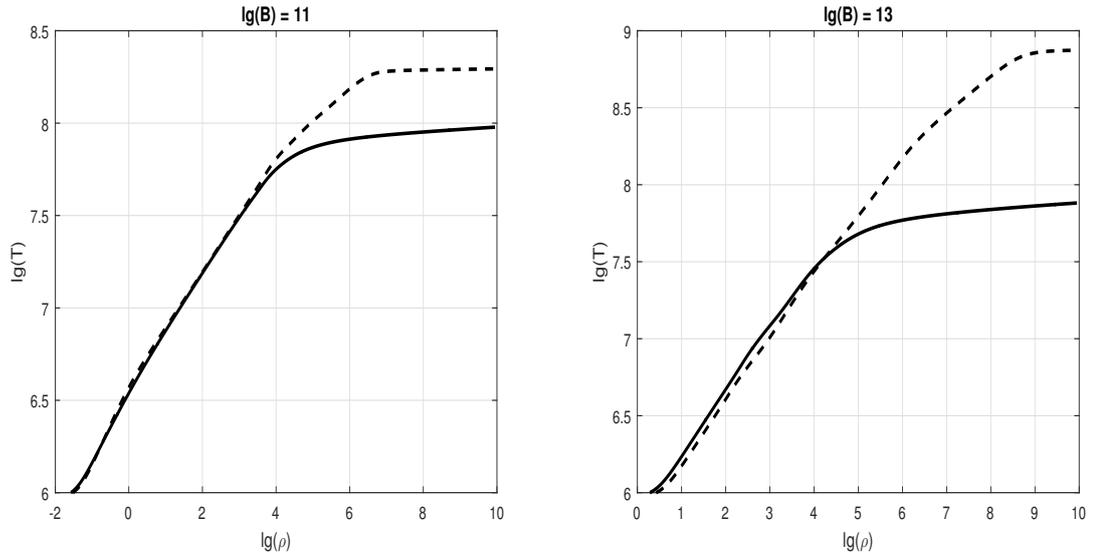


Рисунок 1.2 — Распределение температуры как функции плотности в оболочке НЗ для $T_s = 10^6 K$ в однородном магнитном поле с $B = 10^{11}$ Гс (слева) и $B = 10^{13}$ Гс (справа). Сплошные кривые соответствуют магнитным полюсам, пунктирные - экватору.

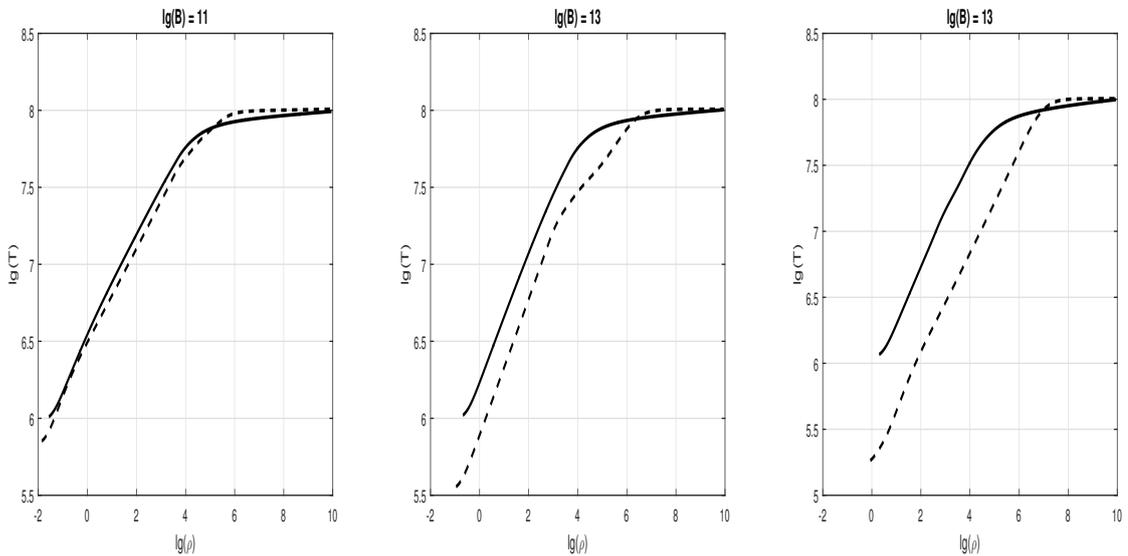


Рисунок 1.3 — Распределение температуры как функции плотности в оболочке НЗ для $T_b = 10^8 K$ для звезды с дипольным магнитным полем, для различных его значений на полюсе, $B_p = 10^{11}$ Гс (слева), 10^{12} Гс (центр) и 10^{13} Гс (справа). Сплошные кривые соответствуют магнитным полюсам, пунктирные - экватору.

на магнитном полюсе. Отметим, что для диполя значение поля на экваторе $B_e = 0.5 B_p$. В Таблице 1 представлены температуры поверхности на магнитном полюсе и экваторе и их отношения для различных значений B_p , и $T_b = 10^8$ К.

Таблица 1 — Температуры поверхности НЗ на полюсе ($\theta = 0$) и экваторе ($\theta = \pi/2$) и их отношения

$\lg B_p$	11	12	13
$T_s(\theta = 0)/10^6 K$	1.02	1.03	1.16
$T_s(\theta = \pi/2)/10^6 K$	0.71	0.35	0.18
$T_{s\parallel}/T_{s\perp}$	1.43	2.94	6.44

Мы построили таблицы решений уравнения на тепловую структуру (1.12) для разных значений угла θ_B , модуля индукции поля B и температуры на дне оболочки T_b . Заметим, что в граничное условие уравнения (1.12) входит поверхностная температура T_s , поэтому для построения таблиц от T_b необходимо решать уравнение на тепловую структуру, ”подбирая” по T_s необходимое значение T_b , в расчетах мы находили его с точностью 0.25%. В двумерных таблицах 2 и 3 представлены решения уравнения (1.12) для некоторых T_b и B при $\theta_B = 0$ и $\theta_B = \pi/2$ соответственно.

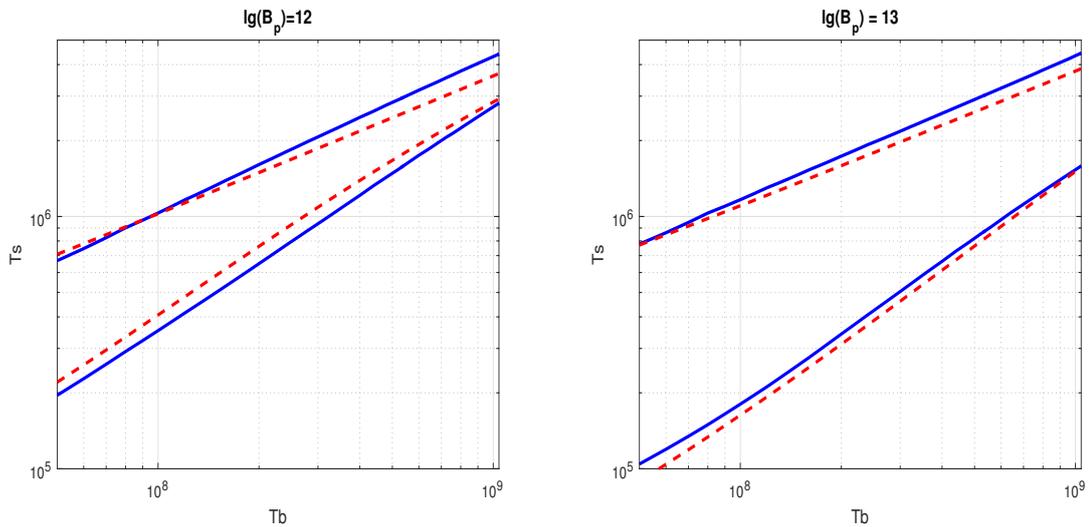


Рисунок 1.4 — Сравнение $T_s - T_b$ -соотношений из данной работы и [75] для магнитного экватора (нижние линии) и полюса (верхние линии) для дипольного магнитного поля. Пунктирные линии соответствуют [75], сплошные линии - данной работе. Слева представлены результаты для $B_{pd} = 10^{12}$ Гс, справа - для $B_{pd} = 10^{13}$ Гс.

Мы сравнили полученное нами " $T_s - T_b$ "-соотношение с аналогичным соотношением из работы [75]. Основные отличия между моделями тепловой структуры заключаются в том, что по сравнению с [75] мы использовали более простое уравнение состояния в оболочке, но учли связанно-свободное поглощение и эффекты электронного вырождения на радиационных непрозрачностях (A.16),(A.12), а также использовали отличные от [75] коэффициенты электронной теплопроводности (1.3). На Рис. 1.4 представлено сравнение " $T_s - T_b$ " для двух значений дипольного магнитного поля, с $B = 10^{12}$ Гс (слева) и 10^{13} Гс (справа) на полюсе и экваторе. В обоих случаях разница температур поверхности T_s не превышает 20% от [75]. Температура поверхности НЗ на магнитном полюсе (вдоль поля) получилась в наших расчетах немного выше, чем в [75] ввиду того, что используемый нами коэффициент электронной теплопроводности вдоль поля выше, чем в [79]. Со случаем поперек поля все несколько сложнее: с ростом магнитного поля переход от лучистой к электронной теплопроводности (полоса чувствительности) происходит в существенно вырожденной области, в которой радиационная непрозрачность сильно подавляется ввиду вырождения. По этой причине, градиент температуры в областях поперек поля ниже для сильного магнитного поля (см. нижнюю синюю кривую на правом изображении в Рис.1.4), чем в [75], не смотря на то, что коэффициент электронной теплопроводности (1.3) подавлен сильнее поперек поля.

Таблица 2 — $T_s - T_b$ -соотношение для T_s в единицах $10^6 K$ при $\theta_B = 0$ (T_b в единицах $10^9 K$)

T_{b9}	$\lg B_p = 11.7$	12	12.7	13
0.04	0.5721	0.5904	0.6672	0.6927
0.08	0.8930	0.9019	0.9931	1.0316
0.20	1.6021	1.6066	1.6723	1.7337
0.60	3.1664	3.1681	3.1818	3.2253
1.00	4.3058	4.3022	4.3057	4.3383

Таблица 3 — $T_s - T_b$ -соотношение для T_s в единицах $10^6 K$ при $\theta_B = \pi/2$ (T_b в единицах $10^9 K$)

T_{b9}	$\lg B_p = 11.7$	12	12.7	13
0.04	0.1636	0.1291	0.0894	0.0803
0.08	0.2917	0.2331	0.1495	0.1328
0.20	0.6502	0.5338	0.3417	0.2844
0.60	1.7487	1.4672	0.9712	0.8118
1.00	2.7193	2.2949	1.5321	1.2911

1.4 Краевая задача для уравнения теплопроводности в коре нейтронной звезды

Предполагается, что поток тепла излучается с поверхности НЗ, а температура на внутреннем радиусе коры T_{core} считается одинаковой по всему ядру, ввиду достаточно большой теплопроводности. Эта температура уменьшается со временем при остывании ядра НЗ достаточно медленно, после быстрого этапа с излучением нейтрино, так что эволюцию НЗ можно представить в виде последовательности остывающих моделей со стационарным распределением температуры по звезде. Таким образом, значение поверхностной температуры T_s определяется решением стационарной краевой задачи для уравнения теплопроводности в шаровом слое с заданной температурой T_{core} на внутренней границе, и с условием излучения чернотельного спектра с поверхности на внешней границе, когда поток тепла определяется законом Стефана-Больцмана $F_s = \sigma T_s^4$. Во внешней оболочке, ввиду малости ее массы, поток тепла F_s считается постоянным, поэтому на внешней границе коры, которая является также внутренней границей внешней оболочки, этот поток тепла равен радиальному потоку тепла из ядра при теплопроводности. Это задает граничные условия в виде

$$T|_{in} = T_{core}, \quad \kappa(\mathbf{B}, \rho, T) \nabla_r T + F_s|_{out} = 0, \quad (1.17)$$

где индекс "in" отвечает значению температуры на внутренней границе коры с $r = R_{in}$, а индекс "out" отвечает внешней границе коры с $r = R_{out}$. Условие

непрерывности температуры на поверхности коры используется вместе с соотношением $T_s(T_b)$ для разных (B, θ_B) , при этом $T_b = T_{out}$. В итоге получается однозначная зависимость $T_s(T_{out}, B, \theta_B)$, определяющая распределение температура по поверхности замагниченной НЗ. В сферическом слое $R_{in} \leq r \leq R_{out}$ решалось стационарное уравнение теплопроводности

$$\nabla \cdot \kappa(\mathbf{B}, \rho, T) \cdot \nabla T = 0, \quad (1.18)$$

с граничными условиями (1.17). Задача о распространении тепла во внешних слоях замагниченной нейтронной звезды решалась численно при помощи развитого нами трехмерного аналога метода опорных операторов на неструктурированной сетке, состоящей из тетраэдров. Детали численной модели представлены в Приложении Б.

1.5 Распределения температуры нейтронной звезды для осесимметричных магнитных полей дипольного и квадрупольного типов

В результате расчетов по трехмерной программе были получены распределения температуры внутри коры, и по поверхности НЗ. На Рис.1.5 представлено распределение температуры в коре НЗ с плотностями $\rho = 10^{10} - 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ с температурой ядра $T_{core} = 2 \cdot 10^8 \text{ К}$, для дипольного магнитного поля (1.6) с индукцией на полюсе $B_{pd} = 10^{13} \text{ Гс}$.

Распределение температуры в коре инвертировано по сравнению с поверхностным распределением температуры. Это объясняется тем, что сильнее всего коэффициент теплопроводности поперек поля подавляется во внешней оболочке, где $\omega\tau \gg 1$. Подавленный поток тепла на магнитном экваторе приводит к уменьшению градиента температуры в коре, поэтому на магнитном полюсе изменение температуры в коре выше, чем на экваторе. Данный эффект в англоязычной литературе называется "*heat blanketing envelope*" – оболочка с "теплозащитой" [21; 76].

На левом графике Рис. 1.6 представлено найденное в расчетах распределение температуры по поверхности НЗ, соответствующее распределению из

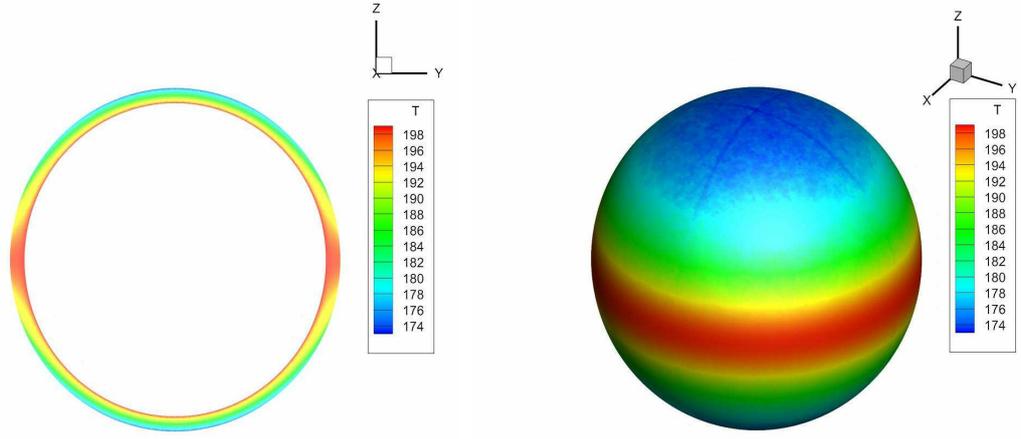


Рисунок 1.5 — Распределение температуры в коре НЗ для дипольного магнитного поля (1.6) с индукцией на полюсе $B_{pd} = 10^{13}$ Гс, и $T_{core} = 2 \cdot 10^8 K$ (здесь и далее температура T представлена в единицах $10^6 K$) для плотностей $\rho = 10^{10} - 2 \cdot 10^{14}$ г/см³. Слева - сечение в плоскости Y-Z, справа - трехмерная проекция поверхности коры НЗ при плотности $\rho_{out} = 10^{10}$ г/см³.

Рис.1.5, а также полуаналитическое распределение температуры из классической работы Гринштейна и Хартке [73] с рассчитанными нами значениями температур на полюсе и экваторе НЗ:

$$T_s(B, \theta) = [T_s^4(0) \cos^2 \theta_B + T_s^4(\pi/2) \sin^2 \theta_B]^{1/4} \quad (1.19)$$

Из Рис. 1.6,1.7 видно, что для чисто дипольных конфигураций магнитного поля угловая зависимость температуры хорошо описывается формулой Гринштейна и Хартке (1.19) из [73].

В наших расчетах получены следующие параметры. Для $T_{core} = 2 \cdot 10^8 K$ температура внешней границы коры на магнитном полюсе $T_{b\parallel} \approx 1.74 \cdot 10^8$ К, на поверхности $T_{s\parallel} \approx 1.60 \cdot 10^6$ К, а на экваторе $T_{b\perp} \approx 1.99 \cdot 10^8$ К и $T_{s\perp} \approx 0.34 \cdot 10^6$ К. Отношение температур $T_{s\parallel}/T_{s\perp}$ на поверхности равно 4.72. Из рисунков 1.6 (левая панель) и 1.7 видно, что анизотропия в оболочке усиливается по мере охлаждения НЗ, так, при $T_{core} = 10^9 K$ отношение температур на полюсе и экваторе $T_{s\parallel}/T_{s\perp} = 2.55$, а при $T_{core} = 5 \cdot 10^7 K$ отношение $T_{s\parallel}/T_{s\perp} = 7.10$. В Таблице 3 представлены полные светимости НЗ $L = 2\pi R_{out}^2 \sigma \int_0^\pi T^4 \sin \theta d\theta$ и средние эффективные значения температуры. При этом, для квадрупольных полей ($B_{pq} = 1 \cdot 10^{13}$) светимости НЗ меняются незначительно.

В качестве еще одного теста наши расчеты с дипольным полем правильнее всего сравнить с работами [12; 76] (случай т.н. "core-dipole configurations"),

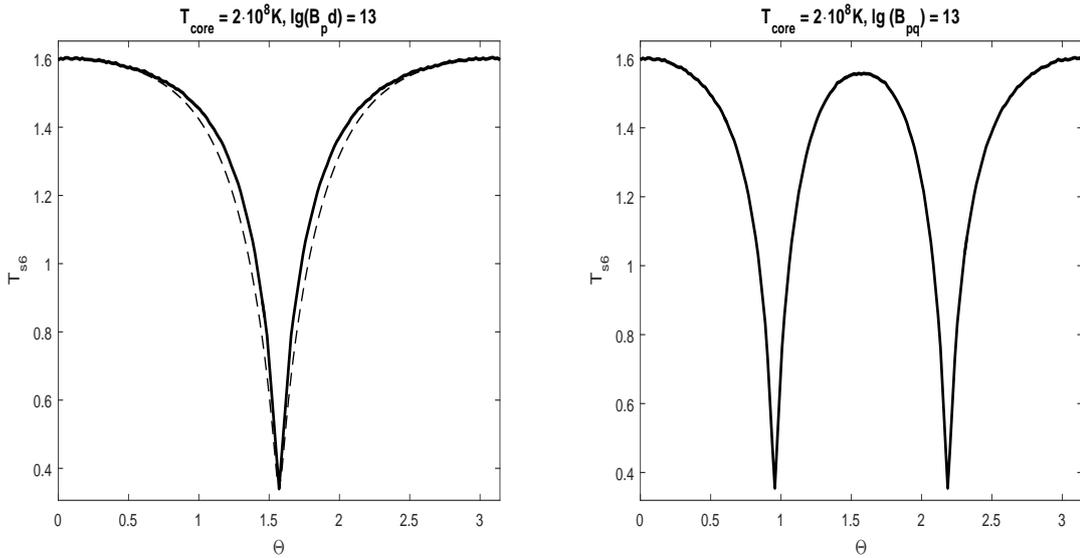


Рисунок 1.6 — Левая панель: Распределение температуры на поверхности НЗ для дипольного магнитного поля с индукцией на полюсе $B_{pd} = 10^{13} \text{Гс}$, и $T_{core} = 2 \cdot 10^8 \text{К}$, как функции полярного угла θ . Сплошная линия - полученная в расчетах зависимость, пунктирная линия - зависимость, посчитанная по формуле (1.19). Правая панель: Распределение температуры на поверхности НЗ для квадрупольного магнитного поля с индукцией $B_{pq} = 1 \cdot 10^{13} \text{Гс}$ на полюсе для $T_{core} = 2 \cdot 10^8 \text{К}$.

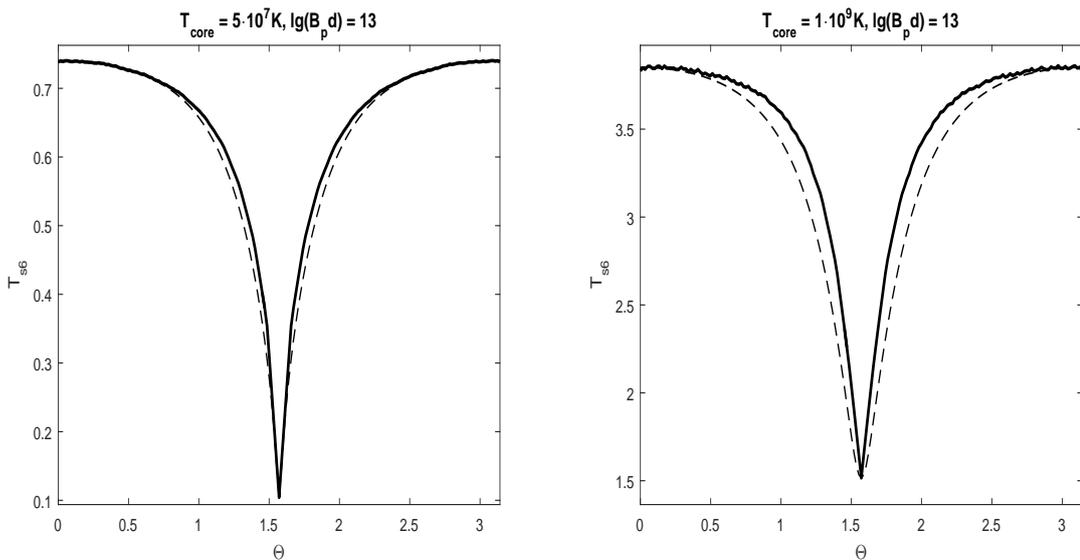


Рисунок 1.7 — То же, что на Рис. 1.6, для $T_{core} = 5 \cdot 10^7 \text{К}$ (слева) и $T_{core} = 10^9 \text{К}$ (справа)

Таблица 4 — Светимость и эффективная температура НЗ с дипольным магнитным полем

T_{core}	$5 \cdot 10^7 K$	$2 \cdot 10^8 K$	$10^9 K$
$L, erg/s$	1.6101e+32	3.6151e+33	1.3262e+35
T_{eff}, K	6.3966e+05	1.3924e+06	3.4268e+06

поскольку в них физическая постановка задачи близка к нашей (хотя в [12] рассмотрен случай сконденсировавшейся внешней оболочки). Наши результаты находятся в хорошем согласии с работой [76]. Так, для НЗ с температурой ядра $T_{core} = 1 \cdot 10^8 K$ и индукцией дипольного поля на полюсах $B_{pd} = 1 \cdot 10^{13}$ значения температур поверхности на магнитных полюсе и экваторе равны соответственно $1.09 \cdot 10^6 K$ и $0.18 \cdot 10^6 K$, что визуалью очень близко к аналогичным значениям в [76]. Угловая зависимость также воспроизводится с хорошей точностью. Расчеты с "core"-конфигурациями в [12] качественно близки к нашим, хотя в данной работе температура поверхности выше, чем у нас, при одних и тех же T_{core} .

На Рис. 1.8 и правой части Рис. 1.6 представлено распределение температуры в коре и на поверхности НЗ для квадрупольного поля (1.7) с индукцией $B_{pq} = 1 \cdot 10^{13} \text{Гс}$ на полюсе. При этом, в распределении поверхностной температуры наблюдаются два "провала".

Далее были рассмотрены соосные конфигурации дипольного и квадрупольного поля вместе. На Рис. 1.9 ниже представлены графики зависимости поверхностной температуры для дипольно- и квадрупольнодоминирующих полей ($B_{pq} = 6 \cdot 10^{12}$ и $B_{pq} = 1.2 \cdot 10^{13} \text{Гс}$ соответственно, дипольная составляющая осталась прежней) для $T_{core} = 2 \cdot 10^8 K$.

При наличии слабого квадрупольного поля максимумы температуры сдвигаются в сторону от $\theta = \pi/2$ и становятся уже 2π -периодичными по полярному углу, при этом если поле "в основном" дипольное, то имеется один "провал" температуры чуть выше магнитного экватора. В случае же, когда квадруполь доминирует, имеют место уже два смещенных "провала".

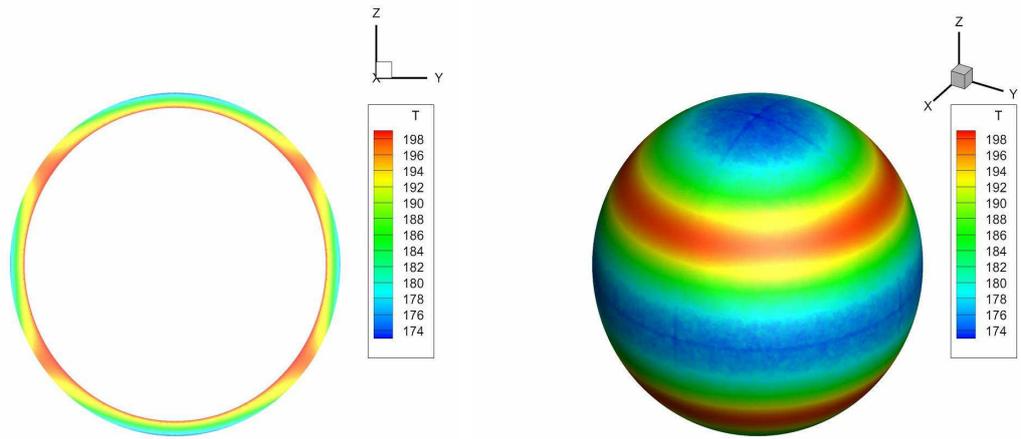


Рисунок 1.8 — Распределение температуры в коре НЗ для квадрупольного поля (1.6) с индукцией на полюсе $B_{pq} = 10^{13}$ Гс, и $T_{core} = 2 \cdot 10^8 K$ (здесь и далее в единицах $10^6 K$) для плотностей $\rho = 10^{10} - 2 \cdot 10^{14}$ г/см³. Слева - сечение в плоскости Y-Z, справа - трехмерная проекция поверхности коры НЗ при плотности $\rho_{out} = 10^{10}$ г/см³.

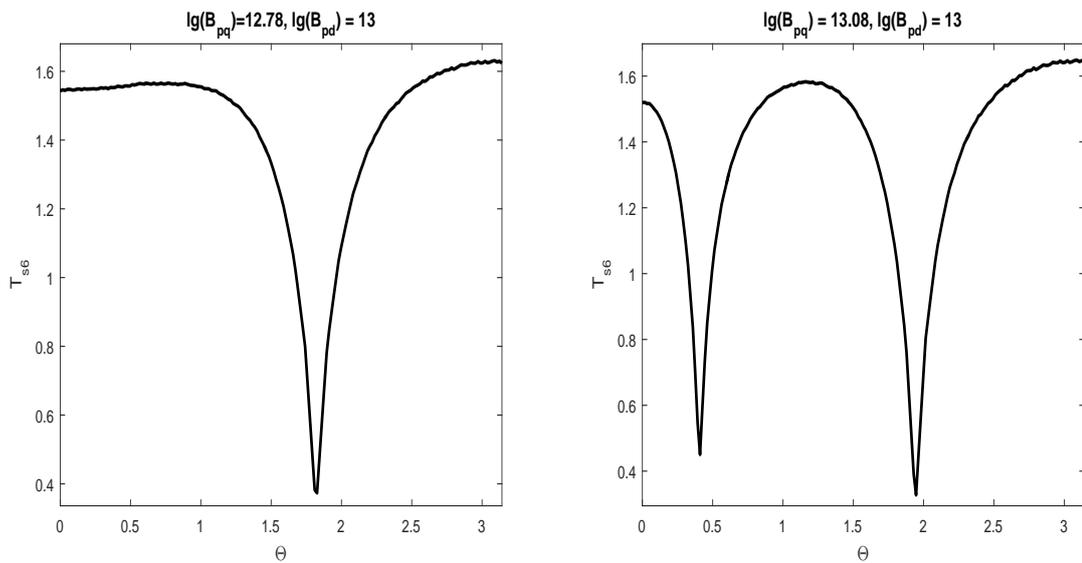


Рисунок 1.9 — Распределение температуры на поверхности НЗ для суммы магнитных полей, слева - дипольно-, справа - квадрупольнодоминирующая конфигурации полей для $T_{core} = 2 \cdot 10^8 K$

1.6 Результаты расчетов для неосесимметричных конфигураций поля

При вращении дипольной компоненты магнитного поля (1.6) около квадрупольной (1.7), в системе (1.18) нарушается осевая симметрия, ввиду чего необходимо рассматривать трехмерные модели. В данной главе мы рассматриваем несоосную суперпозицию дипольного и квадрупольного полей в коре нейтронной звезды. Ввиду того, что нет физических ограничений на повороты магнитных мультиполей в НЗ относительно друг друга, включение несоосного квадрупольного поля в дополнение к дипольному вносит два дополнительных параметра, влияющих на распределение температуры внутри НЗ – угол между дипольной и квадрупольной осями Θ_b , а также отношение между индукциями мультиполей на их полюсах $\beta = B_{pq}/B_{pd}$, которые определяют величину трехмерных эффектов. Отметим очевидный факт, что при $\beta \ll 1$ и $\beta \gg 1$ распределения температуры быстро сходятся к ситуациям с чисто дипольным и чисто квадрупольным полем, соответственно, поэтому наиболее интересен случай, когда значения диполя и квадруполя сопоставимы, т.е. $\beta \sim 1$.

Распределение температуры поверхности НЗ, соответствующее температуре коры на Рис. 1.10, представлено на Рис. 1.11 (верхняя панель) совместно с аналогичным распределением для чисто дипольного поля (нижняя панель). Как и в случае с осесимметричными конфигурациями поля, распределение температуры в коре также является инвертированным по отношению к поверхностному распределению температуры НЗ. Минимальная температура равна приблизительно $T_c \approx 3 \cdot 10^5 K$, в то время как максимальная температура $T_h \approx 1.6 \cdot 10^6 K$, что несущественно ниже, чем в случае осесимметричной модели с дипольным полем. В случае чистого диполя, распределение поверхностной температуры НЗ представляется в форме двух одинаковых горячих пятен на полюсах и холодного пояса на экваторе. При ”включении” несоосной квадрупольной компоненты в распределении температуры поверхности возникают следующие особенности – при $\beta \lesssim 1$ и $\Theta_b \neq 0$, форма холодного пояса становится нерегулярной, при этом сама площадь пояса увеличивается по сравнению с дипольным случаем. Горячие области на полюсах в этом случае уже расположены не друг напротив друга, и их площади также начинают различаться. Подобная конфигурация температуры, по-видимому, наблюдается в объекте

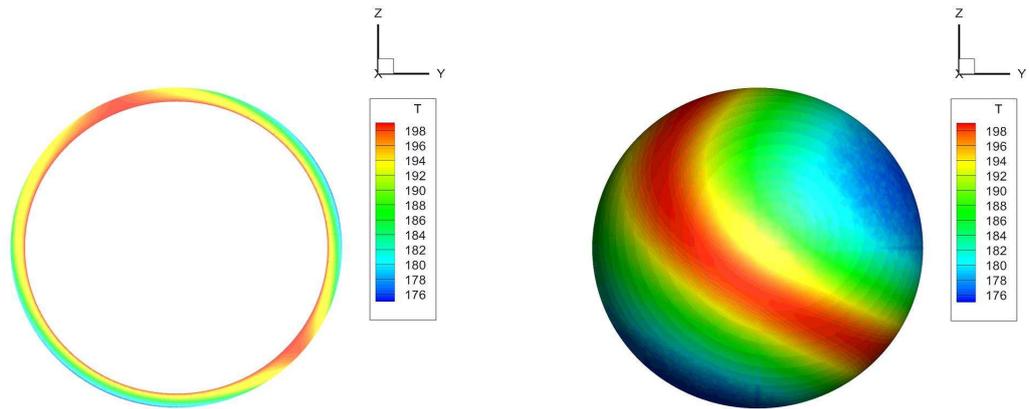


Рисунок 1.10 — Распределение температуры (в единицах $10^6 K$) коры нейтронной звезды с квадрупольной и дипольной компонентами магнитного поля $B_{pq} = 5 \cdot 10^{12}$ Гс и $B_{pd} = 1 \cdot 10^{13}$ Гс соответственно ($\beta = 0.5$). Магнитные оси повернуты на угол $\Theta_b = \pi/4$ друг от друга, здесь и далее на графиках квадрупольная ось зафиксирована вдоль оси z , а дипольная — повернута на различные углы Θ_b . Температура ядра НЗ $T_{core} = 2 \cdot 10^8 K$. Верхний рисунок — сечение в плоскости Z - Y , нижний — распределение температуры поверхности коры НЗ.

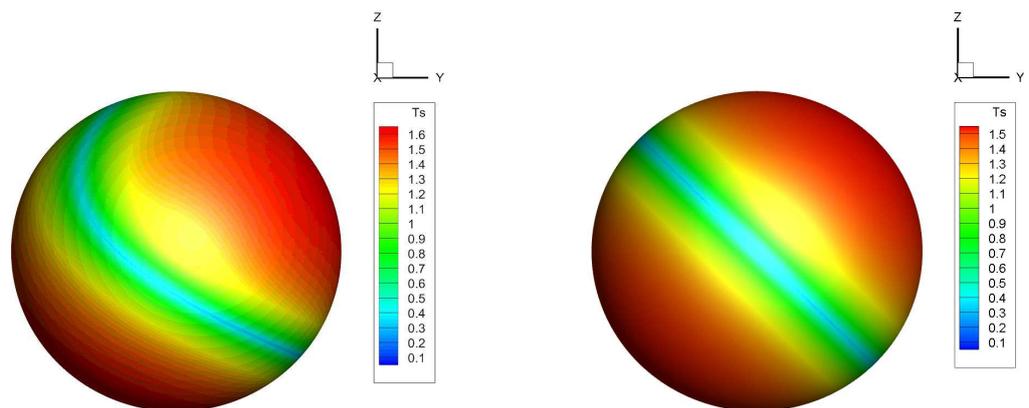


Рисунок 1.11 — Распределение температуры поверхности НЗ (в единицах $10^6 K$) для параметров с Рис.1.10 (верхний рисунок) и для нейтронной звезды без квадрупольного поля (нижний рисунок).

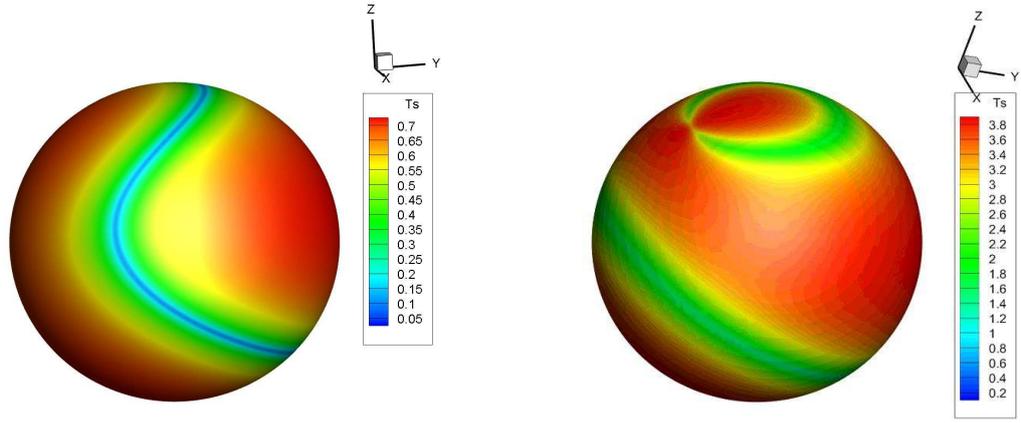


Рисунок 1.12 — Распределения поверхностной температуры НЗ (в единицах $10^6 K$) в двух рассчитанных моделях с параметрами $\beta = 0.75$, $T_{core} = 5 \cdot 10^7 K$, $\Theta_b = \pi/3$ (верхняя панель) и $\beta = 1$, $T_{core} = 5 \cdot 10^7 K$, $\Theta_b = \pi/6$ (нижняя панель). Дипольная компонента $B_{pd} = 1 \cdot 10^{13}$ Гс в обоих случаях.

RX J0720.4–3125 из ”Великолепной семерки” [9]. Наличие квадрупольной компоненты незначительно уменьшает эффективную температуру НЗ, что также говорит о росте площади холодных областей. Дополнительно стоит отметить, что распределение температуры зеркально симметрично относительно плоскости, проходящей через магнитные оси диполя и квадруполя.

На Рис. 1.12 представлены распределения поверхностной температуры для различных значений параметров β и Θ_b , а также разных температур ядра НЗ T_{core} , что соответствует различным возрастам НЗ. С ростом квадрупольной компоненты по отношению к дипольной, второй холодный пояс возникает при $\beta \sim 0.9$ для малых углов наклона порядка $\Theta_b \sim \pi/6$. В этом случае, с дальнейшим ростом квадрупольного поля, когда $\beta \gtrsim 1.5$, температура уже слабо отличается от чисто квадрупольного распределения. При больших углах наклона между мультиполями порядка $\Theta_b \lesssim \pi/2$ форма холодного пояса все сильнее искривляется от круговой с ростом параметра β , принимая форму ”челюсти”, и только при $\beta \gtrsim 1.5$ (1.5 для $\Theta_b = \pi/3$) распределение температуры переходит в конфигурацию с двумя поясами.

Как и в случае осесимметричных конфигураций магнитного поля, по мере охлаждения НЗ, анизотропия поверхностного распределения температуры усиливается. Так, при $T_{core} = 1 \cdot 10^9 K$ (температуры соответствуют времени ~ 10 тысяч лет после формирования НЗ), отношение температур в самой горячей и самой холодной точке поверхности НЗ равно $T_h/T_c \sim 2.5$, в то время как для

$T_{core} = 5 \cdot 10^7 K$ (соответствует нескольким миллионам лет) оно равно $T_h/T_c \sim 7$. Параметр магнетизации $\omega\tau$ достаточно слабо зависит от температуры, и поэтому в предположении, что поле не затухает достаточно долго ввиду высокой проводимости за время охлаждения НЗ, топология распределения температуры будет сохраняться со временем.

1.7 Наблюдательные проявления для рассчитанных распределений температуры замагниченной вращающейся нейтронной звезды

1.7.1 Методы построения синтетических тепловых спектров и кривых блеска вращающейся замагниченной нейтронной звезды

Моделирование тепловых кривых блеска от вращающихся нейтронных звезд (а именно от одиночных XDINS и рентгеновских пульсаров в двойных системах) имеет достаточно богатую историю и хорошо разработанные методики. Тепловое излучение от компактных объектов рассматривалось в большом количестве работ (см., напр., [73] без учета эффектов общей теории относительности (ОТО) и [14; 20; 123–125] с учетом красного смещения и искривления траекторий фотонов вблизи компактного объекта). В настоящей главе наблюдательные проявления от рассчитанных распределений температуры исследуются в рамках простой локально-чернотельной модели излучения, что является достаточно хорошим приближением для объектов типа ”Великолепной Семерки”. Поток энергии принимаемого детектором излучения в Ньютоновском приближении может быть записан в следующем виде:

$$dF = \frac{2\pi}{c^2 h^3} \frac{R_{NS}^2}{D^2} \left[\int_{\cos\theta > 0} dS \cos\theta I_E(E, T(\theta, \varphi)) \right] \times \quad (1.20)$$

$$\times E^3 \exp^{-N_H \sigma(E)} A(E) dE dt,$$

где $I_E = \left(\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1 \right)^{-1}$ – Планковская функция распределения, E – энергия фотона, θ и φ – полярный и азимутальный углы, соответственно. Величина D определяет расстояние от НЗ до точки наблюдения, $A(E)$ – эффективная площадь детектора. В данной работе мы не рассматриваем свойства детектора

и предполагаем, что он имеет единичную площадь. Межзвездное поглощение учтено при помощи члена $\exp(-N_H\sigma(E))$, где N_H – концентрация водорода на луче зрения между НЗ и наблюдателем, а $\sigma(E)$ – эффективное сечение поглощения [126]. В рамках данной работы рассматривается $N_H = 10^{20} \text{ cm}^{-2}$. Выражение в квадратных скобках в (1.20) должно быть проинтегрировано по площади наблюдаемого полушария, после чего величина dF интегрируется по диапазону энергий регистрируемых фотонов для получения зависящей от фазы вращения кривой блеска.

Эффекты ОТО являются существенными при рассмотрении теплового излучения с поверхности НЗ. Строгая релятивистская теория распространения света вблизи компактных объектов была разработана в работе [123]. В условиях вблизи НЗ эффекты ОТО проявляются за счет красного смещения энергии фотона, а также искажения его траектории от прямолинейной. Первый эффект приводит к эффективному уменьшению энергии кванта для удаленного наблюдателя, а второй эффект проявляется в том, что для бесконечно далекого наблюдателя будет видно более половины поверхности НЗ. Так, световой луч, выходящий с поверхности НЗ под углом θ' к нормали к данной поверхности, искривит свою траекторию, и на бесконечности для наблюдателя угол будет равен $\theta > \theta'$. В этом случае эффективный радиус НЗ будет больше реального. Простая, но достаточно точная аппроксимация соотношения углов θ и θ' была предложена в статье [127]:

$$1 - \cos \theta' = (1 - \cos \theta)(1 - x_g), \quad (1.21)$$

где $x_g = \frac{2GM_{NS}}{c^2 R_{NS}}$ – гравитационный радиус НЗ. С учетом описанных эффектов, поток энергии, регистрируемый единицей площади детектора может быть записан в следующем виде:

$$dF = \frac{2\pi}{c^2 h^3} \frac{R_{NS\infty}^2}{D^2} \left[\int_{\cos \theta' > 0} dS \cos \theta' I_E(E_\infty(1 - x_g)^{-1/2}, T) \right] \times \quad (1.22)$$

$$\times E_\infty^3 \exp^{-N_H \sigma(E_\infty)} A(E_\infty) dE_\infty dt_\infty.$$

В выражении выше $E_\infty = E\sqrt{1 - x_g}$ – энергия с учетом гравитационного красного смещения, а эффективный радиус НЗ $R_{NS\infty} = R_{NS}/\sqrt{1 - x_g}$. Выражение $dt_\infty = dt/\sqrt{1 - x_g}$ отвечает замедлению времени около НЗ. Выражение для θ'

Таблица 5 — MPF (%), отвечающие двухпиковым кривым блеска, представленным на Рис.1.13.

	$\beta = 0.75$ $\Theta_b = 60^\circ$	$\beta = 0.50$ $\Theta_b = 45^\circ$	$\beta = 1.00$ $\Theta_b = 30^\circ$
диполь	5.1	4.2	3.1
Случай 1	4.2	4.9	6.8
Случай 2	14.2	17.2	9.1

определено формулой (1.21), и интегрирование выражения в квадратных скобках проводится по поверхности видимой части НЗ. Рассматривается диапазон энергий детектора EPIC-pn на орбитальном рентгеновском телескопе XMM-Newton, для которого $E_{min} = 0.15$ КэВ и $E_{max} = 1.5$ КэВ.

Во время наблюдения теплового излучения от вращающейся НЗ возникают пульсации наблюдаемого потока излучения. Чтобы измерить их силу, введем т.н. максимум пульсаций (maximum pulsed fraction — MPF):

$$MPF = \frac{F_{max} - F_{min}}{F_{max} + F_{min}}, \quad (1.23)$$

где F_{max} и F_{min} — значения максимального и минимального потоков энергии, соответственно (потоки числа фотонов могут быть рассмотрены аналогичным образом).

1.7.2 Результаты расчетов

В отсутствие квадрупольной компоненты наблюдаемые пульсации излучения являются синусоподобными и симметричными, а кривая блеска может быть или двухпиковой (оба магнитных полюса видны) или однопиковой (виден один прецессирующий полюс). Введем здесь два угла, характеризующие кривую блеска — угол между осью вращения НЗ и осью диполя α_d и угол между осью вращения и линией зрения наблюдателя ζ . Как было отмечено в работе [73] без учета эффектов ОТО, для дипольного магнитного поля в НЗ, при $\alpha_d + \zeta \leq \pi/2$

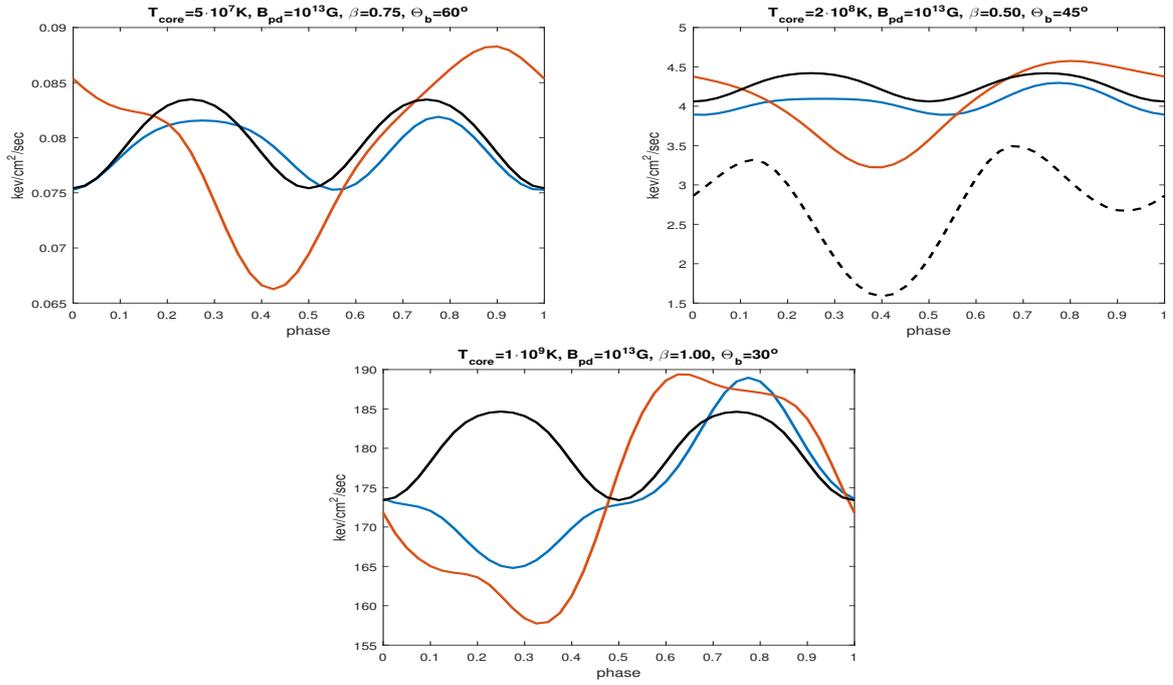


Рисунок 1.13 — Кривые блеска для разных T_{core} , β и Θ_b (распределения с Рис.1.11,1.12) для ортогонального ротатора ($\alpha_d = \zeta = \pi/2$). Синие линии соответствуют случаю, когда магнитные оси и ось вращения лежат в одной плоскости. Красные линии соответствуют случаю $\alpha_q = \alpha_d$, т.е. когда обе магнитные оси видны наблюдателю. Сплошные черные линии соответствуют кривым блеска для чисто дипольного поля, а пунктирная черная линия соответствует кривой блеска для Случая 2, но без учета эффектов искривления лучей вблизи НЗ.

форма кривой блеска однопиковая, а в противном случае представлены два пика. Эффекты ОТО приводят к тому, что это условие становится более строгим [124], и в результате однопиковые кривые начинают доминировать. Включение квадрупольной компоненты добавляет в систему еще одну степень свободы в пространство углов, характеризующих кривую блеска, что делает полный анализ конфигураций намного более сложным. Ввиду этого, мы рассматриваем два предела – случай, при котором все три оси (диполя, квадруполя и вращения) находятся в одной плоскости (Случай 1); и случай, когда обе магнитных оси диполя и квадруполя могут находиться на луче зрения удаленного наблюдателя (Случай 2) таким образом, что $\alpha_d = \alpha_q$, где α_q – угол между осью квадруполя и осью вращения (например, обе магнитных оси находятся на экваторе по отношению к оси вращения, соединяющей полюса). Также мы принимаем $\alpha_d = \zeta$, если в тексте явно не указано другое.

На Рис.1.13 представлены кривые блеска для ортогонального ротатора ($\alpha_d = \zeta = \pi/2$) для разных распределений температуры из предыдущего раздела для Случаев 1 и 2 (синие и красные кривые), а также для чисто дипольных конфигураций (черные линии). Когда все три оси находятся в одной плоскости (Случай 1), основной индикатор присутствия квадрупольной компоненты имеет следующий вид. В отсутствие второго пояса ($\beta \lesssim 1$) в распределении температуры поверхности (верхние два рисунка) форма кривой блеска изменяется незначительно. По сравнению с дипольным полем, изменение формы связано с уширением одного пика и сужением второго, что соответствует двум разным горячим частям поверхности на магнитных полюсах. Величина MPF незначительно растет по сравнению с чисто дипольным случаем. Так, для модели НЗ с параметрами $\beta = 0.75$, $T_{core} = 5 \cdot 10^7 K$, $\Theta_b = \pi/3$ величина MPF достигает 5.1%, в то время как для случая $\beta = 0$ величина $MPF = 4.2\%$ (первое изображение на Рис.1.13). Таблица 5 дает информацию об изменении максимума пульсаций для разных случаев. Форма пиков на кривой блеска для Случая 1 остается симметричной, поскольку распределение температуры является четным по отношению к секущей плоскости, проходящей через ось вращения и магнитные оси компонент. Третий график Рис.1.13 отвечает случаю сильного квадрупольного поля, когда возникает второй холодный пояс. Здесь, вместо второго пика на кривой блеска имеется провал, за счет чего максимум пульсаций излучения вырастает в ~ 2 раза по сравнению с чистым диполем, оставаясь достаточно слабыми.

Более интересная ситуация представлена в Случае 2 (красные кривые) – симметрия отдельных импульсов на кривой блеска нарушается, и кривая может иметь различные формы. Более того, пульсации также могут существенно усилиться по сравнению с дипольным полем – так, например, при учете квадрупольной компоненты MPF увеличивается с 4% до 17% на графике с верхней панели Рис.1.13. Схожие черты с красной линией на данном рисунке имеет профиль источника RX J0420.0-5022 [128], наблюдаемого обсерваторией XMM-Newton, что может говорить о наличии несоосных мультиполей в конфигурации магнитного поля данной НЗ. В упомянутом источнике имеется достаточно высокая степень пульсаций $MPF = 14.2$, а черты на кривой блеска имеют схожие качественные особенности с полученной синтетической кривой в данной работе. Стоит также отметить, что синтетические кривые имеют два пика без учета эффектов искривления траекторий распространения лучей, в то время как с

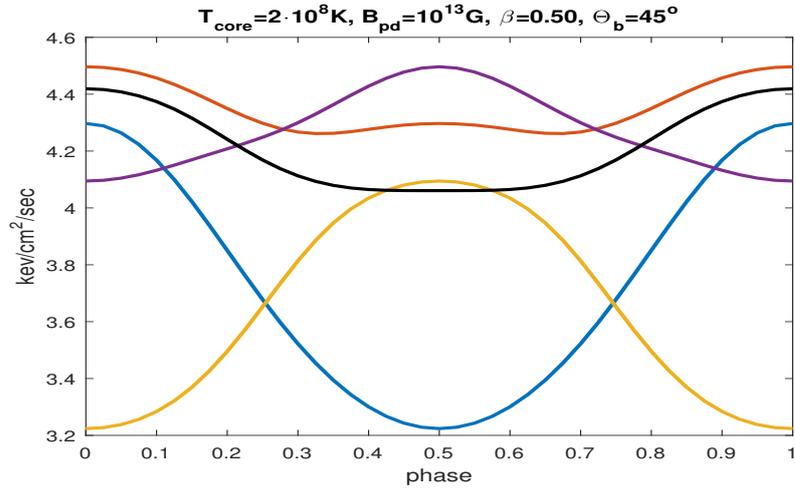


Рисунок 1.14 — Однопиковые ($\alpha_d = \zeta = \pi/4$) кривые блеска для случая, когда все оси находятся в одной плоскости для разных углов квадрупольной оси к оси вращения для распределения с параметрами $T_{core} = 2 \cdot 10^8 K$, $B_{pd} = 10^{13} G$, $\beta = 0.50$ и $\Theta_b = 45^\circ$ (Рис.1.11). Черные линии соответствуют чистому диполю.

Цветные линии отвечают разным положениям квадрупольной компоненты: Синие ($\alpha_q = \pi/2$) и желтые ($\alpha_q = 0$) отвечают ”меньшему” полюсу, а красные ($\alpha_q = \pi/2$) и фиолетовые ($\alpha_q = \pi/2$) отвечают ”большому” полюсу.

учетом эффектов ОТО, меньший пик ”замазывается” и сливается с большим пиком, и в результате наблюдается однопиковый профиль на кривой блеска. Пунктирная двухпиковая кривая на Рис. 1.13 соответствует случаю плоского пространства-времени, иллюстрируя данный эффект.

Далее мы рассмотрели эффект наличия несоосного с дипольным квадрупольного поля на однопиковых кривых блеска, т.е. в случае, когда для чисто дипольной конфигурации видна только одна из двух горячих областей. Здесь также рассмотрены два предела, как и для двухпиковых конфигураций – Случаи 1 и 2, отвечающие положению всех осей в одной плоскости и $\alpha_d = \alpha_q$, соответственно. На Рис.1.14 синтетические кривые блеска представлены для Случая 1 для различных положений квадрупольного поля при $\alpha_d = \zeta = \pi/4$. По сравнению с чисто дипольным случаем (черная линия), наличие квадрупольной компоненты приводит к тому, что необходимо рассматривать 4 случая положения квадрупольного поля по отношению к наблюдателю. Квадрупольное поле приводит к тому, что одна из горячих шапок становится эффективно ”меньше” (в той части НЗ, где дипольное поле направлено от поверхности к ядру), в то время как вторая шапка остается такой же либо увеличивается за счет смещения холодного пояса (см. [20], а также предыдущий раздел), ввиду чего

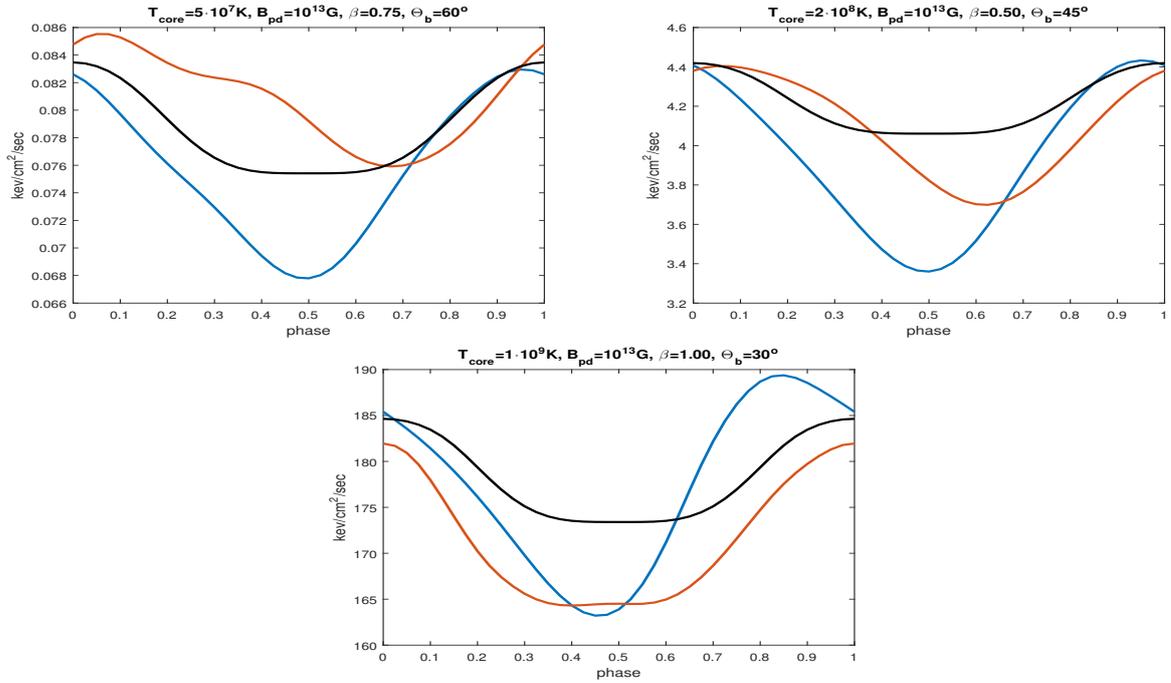


Рисунок 1.15 — Кривые блеска для различных T_{core} , β и Θ_b при $\alpha_d = \zeta = \pi/4$ и $\alpha_q = \alpha_d$ (распределения с Рис.1.11,1.12). синие линии соответствуют случаю, когда виден только ”меньший” полюс, а красные — случаю, когда виден только ”большой”. Черные линии отвечают кривой блеска для НЗ с дипольным полем.

разные горячие полярные области становятся различимы. Дополнительно, при $\Theta_b \neq 0$ возникают еще два варианта положения квадрупольной компоненты, соответствующие $\alpha_q > \alpha_d$ и $\alpha_q < \alpha_d$. Все кривые блеска для Случая 1 являются симметричными, а также совпадающими топологически с кривыми для дипольного поля. Единственное отличие от дипольных кривых блеска — это усиление MPF для случая, когда виден меньший горячий полюс. Самое сильное увеличение пульсаций достигает 14.7% по сравнению с $MPF = 4.2\%$ для чистого диполя. Для видимого большего полюса результаты практически не отличаются от дипольного поля. Таким образом, при данном положении полей нельзя сделать однозначных оценок о наличии недипольного поля только по росту MPF , поскольку пульсации могут быть усилены также и другими физическими процессами, такими, как, например, наличием линии поглощения в атмосферном спектре НЗ (см. работу [13], в которой анализировались данные недавно открытой тепловой компоненты излучения от пульсара PSR J0726-2612, и где было также показано, что ввиду наличия линии поглощения в кривой блеска есть сильные пульсации с высоким значением MPF).

Таблица 6 — Значения MPF (%), отвечающие однопиковым кривым блеска из Рис.1.15 для дипольного поля (черные линии на графиках), а также для ”большого” (красные линии) и ”меньшего” (синие линии) полюсов при наличии квадрупольной компоненты.

β	0.75	0.50	1.00
Θ_b	60°	45°	30°
диполь	5.1	4.2	3.1
”больший” полюс	10.0	13.8	7.4
”меньший” полюс	6.1	8.69	5.1

На Рис.1.15 представлены синтетические кривые блеска для Случая 2, в котором синие кривые отвечают меньшему полюсу, а красные — большему. В обоих случаях пульсации усиливаются, см. Таблицу 6 со значениями MPF по сравнению с чистым диполем. Когда холодный пояс в распределении температуры только один, одна из сторон пика на кривой блеска выглядит близкой к прямой линии для ситуации когда виден меньший горячий полюс, в то время как кривая принимает неправильную форму в случае, когда виден больший полюс при достаточно больших углах $\Theta_b = \pi/3$. Наличие линейной черты на кривой блеска может сделать квадрупольное поле различимым для наблюдения. Для НЗ с сильным квадрупольным полем при возникновении второго холодного пояса минимум на кривой блеска существенно смещается от центра, если максимумы энергии на границах с координатами фазы вращения 0 и 1 (синяя линия на нижней панели Рис.1.15), что приводит к более резкому наклону линейной части кривой блеска и формированию ”перекоса”. Магнитные конфигурации такого типа могут быть присущи объекту RX J0806.4-4123 (см. Рис.4 в работе [128]).

Последняя ситуация выражена более явно, когда $\alpha_d \neq \zeta$. Хотя ранее для простоты рассматривалось $\alpha_d = \zeta$, такое ограничение является искусственным, и некоторые типы кривых блеска могли быть упущены из рассмотрения. Например, мы рассчитали кривую блеска для различного положения осей диполя и наблюдения (Рис.1.16). Такой случай может приводить к существенно несимметричному пику на кривой блеска, в котором 65 — 70% зависимости потока излучения от фазы вращения описывается практически линейной функцией. Такая черта на кривой блеска может отвечать наличию второй холодной об-

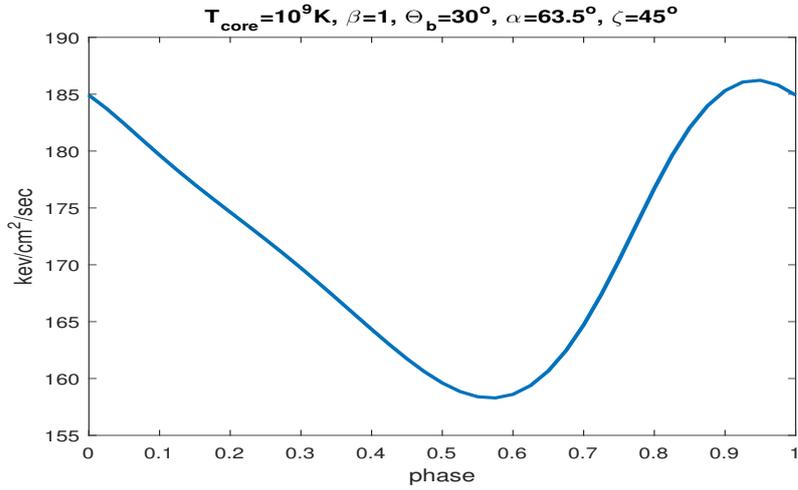


Рисунок 1.16 — Кривая блеска для распределения температуры с сильным квадрупольным полем $\beta = 1$ из Рис.1.12 при не одинаковых углах зрения и дипольного поля к оси вращения. Угол зрения равен $\zeta = 45^\circ$, а углы магнитных осей по отношению к оси вращения $\alpha_d = 63.5^\circ$, $\alpha_q = 45^\circ$.

ласти на поверхности НЗ, что соответствует наличию сильной недипольной (в данном случае – квадрупольной) компоненты в конфигурации поля.

Отметим, что в данной работе мы не утверждаем, что синтетические кривые блеска аппроксимируют все особенности наблюдаемых кривых источников RX J0420 и RX J0806, поскольку мы рассмотрели только несколько распределений температуры и не учитывали возможные дополнительные процессы с излучением в атмосфере НЗ, такие, как, например, широкая линия поглощения на ионной циклотронной частоте. Учет атмосферных эффектов был проделан в работе [14] на большой выборке модельных распределений температуры с соосными дипольным и квадрупольным полями в рамках популяционного анализа. Однако, рассчитанные здесь синтетические кривые блеска имеют схожие черты с упомянутыми источниками. Также рассмотренная здесь модель естественным образом приводит к появлению не диаметрально противоположных горячих шапок, которые, по-видимому, имеются в источнике RX J0720. Для построения кривых, фитирующих реальные данные наблюдений, необходимо проводить популяционный анализ на большой выборке расчетных распределений температуры, как это было проделано в [14]. Однако, для трехмерных расчетов это может быть очень вычислительно затратно.

1.8 Заключение к Главе 1

В данной главе изложены основные методы и приближения для построения численной модели тепловой структуры в коре и внешней оболочке НЗ с магнитным полем. Используется трехмерная модель без предположения об осевой симметрии магнитного поля. Алгоритм разделяет внешние слои НЗ на кору, где решается трехмерное уравнение переноса, и оболочку, для которой построена одномерная локальная модель тепловой структуры, учитывающая анизотропный перенос тепла вырожденными электронами и излучением с учетом процессов Томсоновского рассеяния, свободно-свободных и свободно-связанных переходов при наличии магнитного поля. Модель тонкой оболочки встраивается в граничное условие излучения на внешней границе коры, а температура ядра, ввиду его большой теплопроводности, предполагается постоянной. В предположении о медленном охлаждении нейтронной звезды можно рассматривать серию моделей со стационарными распределениями температуры, меняя температуру ядра, ввиду чего получается краевая задача (1.17), (1.18), численный алгоритм решения которой также представляет самостоятельный интерес.

В данной главе изложено развитие численного метода опорных операторов на трехмерный случай. Получены сеточные аналоги основных дифференциальных операторов векторного анализа на трехмерной неструктурированной сетке, состоящей из тетраэдров. Операторно-разностный подход позволяет естественным образом проводить дискретизацию разностных уравнений, используя дискретные аналоги основных дифференциальных операторов векторного анализа, при этом свойства самих исходных операторов (сопряженность дивергенции и градиента, равенство нулю дивергенции от ротора, самосопряженность и знакоопределенность оператора Лапласа и пр.) сохраняются и в дискретном случае. Данный метод использован нами для построения численной трехмерной модели анизотропного переноса тепла в коре и внешней оболочке замагниченной НЗ. Итоговая нелинейная краевая задача решается с использованием метода Ньютона для дискретизованного уравнения теплопроводности на сетке. В качестве тестовых расчетов рассмотрены конфигурации для НЗ с дипольным магнитным полем, генерируемым в ядре, а также проведено сравнение результатов с работами других авторов. Дополнительно рассмотрена НЗ с квадрупольным полем, а также с суперпозицией дипольного и квадрупольного полей. Комплекс

программ имеет модульную структуру, и его можно достаточно просто адаптировать под другие коэффициенты переноса/модели внешних оболочек НЗ, а также конфигурации магнитного поля, описанные в литературе (см., напр., обзор [21]).

Приведены результаты исследований трехмерных эффектов, которые возникают при анизотропном переносе тепла во внешних слоях НЗ при наличии неосесимметричного магнитного поля. Были рассмотрены простейшие конфигурации с дипольными и квадрупольными полями, генерируемыми в центре НЗ. Проведено самосогласованное решение трехмерного уравнения переноса тепла с тензорным коэффициентом теплопроводности в коре НЗ. Рассмотрены случаи разных углов наклона и отношения индукций мультиполей друг к другу. Для рассчитанных распределений температуры были построены синтетические тепловые кривые блеска в локально-чернотельном приближении с учетом эффектов ОТО, связанных с распространением излучения от компактного объекта до удаленного наблюдателя. Основная цель данного исследования – выявить качественные особенности на кривых блеска, присущие наличию неосесимметричного магнитного поля в НЗ. Наличие несоосной к дипольной квадрупольной компоненты магнитного поля может привести к существенному усилению пульсаций наблюдаемого теплового излучения, а также к искривлению пиков на кривой блеска и возникновению практически линейных отрезков на ней. Выделенные здесь черты присущи наблюдательным данным от объектов RX J0420, RX J0720 и RX J0806, что может свидетельствовать о наличии сложной несоосной структуры магнитного поля в этих НЗ. Особенности на кривых блеска, полученные для несоосных мультиполей, не совпадают с таковыми для чистого диполя (генерируемого в ядре или в коре) или для диполя при наличии сильной тороидальной компоненты [12; 15], расширяя ”зоопарк” наблюдательных проявлений от излучающих в тепловом диапазоне одиночных НЗ.

Дополнительно, разработанный комплекс программ можно использовать для самосогласованного моделирования теплового излучения НЗ с произвольно заданным магнитным полем без каких-либо предположений о его симметриях, используя расчетные данные для сравнения с данными наблюдений тепловых одиночных рентгеновских источников и проверки различных гипотез о конфигурации магнитного поля НЗ.

Результаты, полученные в данной главе, были опубликованы в следующих статьях:

1. *Kondratyev I.A., Moiseenko S.G.*, "Application of 3D basic operators method extension to astrophysical problems" IOP Journal of Physics: Conf. Series 1163 (2019) 012069 DOI:10.1088/1742-6596/1163/1/012069
2. *Kondratyev I.A., Moiseenko S.G., Bisnovatyi-Kogan G.S., Glushikhina M.V.*, "Numerical simulation of an anisotropic heat transfer in magnetized neutron stars with 3D basic operators method" IOP Journal of Physics: Conf. Series 1336 (2019) 012006 DOI:10.1088/1742-6596/1336/1/012006
3. *И. А. Кондратьев, С. Г. Моисеенко, Г. С. Бисноватый-Коган, М. В. Глушихина* "3D моделирование анизотропной теплопроводности во внешних слоях замагниченных нейтронных звезд" *Астрономический Журнал*, 2020, том 97, No. 3, с. 206–224 DOI:10.31857/S0004629920020036
4. *Ilya A. Kondratyev, Sergey G. Moiseenko, Gennady S. Bisnovatyi-Kogan and Maria V. Glushikhina*, "Three-dimensional heat transfer effects in external layers of a magnetized neutron star" *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, 497, 2883–2892 (2020) DOI:10.1093/mnras/staa2154

Глава 2. Численные методы для моделирования астрофизических МГД-течений с использованием явных и полунявных конечно-объемных подходов

2.1 Численная конечно-объемная схема для уравнений газовой динамики

В данной главе рассмотрены численные методы для моделирования астрофизических течений при помощи метода конечного объема с использованием достаточно распространенных явных методов Годуновского типа, а также полунявного подхода с неявным учетом акустических волн. Уравнения идеальной нерелятивистской газовой динамики могут быть записаны в следующей консервативной форме в виде законов сохранения массы, импульса и энергии [129]

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \hat{I}) &= -\rho \mathbf{f}, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + P) \mathbf{v}) &= -\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}).\end{aligned}\tag{2.1}$$

В системе выше ρ – плотность газа, \mathbf{v} – его скорость, $E = \rho e_{th} + \rho \frac{v^2}{2}$ – плотность полной энергии, в которой e_{th} – удельная тепловая энергия, а P – давление газа. \hat{I} – единичный тензор. Вектор \mathbf{f} обозначает внешнюю силу на единицу массы. Для дальнейшего решения систему уравнений газовой динамики необходимо дополнить начальными и граничными условиями, а также уравнением состояния вещества в форме $P = \mathcal{P}(\rho, T)$, $e_{th} = \mathcal{E}(\rho, T)$, где T – температура газа. Система уравнений выше может быть записана в форме векторного закона сохранения:

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{S}.\tag{2.2}$$

Здесь \mathbf{U} – вектор сохраняющихся величин $[\rho, \rho \mathbf{v}, E]$, $\mathbf{F} = [\rho \mathbf{v}, \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \hat{I}, (E + P) \mathbf{v}]$ – потоки сохраняющихся величин, \mathbf{S} – вектор правых частей. Система выше описывает уравнения газовой динамики в форме векторного дифференциального закона сохранения. Данные уравнения могут быть проинтегрированы по некоторому объему V с использованием теоремы Остроградского-Гаусса для дивергенции потоков:

$$\partial_t \int_V \mathbf{U} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{S} dV.\tag{2.3}$$

Построим для интегрального закона (2.3) численную схему на основе метода конечного объема. Для этого введем в конечной области пространства сетку из ячеек, объемы которых не перекрываются. Дополнительно необходимо задать связи между ячейками (задать индексы соседствующих ячеек), а также ввести площади граней между ячейками S и нормали к граням \mathbf{n} . Также введем средние по ячейкам вида

$$U_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} U dV, \quad (2.4)$$

где интеграл берется по объему ячейки с индексом i , V_i – ее объем. Можно получить проинтегрированный по объему закон эволюции среднего значения по ячейке в следующей форме:

$$\partial_t(U_i) + \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{ij}(U) = S_i, \quad (2.5)$$

где V_i – это объем ячейки, S_{ij} – площадь грани между соседствующими ячейками с индексами i и j , и $N_{face,i}$ – это количество граней (для однородной сетки это единица, а для сетки с вращением, как правило, у ячейки имеется по одному соседу на каждой азимутальной грани и по два соседа на радиальных сторонах и в z/θ направлении, см. след. раздел этой главы).

В случае, когда уравнения газовой динамики решаются в подвижной системе отсчета методом конечного объема, теорема Гаусса должна применяться к подвижному элементу. Тогда для любой из сохраняющихся величин в уравнении (2.2) закон сохранения имеет вид:

$$\partial_t U + \nabla \cdot (F - \mathbf{w}U) = S, \quad (2.6)$$

Где \mathbf{w} – скорость системы отсчета. Численная аппроксимация уравнений выше имеет следующую форму [98–100]:

$$\partial_t(U_i) + \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} (\mathbf{F}_{ij,U} - \mathbf{w}_{ij} U_{ij}) = S_i, \quad (2.7)$$

где \mathbf{w}_{ij} – скорость грани ячейки. Используя различные временные веса для расчетных величин, входящих в потоки F , а также различные порядки аппроксимации величин в ячейках и на гранях, можно строить различные численные схемы, основанные на аппроксимации методом конечного объема. Так, при

аппроксимации всех величин в потоках F на нижнем слое по времени, возникающие системы уравнений решаются тривиально, однако допустимый шаг по времени в расчетах будет ограничен. Использование же всех величин на верхнем слое приведет к решению очень сложной системы нелинейных уравнений на каждом шаге, однако ограничения на временной шаг будут сняты.

2.1.1 Структура расчетной сетки

Использование сферических и цилиндрических геометрий является весьма естественным в астрофизической гидродинамике, поскольку множество астрофизических явлений в первом приближении обладают сферической или осевой симметрией. Кроме того, сохранение углового момента проще всего достигается именно в таких типах геометрий. В этом разделе мы кратко опишем процедуру построения сетки.

Как известно, для всех явных численных схем для моделирования сплошной среды есть ограничение сверху на допустимый шаг по времени при расчете (условие Куранта-Фридрихса-Леви, далее КФЛ, [87]), возникающее ввиду того, что возмущения, описываемые бегущими в среде волнами, не должны проходить за шаг по времени расстояние большее, чем линейные размеры одной расчетной ячейки. В противном случае схема будет экстраполировать численное решение за физически допустимую область влияния, что приводит к хорошо известной численной неустойчивости. Хотя даже цилиндрическая геометрия может обладать достаточно жестким условием КФЛ для максимально допустимого временного шага ввиду сходящихся ячеек в азимутальном направлении, использование равномерной сетки в сферических координатах, удобных при моделировании сверхновых, иногда может быть еще более проблематичным из-за кривизны в направлении угла θ . Условие КФЛ для явной газодинамической схемы на равномерной сферической сетке выглядит следующим образом:

$$\Delta t_{HD} = C_{CFL} \min \left(\frac{\Delta r}{|v_r| + c_s}, \frac{r\Delta\theta}{|v_\theta| + c_s}, \frac{r \sin \theta \Delta\varphi}{|v_\varphi| + c_s} \right), \quad (2.8)$$

где минимум берется по всем направлениям ячейки. В приведенном выше выражении, $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi)$ - скорость газа, c_s - скорость звука, и $C_{CFL} < 1$ - постоянное число Куранта. В числителях дробей в (2.8) представлены линейные

размеры ячейки для радиального, латерального и азимутального направлений, соответственно. При $r \sim \Delta r$ (центр ячейки) и/или $\sin \theta \sim \Delta \theta$ (ось) временной шаг должен быть значительно уменьшен из-за очень малого соотношения сторон ячеек. Ошибки дискретизации в сходящихся ячейках также могут расти. Чтобы предотвратить это, необходимо применить процедуру разрежения сетки в угловых направлениях для достижения соотношения сторон ячейки порядка единицы. В разработанном коде мы используем древовидную сетку в латеральном и азимутальном направлениях, аналогичную описанной в статье о коде *FORNAX* [35]. На Рис. 2.1 показаны двумерное сечение и поверхность трехмерной древовидной сетки в сферических координатах со смещенными на случайную фазу ячейками в азимутальном направлении. Процедуры разрежения сетки позволяет смягчить условие КФЛ для явной схемы, делая его зависимым фактически только от радиального разрешения [35]. В цилиндрических координатах также проводится аналогичная процедура разрежения сетки в азимутальном направлении. Отметим, что также возможно определить разрешение по φ как произвольную функцию от (r, θ) в сферических координатах и от (R, z) в цилиндрической геометрии. Для полунеявного метода с подвижной сеткой (см. ниже) разрежение сетки в азимутальном направлении не увеличивает максимальный допустимый временной шаг для газовой динамики, и данную процедуру можно избежать. Однако, в случае МГД, разрежение сетки около оси может сделать расчет более эффективным как для явного, так и для полунеявного подхода из-за наличия альфвеновской скорости в условии КФЛ для полунеявного МГД-метода [95] и быстрой магнитозвуковой скорости для явной схемы.

Для моделирования течений с крупномасштабным вращением, таких, как аккреционные диски и МР-сверхновые, используется подход, в котором сетка описывается как набор азимутально движущихся колец с фиксированными (r, θ) или (R, z) , в сферической или цилиндрической геометрии, соответственно. Хотя каждому кольцу разрешено двигаться с произвольной азимутальной скоростью, скорость кольца по умолчанию выбирается как арифметическое среднее азимутальных скоростей всех ячеек кольца. В цилиндрической геометрии это выглядит следующим образом:

$$w_{i_R, j_Z}^\varphi = \frac{1}{N_{i_R, j_Z}^\varphi} \sum_{k=1}^{N_{i_R, j_Z}^\varphi} (v_\varphi)_{i_R, j_Z, k}, \quad (2.9)$$

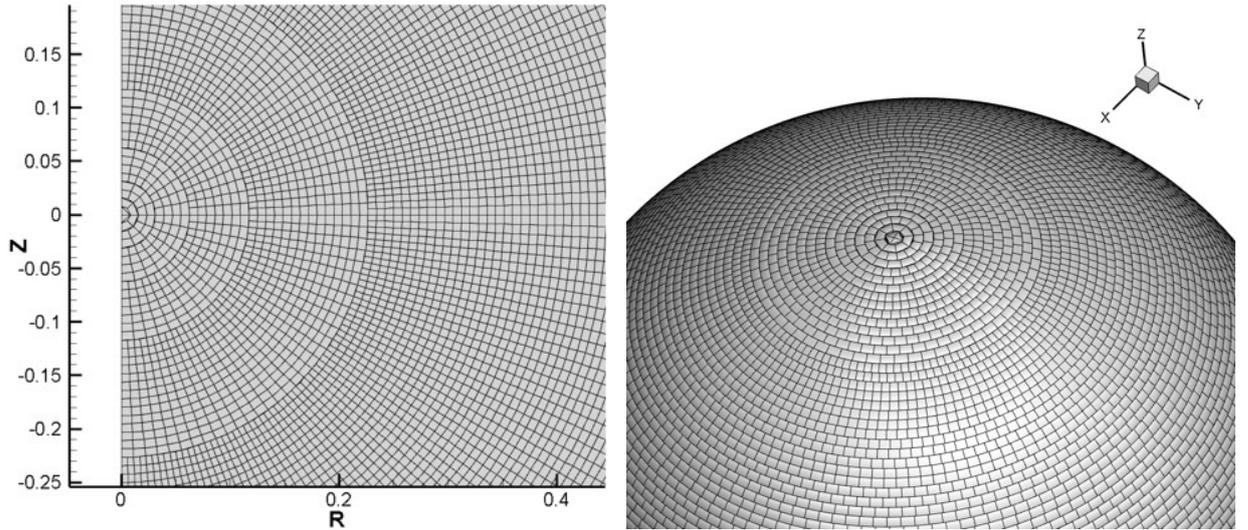


Рисунок 2.1 — 2D сечение с включением оси (слева) и 3D поверхность (справа) древовидной сетки с разрешением $N_r \times \max N_\theta \times \max N_\varphi = 128 \times 128 \times 128$ ячеек.

где i_R и j_Z - индексы координат R и Z , а k - азимутальный индекс.

Для расчетов методом конечного объема с подвижной сеткой ее структура должна пересчитываться на каждом временном шаге, т.е. для каждой грани необходимо определить её площадь, азимутальную координату и индексы соседних ячеек. Для подвижной сетки в цилиндрической геометрии эта процедура четко описана в [98]. Расширение на сферическую геометрию является тривиальным.

2.1.2 Явная численная схема для уравнений газовой динамики

Введем аппроксимацию временной производной с временным шагом Δt и первым порядком точности по времени

$$(U)_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}, \quad (2.10)$$

где индексы n и $n + 1$ соответствуют временным слоям с временами t и $t + \Delta t$, соответственно. Тогда, с первым порядком точности, аппроксимируя все величины в потоках F на нижнем слое по времени, можно получить аппроксимацию

искомой системы уравнений (2.1):

$$(U_i)_t + \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} \mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{F}_{ij}^n(U) = S_i^n, \quad (2.11)$$

поскольку все величины кроме искомой U_i^{n+1} нам известны, такие методы носят название явных по времени схем. Для решения уравнений газовой динамики явной схемой метода конечного объема стандартным подходом является использование метода Годунова [82] с приближенным решением задачи о распаде разрыва (задачи Римана). Основная идея данного подхода состоит в интерпретации усредненных по ячейкам состояний среды (2.4), ограниченных гранями ячеек, как начальных данных для задачи Римана о распаде произвольного разрыва в газовой динамике. Задача Римана состоит в том, что рассматриваются два произвольных состояния газа слева и справа от некоторой поверхности, которая представляет собой перегородку между ними. В начальный момент времени перегородка убирается, и возникает разрывное состояние. Ввиду того, что состояния газа произвольные, они не удовлетворяют законам сохранения в форме (2.1), и разрыв распадается на композицию разрывов, которые уже удовлетворяют законам сохранения. Применительно к численному моделированию, в каждый новый шаг по времени грани ячеек рассматриваются как перегородки в задачах о распаде разрыва, ввиду чего, решив задачу Римана, можно получить состояние газа на грани между ячейками и использовать его для построения численного потока. Чтобы задачи Римана на каждой грани были независимы на шаге по времени, возникает также ограничение на временной шаг типа КФЛ, описанное в предыдущем разделе. В решении возможно возникновение трех типов нелинейных волн, соответствующих в одномерной газодинамике двум звуковым и одной энтропийной модам. Для звуковых мод возможны ударные волны и волны разрежения, для энтропийной – контактные/тангенциальные разрывы [29; 129]. Пример структуры решения задачи о распаде разрыва в газовой динамике представлен на Рис. 2.2.

Решение задачи Римана для газовой динамики можно найти аналитически, однако, оно является довольно громоздким, ввиду чего придумано множество различных подходов, основанных на расщеплении потока [130] на адвекцию и акустику, на локальной линеаризации уравнений и использовании точного решения задачи о распаде разрыва в акустике (метод Роу, [131]), а также методы основанные на использовании приближенной волновой структуры

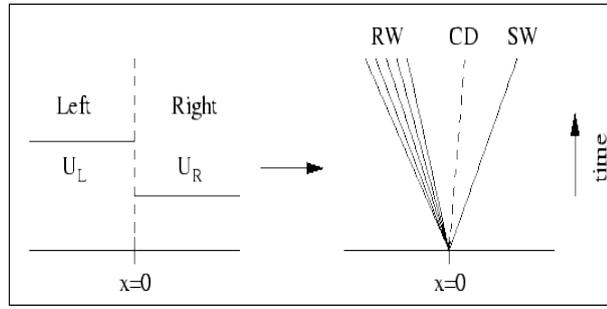


Рисунок 2.2 — Пример структуры решения задачи о распаде разрыва в газовой динамике. Из разрыва между состояниями U_L и U_R формируются три нелинейных волны – волна разрежения RW , распространяющаяся влево, ударная волна SW , распространяющаяся вправо, а также контактный разрыв, движущийся вправо вместе с веществом CD между ними.

при решении задачи Римана [29]. Наиболее популярен в настоящее время последний подход. В рамках подхода HLL (по фамилиям авторов – Harten, Lax, van Leer) предполагается, что при решении задачи о распаде разрыва возможно образование только сильных разрывов – ударных волн. Данный подход является очень простым и эффективным при моделировании различных течений, однако он страдает от того, что не разрешает контактные разрывы, которые зачастую замазываются на практике схемной вязкостью метода. Для борьбы с этой проблемой в работе [132] разработан метод $HLL - Contact$ ($HLLC$), учитывающий образование контактных разрывов в задаче Римана. В нашем комплексе программ реализованы методы HLL и $HLLC$.

В случае подвижной системы координат сеточный закон изменения величины U в ячейке с индексом "i" имеет следующую форму [98–100]:

$$(U_i)_t + \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} (\mathbf{F}_{ij,U}^n - \mathbf{w}_{ij} U_{ij}^n) = S_i^n. \quad (2.12)$$

В выражении выше потоки на гранях ячеек $\mathbf{F}_{ij,U}$ рассчитываются в системе отсчета грани, движущейся со скоростью \mathbf{w}_{ij} , а U_{ij} – это интерполированная на грань ячейки консервативная величина. Для построения явных схем со вторым порядком, как это было сделано в работах [98–100], потоки $\mathbf{F}_{ij,U}$ рассчитываются при помощи решения задачи о распаде произвольного разрыва в системе грани для кусочно-линейно интерполированных величин (см. следующий раздел). Удобные для программирования выражения для потоков в подвижной системе координат могут быть найдены в работе [133] для газовой динамики и МГД, использующие подходы вида HLL и $HLLC$ для газовой динамики.

2.1.3 Повышение порядка точности по пространству и времени

При кусочно-постоянном подходе, как в оригинальном методе Годунова [82], численное решение, полученных с использованием выражений вида (2.11), (2.12), имеет первый порядок точности по времени и пространству ввиду кусочно-постоянного подхода к аппроксимации расчетных величин на сетке. Это приводит к тому, что численная вязкость метода является очень высокой, что, в свою очередь, означает размазывание тонких структур в моделируемом течении, фронтов ударных волн и областей с сильно переменными параметрами. Повышение порядка точности схемы до второго или выше приводит к потере монотонности численного решения даже для простых линейных уравнений, а также возникновению паразитных осцилляций в областях сильных градиентов, которые невозможно подавить, используя линейные схемы (теорема Годунова [81]). Однако, при использовании нелинейных схем с высоким порядком точности, которые переходят к схемам с первым порядком в областях, где потенциально монотонность может нарушаться, суммарная аппроксимация метода становится выше. С 1980-х годов данный подход является одним из основных в вычислительной гидродинамике и МГД.

В методах конечного объема с повышенным порядком аппроксимации стандартным является кусочно-полиномиальное уточнение решения с учетом данных о соседних ячейках и его экстраполяция в грань ячейки. Результирующие экстраполированные выражения для всех расчетных величин в грани используются для построения потока (например, при помощи метода Годуновского типа) между ячейками вместо кусочно-постоянных значений. Для того, чтобы монотонность численного решения сохранялась, уточняющие поправки к кусочно-постоянному профилю ограничивают таким образом, чтобы уточненное решение находилось в области монотонности [29]. Методы с такими ограничителями называются *TVD*-методами, т.е. методами с невозрастанием полной вариации (total variation diminishing) решения, поскольку для точного решения и в газовой динамике, и в МГД вариация не нарастает [81; 132]. Свойство *TVD* является расширением свойства монотонности схемы на нелинейные уравнения. Для повышения порядка точности по пространству в разработанном нами комплексе программ реализовано несколько методов. Для явных и полунявных схем реализован метод *PLM* (piecewise linear method) со вто-

рым порядком точности, а также методы *PPM3* и *PPM5* (piecewise parabolic method) для явной схемы Годуновского типа с третьим и пятым порядками аппроксимации, соответственно. Поскольку в астрофизических задачах часто используются криволинейные координаты, мы построили все методы уточнения искомых гидродинамических величин на сетке с учетом кривизны ячеек, используя подход из работы [84], в которой данные методы построены для цилиндрической и сферической геометрий.

В методе *PLM* уточнение строится на основе оценки градиента решения внутри ячейки. Для вращающейся древесной сетки, описанной в данной главе, можно разделить процедуры построения потоков по координатам в разных направлениях, что упрощает все операции. Для грани в направлении некоторой координаты ξ можно записать следующее кусочно-линейное уточнение:

$$\begin{aligned} Q_{f,i} &= Q_i + (\xi_f - \xi_i) \nabla_{\xi}^- Q_i, \\ Q_{f,j} &= Q_j + (\xi_f - \xi_j) \nabla_{\xi}^- Q_j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где Q_i, Q_j – величины внутри ячеек с индексами i и j , соответственно, ξ_f, ξ_i, ξ_j – координата грани и координаты объемных центров ячеек [134], а знак ∇_{ξ} соответствует градиенту величины вдоль направления координаты ξ , после чего выражения $Q_{f,i}, Q_{f,j}$ используются для построения потока F_{ij} между ячейками с индексами i и j со вторым порядком точности по пространству. Градиент в ячейке i строится по данным из соседних ячеек, для чего вдоль направления ξ для всех соседей с индексами k оцениваются на гранях производные следующего вида:

$$\nabla_f Q_{i,k} = \frac{Q_k - Q_i}{\xi_k - \xi_i}, \quad (2.14)$$

после чего по всем значениям производных строится оценка градиента в ячейке с учетом монотонности схемы:

$$\nabla_{\xi}^- Q_i = \text{limiter}(\nabla_f Q_{i,1}, \dots, \nabla_f Q_{i,k}, \dots, \nabla_f Q_{i,N_{\text{cell}}}), \quad (2.15)$$

где *limiter* – функция-ограничитель наклона линейного уточнения, а N_{cell} – число соседей-ячеек в направлении ξ , причем учитываются соседи как на внутренней, так и на внешних гранях ячейки. Функция ограничитель работает так, чтобы в точках локального экстремума $\nabla_{\xi}^- Q_i = 0$, а в областях сильной переменности решения наклон градиента уменьшался. В разработанном коде реализованы ограничители наклонов из работ [84; 98].

В методе *PPM* [83] рассматривается кусочно-параболический профиль расчетной величины внутри ячейки вместо кусочно-линейного для метода *PLM*:

$$Q_i(\xi) = Q_i^- + \frac{\xi - \xi_i^-}{\xi_i^+ - \xi_i^-} \left[Q_i^+ - Q_i^- + \frac{\xi_i^+ - \xi}{\xi_i^+ - \xi_i^-} Q_{i6} \right], \quad (2.16)$$

где $Q_i(\xi)$ – кусочно-параболическая функция внутри ячейки, ξ_i^- , ξ_i^+ – координаты внутренней и наружной граней, Q_{i6} – параболический коэффициент внутри ячейки, который является оценкой второй производной от профиля. Наконец, Q_i^- , Q_i^+ – это уточненные с порядком не ниже третьего величины на гранях ячейки в направлении ξ . В итоге, метод *PPM* позволяет в областях гладкости решения получить аппроксимацию расчетной функции внутри ячейки с третьим порядком точности, а на ее границах – с тем порядком, с которым найдены величины Q_i^- , Q_i^+ . Если находить эти величины с третьим порядком, то в результате получится метод *PPM3*, а если с пятым – то метод *PPM5* [84]. В цитируемой работе приведены подробные выражения для построения данных методов в декартовой, сферической и цилиндрической геометриях. В разработанном комплексе программ для решения уравнений на древесной расчетной сетке для использования методов *PPM* сначала проводится реконструкция величин вдоль азимутального направления. В остальных направлениях ищется шаблон для текущей грани ячейки, а также ее азимутальная координата, куда с третьим порядком интерполируются расчетные величины из шаблона. Далее применяется метод *PPM* (2.16) вдоль искомого направления. Таким образом результирующий порядок аппроксимации решения на грани будет не ниже третьего.

Для повышения порядка точности по времени можно использовать методы Рунге-Кутты. Для этого сначала проводится дискретизация на сетке по пространству, после чего получается система из обыкновенных дифференциальных уравнений в ячейке с индексом i , которая может быть записана в следующей форме:

$$\frac{dV_i \mathbf{U}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} (\mathbf{F}_{ij,U} - w_{ij} \mathbf{U}_{ij}) - V_i \mathbf{S}_i \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \hat{L}(\mathbf{U}). \quad (2.17)$$

Для интегрирования данной системы в явном подходе можно использовать многостадийные методы Рунге-Кутты, обладающие свойством *TVD* – RK1, RK2 и

РКЗ с первым, вторым и третьим порядками аппроксимации по времени, соответственно [105]:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \hat{L}(\mathbf{U}^n) - RK1, \\
 & \begin{cases} \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \hat{L}(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{U}^{n+1} = \frac{\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{(1)}}{2} + \frac{\Delta t}{2} \hat{L}(\mathbf{U}^{(1)}) - RK2, \end{cases} \\
 & \begin{cases} \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \hat{L}(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{U}^{(2)} = \frac{3\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{(1)}}{4} + \frac{\Delta t}{4} \hat{L}(\mathbf{U}^{(1)}) \\ \mathbf{U}^{n+1} = \frac{\mathbf{U}^n + 2\mathbf{U}^{(2)}}{3} + \frac{2\Delta t}{3} \hat{L}(\mathbf{U}^{(2)}) - RK3. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Для интегрирования полунявных уравнений можно использовать явно- неявные методы Рунге-Кутты, однако они не обладают свойством *TVD*. Например, метод с первым порядком *IMEX1* и метод со вторым порядком *ARS(2,2,2)* из работы [135] могут использоваться для интегрирования уравнений газовой динамики полунявным методом, изложенным в следующей главе:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \hat{L}_e(\mathbf{U}^n) + \Delta t \hat{L}_i(\mathbf{U}^{n+1}) - IMEX1, \\
 & \begin{cases} \mathbf{U}^{(1)} = \beta \mathbf{U}^n + \beta \Delta t \hat{L}_e(\mathbf{U}^n) + \beta \Delta t \hat{L}_i(\mathbf{U}^{(1)}) \\ \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + (\beta - 1) \Delta t \hat{L}_e(\mathbf{U}^n) + (2 - \beta) \Delta t \hat{L}_e(\mathbf{U}^{(1)}) + \\ (1 - \beta) \Delta t \hat{L}_i(\mathbf{U}^{(1)}) + \beta \Delta t \hat{L}_i(\mathbf{U}^{n+1}) - ARS(2,2,2), \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

где \hat{L}_i и \hat{L}_e – это неявная и явная подсистемы, соответственно, а число $\beta = \sqrt{2}/2$.

2.1.4 Полунявная численная схема для уравнений газовой динамики

Представленная в данном разделе методика схожа с использованной ранее для построения полунявных методов в декартовой геометрии [92–94]. Здесь она применяется для цилиндрической геометрии и подвижной сетки, для сферических координат процедура идентична. Уравнения Эйлера в цилиндрической

системе координат в форме, сохраняющей угловой момент, могут быть записаны в следующем виде[129]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho v_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_R \mathbf{v}) + \frac{\partial P}{\partial R} = \rho \frac{v_\varphi^2}{r} + \rho f_r \\ \frac{\partial \rho v_z}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_z \mathbf{v}) + \frac{\partial P}{\partial z} = \rho f_z \\ \frac{\partial (R \rho v_\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (R \rho v_\varphi \mathbf{v}) + \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \rho R f_\varphi \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + H \right) \rho \mathbf{v} \right) = -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}, \end{cases} \quad (2.20)$$

где ρ – плотность, P – давление, а плотность полной энергии определяется как $E = \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho e_{th}$, где e_{th} – удельная внутренняя энергия. В уравнении на энергию также введена энтальпия $H = e_{th} + P/\rho$. Источник в правой части отвечает наличию центробежной силы, а также внешней силы \mathbf{f} . Оператор дивергенции введен как $\nabla \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{R} \frac{\partial R Q_R}{\partial R} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}$, где $\mathbf{Q} = (Q_R, Q_z, Q_\varphi)$ – вектор. Для замкнутости системы уравнений (2.20) необходимо определить уравнение состояния вещества. В данном разделе мы рассматриваем идеальный газ с постоянным показателем адиабаты γ :

$$P = (\gamma - 1) \rho E_{th}. \quad (2.21)$$

Развитие данного подхода на произвольное уравнение состояния может быть найдено в [92; 93].

Построим сначала полунявный метод для неподвижной сетки. Для дискретизации системы (2.20), как было предложено в [94], сначала применим дискретизацию по времени без учета внешних сил, которые рассматриваются явным образом:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})^n = 0 \\ (\rho v_R)_t + \nabla \cdot (\rho v_R \mathbf{v})^n + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial R} = \left(\rho \frac{v_\varphi^2}{r} \right)^n \\ (\rho v_z)_t + \nabla \cdot (\rho v_z \mathbf{v})^n + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial z} = 0 \\ (R \rho v_\varphi)_t + \nabla \cdot (R \rho v_\varphi \mathbf{v})^n + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial \varphi} = 0 \\ (E)_t + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \rho \mathbf{v} \right)^n + \nabla \cdot \left(H \rho \mathbf{v} \right)^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Разные индексы n и $(n + 1)$ в уравнениях на импульс и энергию отвечают расщеплению потока в форме Торо-Васкес [130] в адвективную (явную) и акустическую (неявную) подсистемы. После дискретизации по времени, импульс

$\rho \mathbf{v}^{n+1}$ подставляется в закон сохранения энергии, что приводит к следующему уравнению:

$$E^{n+1} = E^* - \Delta t \nabla \cdot \left(H^{n+1} (\rho \mathbf{v})^* \right) + \Delta t^2 \nabla \cdot \left(H^{n+1} \nabla P^{n+1} \right), \quad (2.23)$$

в котором $E^* = E^n - \Delta t \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \rho \mathbf{v} \right)^n$. Далее, верхний индекс "*" отвечает переменным среды после явной части шага по времени. Оператор градиента приведен в следующей форме $\nabla P = \frac{\partial P}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{e}_z + \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$, где \mathbf{e}_i – ортонормальные векторы. Наконец, дискретизованная система по времени имеет следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{n+1} = \rho^n - \Delta t \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})^n = \rho^* \\ (\rho v_R)^{n+1} = (\rho v_R)^n - \Delta t \nabla \cdot (\rho v_R \mathbf{v})^n + \Delta t \left(\rho \frac{v_\varphi^2}{R} \right)^n - \Delta t \frac{\partial P^{n+1}}{\partial R} = (\rho v_R)^* - \Delta t \nabla_R P^{n+1} \\ (\rho v_z)^{n+1} = (\rho v_z)^n - \Delta t \nabla \cdot (\rho v_z \mathbf{v})^n - \Delta t \frac{\partial P^{n+1}}{\partial z} = (\rho v_z)^* - \Delta t \nabla_z P^{n+1} \\ (\rho v_\varphi)^{n+1} = (\rho v_\varphi)^n - \Delta t \frac{1}{R} \nabla \cdot (R \rho v_\varphi \mathbf{v})^n - \Delta t \frac{1}{R} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial \varphi} = (\rho v_\varphi)^* - \Delta t \nabla_\varphi P^{n+1} \\ E^{n+1} = E^* - \Delta t \nabla \cdot \left(H^{n+1} (\rho \mathbf{v})^* \right) + \Delta t^2 \nabla \cdot \left(H^{n+1} \nabla P^{n+1} \right). \end{array} \right. \quad (2.24)$$

После вывода системы выше, получим дискретную по пространству схему. Для начала необходимо построить схему для адвективной подсистемы (члены под операторами дивергенции в (2.24), а также источниковые члены в правых частях), для которых используются конечно-объемные противопоточные схемы Годуновского типа. Для каждой ячейки с индексом i можно записать следующее выражение для каждой величины из набора консервативных переменных $U^* = [\rho^*, (\rho v_R)^*, (\rho v_z)^*, R(\rho v_\varphi)^*, E^*]$, используя (2.5):

$$U_i^* = U_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} \mathbf{F}_{ij,U}^n - \Delta t S_i^n, \quad (2.25)$$

Величина S_i^n соответствует источнику в правой части. Вектор потоков $\mathbf{F} = [\rho \mathbf{v}, \rho v_R \mathbf{v}, \rho v_z \mathbf{v}, R \rho v_\varphi \mathbf{v}, \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} \mathbf{v}]$ может быть аппроксимирован при помощи явной схемы Русанова/Лакса-Фридрихса для адвекции [92]

$$\mathbf{F}_{ij,U} = \frac{\mathbf{F}_{i,U} + \mathbf{F}_{j,U}}{2} - \max(|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}|, |\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}|) \frac{U_j - U_i}{2}, \quad (2.26)$$

где \mathbf{n}_{ij} – это единичная нормаль к грани ячейки.

Для увеличения порядка точности мы используем стандартный кусочно-линейный подход со вторым порядком точности (т.н. Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws (MUSCL) реконструкция, см., напр. [29; 95]) для физических (примитивных) переменных – плотности и компонент скорости на гранях ячеек. Для построения оператора градиента, для каждого направления рассчитываются градиенты на гранях, использующие кусочно-постоянные значения величин в ячейках. Например, градиент плотности в радиальном направлении на грани между ячейками с индексами i и j может быть записан как

$$(\nabla^\times \rho)_{ij,R} = \frac{\rho_j - \rho_i}{R_j - R_i}, \quad (2.27)$$

и аналогичные операторы используются в других направлениях. Отметим, что как и в параграфе выше, здесь в случае криволинейных геометрий также необходимо использовать объемно-взвешенные координаты для построения операторов, в отличие от Декартовой геометрии, в которой геометрический центр ячейки совпадает с объемно-взвешенным [84]. Для того, чтобы схема для адвекции была монотонной, необходимо ограничить наклоны градиентов в (2.27). Для каждой ячейки в каждом координатном направлении, мы используем ограничитель *minmod*. В случае подвижной сетки, используется его обобщение на произвольное число аргументов.

После явной части схемы, необходимо решить уравнение для нахождения давления P^{n+1} . Для этого необходимо использовать уравнение на энергию, записанное для ячейки i в следующей форме

$$\begin{aligned} V_i(\rho e_{th}(\rho, P))_i^{n+1} - \Delta t^2 \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} H_{ij}^{n+1} (\nabla^\times P)_{ij}^{n+1} = \\ V_i E_i^* - V_i \left(\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right)_i^{n+1} - \Delta t \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} H_{ij}^{n+1} (\rho \mathbf{v})_{ij}^*, \end{aligned} \quad (2.28)$$

которое имеет форму, аналогичную построенной в [92; 94]. В выражении выше, импульсы $(\rho \mathbf{v})^*$ и энтальпии H^{n+1} должны быть найдены на гранях ячеек. Для них, мы используем объемно-взвешенное среднее из двух соседствующих ячеек. Система (2.28) является достаточно сложной в силу высокой нелинейности. Чтобы найти численное решение данной системы, используется разновидность метода Ньютона (метод Пикара, g -итерации), что было предложено в работе [92]. В случае идеального газа (2.21) уравнение на давление имеет следующий

ВИД

$$\begin{aligned}
V_i \frac{P_i^{n+1,r+1}}{\gamma - 1} - \Delta t^2 \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} H_{ij}^{n+1,r} (\nabla \times P)_{ij}^{n+1,r+1} = \\
V_i E_i^* - V_i \left(\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right)_i^{n+1,r} - \Delta t \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} H_{ij}^{n+1,r} (\rho \mathbf{v})_{ij}^*,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

где градиенты давления рассчитаны согласно формуле (2.27). Верхний индекс r соответствует текущей итерации метода Пикара (Ньютона). Последнее уравнение представляет собой систему линейных уравнений с симметричной и знакоопределенной матрицей в случае положительной энтальпии H и уравнения состояния вещества с положительной производной $\left(\frac{\partial e_{th}}{\partial P}\right)_\rho$. Такая линейная система может быть легко решена итерационно. Нами используется метод сопряженных градиентов (СГ). Уравнение (2.29) решается до максимального числа итераций $r = r_{max}$, или пока условие сходимости не достигнуто. Сходимость метода Пикара является очень быстрой, и, как показывают расчеты, 2-3 итераций достаточно, чтобы получить корректное решение. В случае более нелинейного уравнения состояния и/или присутствия членов с потерями на нейтрино/излучение [42], система становится слабонелинейной [92; 94].

Во время итераций момент в ячейке $(\rho \mathbf{v})_i^{n+1,r+1}$ рассчитывается следующим образом [94]

$$(\rho \mathbf{v})_i^{n+1,r+1} = (\rho \mathbf{v})_i^* - \Delta t (\nabla \times P)_i^{n+1,r+1}, \tag{2.30}$$

где градиент давления считается объемно-взвешенной интерполяцией градиентов в гранях, используя выражение (2.27). В ходе расчетов обнаружено, что в случаях течений, близких к вращательному (или любому другому нетривиальному) равновесию, т.е. когда градиент давления и источники в правой части уравнения на импульс имеют близкие значения, оценка импульса (2.30) может приводить к нефизичным осцилляциям в полях плотности и скорости ввиду слишком низкой схемной вязкости в системе. В явных схемах, численной диссипации, связанной со звуковыми волнами, достаточно, чтобы они не возникали/гасились, однако в случае полуявной схемы, необходимо дополнить оценку импульса некоторой диссипативной процедурой, чтобы минимизировать численные осцилляции. Для этого, импульс рассчитывается как среднее значение в ячейку из граней по формуле, аналогичной (2.30), но для грани, используя (2.27). Данная процедура аналогична интерполяции между основной (primal)

и вспомогательной (dual) сетками из работы [92]. Наконец, энергия рассчитывается по формуле

$$E_i^{n+1} = E_i^* - \Delta t \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} H_{ij}^{n+1} (\rho \mathbf{v})_{ij}^{n+1}. \quad (2.31)$$

После расчета данная схема переходит к следующему шагу по времени.

Условие КФЛ для полунеявной схемы является более мягким по сравнению с явной схемой Годуновского типа, в которое входила скорость звука. На однородной сетке оно имеет следующую форму [92]:

$$\Delta t_{S-I} = C_{CFL} \min \left(\frac{\Delta R}{|v_R|}, \frac{\Delta z}{|v_z|}, \frac{R \Delta \varphi}{|v_\varphi|} \right). \quad (2.32)$$

Для сферической геометрии условие КФЛ дается выражением (2.8), но без вклада от скорости звука c_s . Для течений с низкими числами Маха условие (2.32) позволяет существенно уменьшить вычислительную стоимость расчета.

В случае, когда уравнения газовой динамики решаются в подвижной системе отсчета методом конечного объема, теорема Гаусса должна применяться к подвижному элементу, см. выражение (2.7). Для полунеявной схемы, адвективная часть потока рассчитывается абсолютно также, как и в Годуновских методах, а уравнение на полную энергию (2.31) изменяется следующим образом

$$(E)_i^{n+1} = (E)_i^* - \Delta t \sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij} \left(H_{ij}^{n+1} (\rho \mathbf{v})_{ij}^{n+1} - \mathbf{w}_{ij} (\rho e_{th})_{ij}^{n+1} \right), \quad (2.33)$$

т.е. вклад в поток на подвижной ячейке учтен явно для потока кинетической энергии, и неявно – для тепловой. Для использования описанной полунеявной схемы в подвижной системе отсчета, мы берем тепловую энергию $(\rho e_{th})_{ij}^{n+1}$ из уравнения (2.33) на предыдущей итерации Пикара (r -итерации). Значение тепловой энергии на грани снова рассчитывается интерполяцией из соседних ячеек. Таким образом, матрица для линеаризованной системы уравнений сохраняет свою простую форму. Расчеты показывают, что данный простой подход к учету подвижности сетки является устойчивым и эффективным.

Условие устойчивости КФЛ для вращающейся за веществом сетки имеет следующую форму:

$$\Delta t_{SI} = C_{CFL} \min \left(\frac{\Delta R}{|v_R|}, \frac{\Delta z}{|v_z|}, \frac{R \Delta \varphi}{|v_\varphi - w_\varphi|} \right). \quad (2.34)$$

При рассмотрении МГД-системы в данное условие к скорости газа необходимо добавить Альфвеновскую скорость $v_A = \frac{|B|}{4\pi\rho}$ [95].

После расчета газовых величин, необходимо сдвинуть все ячейки сетки согласно формуле (2.9).

2.1.5 Тестовые расчеты

В данном разделе мы не только тестируем явную и полунявную схемы, но и сравниваем их между собой в разных тестовых задачах с вращением и без него, а также при разных числах Маха. Если в тексте не указано иное, то для сравнения методов используется явная схема со вторым порядком точности и ограничителем наклона *minmod* вместе с вычислением потока по методу *HLLC* [132]. Потоки в азимутальном направлении рассчитываются в подвижной системе отсчета таким образом, как это описано, например, в работе [99]. Во всех тестах с полунявной схемой мы применяем $r_{max} = 2$ итераций Пикара.

Классическая задача Сода [136] – это стандартный бенчмарк для любого кода, моделирующего уравнения газовой динамики. В данном тесте решаются уравнения Эйлера в сферических координатах со следующими начальными условиями:

$$\begin{cases} \rho = 1, P = 1, \text{ если } r < 0.5 \\ \rho = 0.125, P = 0.1, \text{ если } r > 0.5 \\ \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Показатель адиабаты выбран $\gamma = 5/3$. Для цилиндрической геометрии применяются такие же условия в радиальном направлении. Рис.2.3 показывает распределение плотности в момент времени $T_{fin} = 0.2$ для сферической и цилиндрической геометрий с $N_r = 256$ ячеек в радиальном направлении. Для сравнения с полунявной схемой также приведено решение, полученное по схеме *HLLC* со вторым порядком точности и ограничителем наклона *minmod*. Решения находятся в хорошем согласии. Разрывы в подобных тестовых задачах разрешаются приблизительно на том же уровне, что и с помощью явных методов со вторым порядком и *minmod*-ограничителем (~ 4 ячейки на фронте ударной волны $\sim 7 - 8$ ячеек в области контактного разрыва).

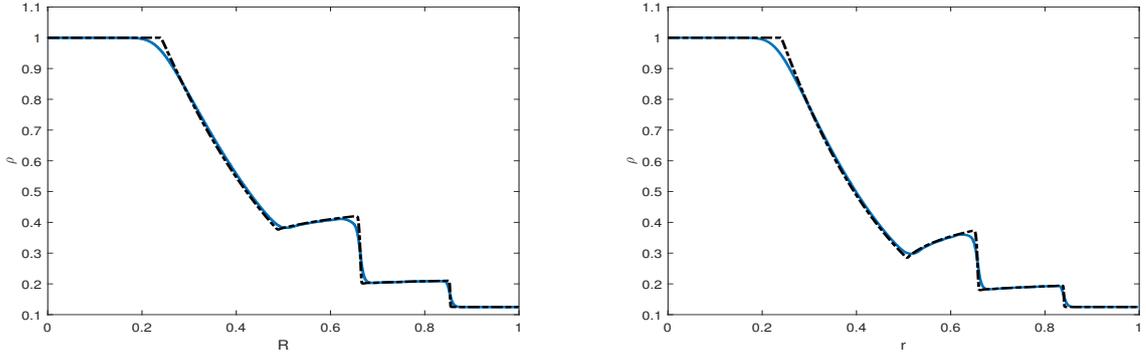


Рисунок 2.3 — Распределение плотности в тесте Сода (слева – цилиндрическая, справа – сферическая геометрия). Синие линии соответствуют полуявной схеме, черные линии соответствуют явной схеме со вторым порядком и удвоенным разрешением, которая считается за точное решение. Результаты можно сравнить с работами [93; 100].

Для того, чтобы протестировать схемы, мы рассмотрели также решение задачи Седова о сильном взрыве в сферической (3D) и цилиндрической (2D) геометриях [129]. Рассматривается область $R \subseteq [0, 0.2]$ в цилиндрических, и $r \subseteq [0, 0.3]$ – в сферических координатах с $N_r = 256$ равномерно распределенных ячеек. Для задания взрыва, мы задаем величину энергии $E = 1$ в первых пяти радиальных рядах ячеек. Начальные условия имеют следующий вид

$$\begin{cases} P = (\gamma - 1)/V_5, \text{ если } i_r \leq 5 \\ P = 0.001, \text{ если } i_r > 5, \\ \rho = 1, \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

где V_5 – это объем, занимаемый ячейками с радиальным индексом $i_r \leq 5$. Показатель адиабаты выбран $\gamma = 7/5$. На Рис.2.4 представлены решения при времени $T_{fin} = 0.02$ для явной и полуявной схем. Результаты находятся в согласии между собой, а также с аналитическим решением для положения ударной волны, которое может быть записано в виде $\zeta \sim t^{\frac{2}{2+n}}$, где n – размерность пространства. Отметим, что для этой задачи полуявная схема работает быстрее в силу наличия горячего разреженного газа с низким числом Маха во ”взорванной” области, что накладывает жесткое условие КФЛ на шаг по времени явной схемы.

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в цилиндрической геометрии может быть использована в качестве теста для течений с вращением при малых числах Маха, а также для проверки процедур построения сетки и корректного

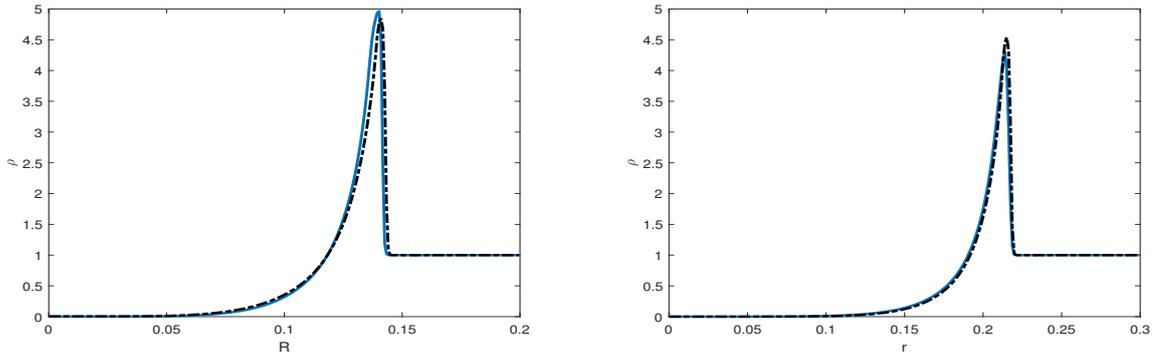


Рисунок 2.4 — Плотность в решении задачи Седова о сильном взрыве (левая часть - цилиндрическом, правая часть - сферическом). Синие и черные пунктирные линии отвечают решению по полуявной и явной схемам, соответственно.

ее вращения. Мы рассмотрели разные варианты данной задачи для методов со вторым порядком точности. Тестовая задача взята из работы [98]. Начальные условия имеют следующий вид

$$\begin{cases} \rho = 1, v_\varphi = 2R, P = P_0 + 2R^2, \text{ если } R < 1 \\ \rho = 2, v_\varphi = R, P = (P_0 + 1) + R^2, \text{ если } R > 1 \\ v_R = 0.1 \cos(6\varphi) e^{-80(R-1)^2}, \end{cases} \quad (2.37)$$

где постоянная P_0 характеризует течения с различными числами Маха. Разрешение сетки выбрано $N_R \times N_z \times N_\varphi^{max} = 128 \times 1 \times 512$ в области $R \subseteq [0, 2]$. На Рис.2.5 представлены решения, полученные явной и полуявной схемами при $P_0 = 5$ (число Маха $M \sim 0.7$ на внешней границе) с вращением сетки и без него. Хотя для полуявной схемы вихри разрешены с меньшей точностью, чем в случае явного метода, ввиду больших шагов по времени, решения находятся в хорошем качественном согласии.

На Рис.2.6 представлены результаты для подвижной сетки при $P_0 = 500$ ($M \sim 0.07$). Хорошо видно, что в обоих случаях полуявная схема позволяет уловить поведение жидкости корректно, в то время как явная схема на основе Годуновского метода не может разрешить вихри в неустойчивом относительно сдвиговых мод течении ввиду высокой численной вязкости. Для явной схемы могут помочь методы более высокого порядка (например, ограничитель MC или метод PPM), но при более низких числах Маха качество решения все равно будет ухудшаться [137]. Время расчета по полуявной схеме сравнимо

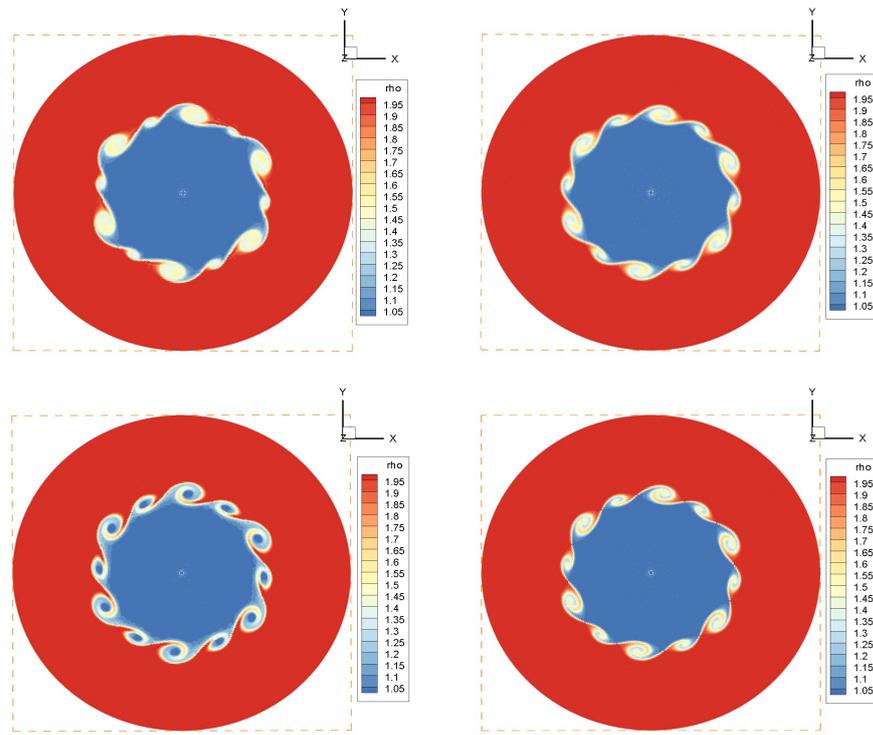


Рисунок 2.5 — Распределение плотности (левая часть – полуявная схема, правая часть – явная схема) для цилиндрической неустойчивости Кельвина-Гельмгольца при $P_0 = 5$. Верхние панели соответствуют неподвижной сетке, нижние панели отвечают сетке с вращением.

со временем для явной схемы при $P_0 = 5$, а при $P_0 = 500$ полуявная схема работает в 4 раза быстрее явной.

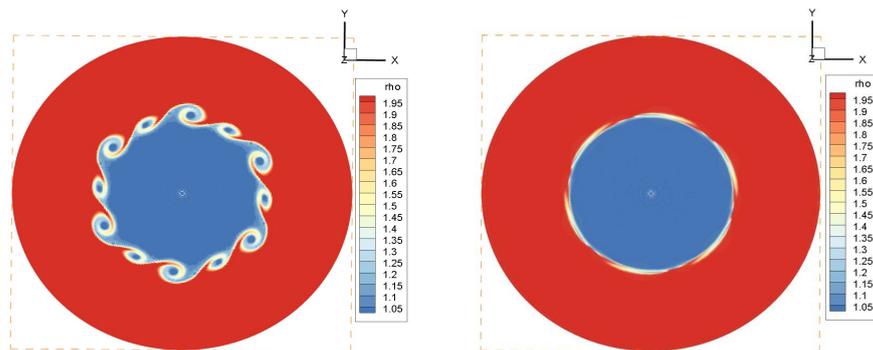


Рисунок 2.6 — Распределение плотности (левая часть – полуявная схема, правая часть – явная схема) для неустойчивости Кельвина-Гельмгольца с $P_0 = 500$.

Наконец, для явных схем были сравнены методы с пятым порядком $PPM5$ и со вторым порядком PLM на задаче о развитии неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в декартовой геометрии на сетках в 128 и 256 ячеек вдоль

каждого направления. Рассматривается квадратная область единичной стороны с $X, Y \subseteq [0, 1]$. Начальные условия задаются в виде

$$\begin{cases} \rho = 2, v_x = 0.5, \text{ при } |y - 0.5| < 0.25 \\ \rho = 1, v_x = -0.5, \text{ при } |y - 0.5| > 0.25 \\ v_y = 0.1 \sin(2\pi x) \left(e^{-(y-0.25)^2/0.05^2} + e^{-(y-0.75)^2/0.05^2} \right) \\ P = 2.5, \gamma = 7/5. \end{cases} \quad (2.38)$$

Результаты для распределения плотности при времени $T_{fin} = 2$ представлены на Рис.2.7. Данный тип течения быстро приводит к развитию вторичных сдвиговых неустойчивостей на крупномасштабных вихрях, которые могут достаточно быстро замазаться численной вязкостью метода. В то время как оба расчета воспроизводят характерную динамику неустойчивости, в случае сетки с $N = 128$ метод *PPM5* показывает структуру течения практически также подробно, как метод *PLM* на сетке с $N = 256$ ячеек. При этом, развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в этих двух расчетах также качественно совпадает на протяжении всего времени моделирования. Данный пример подтверждает экспериментальный факт, что методы с пятым порядком аппроксимации воспроизводят решение с точностью, близкой к *MUSCL*-методам со вторым порядком на сетке с двукратно увеличенным разрешением (см., напр., [138]).

2.2 Развитие на систему уравнений магнитной гидродинамики

Уравнения идеальной нерелятивистской МГД могут быть записаны в следующей форме

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} + P_{tot} \hat{\mathbf{I}}) &= 0, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + P_{tot}) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})) &= 0, \\ \partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В системе выше \mathbf{B} – это вектор магнитного поля, $P_{tot} = P + \frac{\mathbf{B}^2}{2}$ – полное давление, $E = \rho e_{th} + \frac{v^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2}$ – полная удельная энергия с учетом энергии

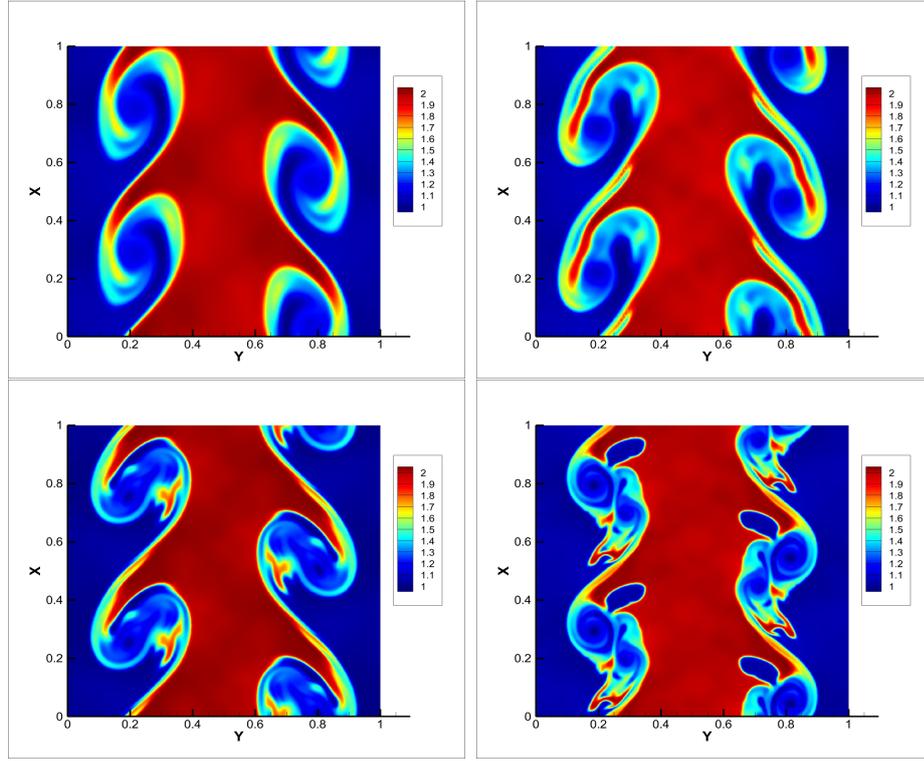


Рисунок 2.7 — Распределение плотности в тесте о неустойчивости Кельвина-Гельмгольца при $T_{fin} = 2$. На верхней панели представлено решение методами *PLM* (слева) и *PPM5* (справа) на сетке в 128×128 ячеек. На нижней панели представлено то же самое, но на сетке 256×256 . Расчет потока проводился по методу *HLLC*, а интегрирование по времени – по методу *RK3* в обоих случаях.

поля. Множитель $\frac{1}{4\pi}$ учтен в нормировке поля и не входит в систему уравнений (2.39). Для численного моделирования МГД системы также используется подход, основанный на методе конечного объема. Код разработан для решения уравнений в декартовой, сферической и цилиндрической геометриях. Для примера в данной главе рассмотрена численная дискретизация МГД уравнений в сферических координатах, которая может быть записана следующим образом внутри некоторой расчетной ячейки

$$U_t V + S_+^r \mathbf{F}_+^r - S_-^r \mathbf{F}_-^r + S_+^\theta \mathbf{F}_+^\theta - S_-^\theta \mathbf{F}_-^\theta + S_+^\varphi \mathbf{F}_+^\varphi - S_-^\varphi \mathbf{F}_-^\varphi = \mathbf{S}V, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho v_r, \rho v_\theta, \rho v_\varphi, E, B_r, B_\theta, B_\varphi)^T,$$

где \mathbf{S} – вектор источников членов, связанный с кривизной геометрии, а V и S_\pm – это объем ячейки и площадь грани, соответственно. Поток консерватив-

ных величин через грани ячеек \mathbf{F} имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\pm}^r &= (\rho v_r, \rho v_r^2 + P_{tot} - B_r^2, \rho v_{\theta} v_r - B_{\theta} B_r, \rho v_{\varphi} v_r - B_{\varphi} B_r, \\
(E + P_{tot})v_r - (v_r B_r + v_{\theta} B_{\theta} + v_{\varphi} B_{\varphi})B_r, 0, v_r B_{\theta} - v_{\theta} B_r, v_r B_{\varphi} - v_{\varphi} B_r)^T, \\
\mathbf{F}_{\pm}^{\theta} &= (\rho v_{\theta}, \rho v_{\theta} v_r - B_{\theta} B_r, \rho v_{\theta}^2 + P_{tot} - B_{\theta}^2, \rho v_{\theta} v_{\varphi} - B_{\theta} B_{\varphi}, \\
(E + P_{tot})v_{\theta} - (v_r B_r + v_{\theta} B_{\theta} + v_{\varphi} B_{\varphi})B_{\theta}, v_{\theta} B_r - v_r B_{\theta}, 0, v_{\theta} B_{\varphi} - v_{\varphi} B_{\theta})^T, \\
\mathbf{F}_{\pm}^{\varphi} &= (\rho v_{\varphi}, \rho v_r v_{\varphi} - B_r B_{\varphi}, \rho v_{\theta} v_{\varphi} - B_{\theta} B_{\varphi}, \rho v_{\varphi}^2 + P_{tot} - B_{\varphi}^2, \\
(E + P_{tot})v_{\varphi} - (v_r B_r + v_{\theta} B_{\theta} + v_{\varphi} B_{\varphi})B_{\varphi}, v_{\varphi} B_r - v_r B_{\varphi}, v_{\varphi} B_{\theta} - v_{\theta} B_{\varphi}, 0)^T,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

а источники \mathbf{S} могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = (0, \rho \frac{v_{\theta}^2 + v_{\varphi}^2}{r} + \frac{2P_{tot} - B_{\theta}^2 - B_{\varphi}^2}{r}, \frac{P_{tot} + \rho v_{\varphi}^2 - B_{\varphi}^2}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\rho v_r v_{\theta} - B_r B_{\theta}}{r}, \\
-\frac{\rho v_{\theta} v_{\varphi} - B_{\theta} B_{\varphi}}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\rho v_r v_{\varphi} - B_r B_{\varphi}}{r}, 0, 0, \\
\frac{B_{\theta} v_r - B_r v_{\theta}}{r}, \frac{v_r B_{\varphi} - v_{\varphi} B_r}{r} + \frac{v_{\theta} B_{\varphi} - v_{\varphi} B_{\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta)^T.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

В системе выше знаки $+$ и $-$ соответствуют внешней и внутренней границам расчетной ячейки. Здесь $V = \frac{(r_+^3 - r_-^3)}{3}(\cos \theta_- - \cos \theta_+)(\varphi_+ - \varphi_-)$ – объем ячейки, $S_{\pm}^r = r_{\pm}^2(\cos \theta_- - \cos \theta_+)(\varphi_+ - \varphi_-)$, $S_{\pm}^{\theta} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2} \sin \theta_{\pm}(\varphi_+ - \varphi_-)$, $S_{\pm}^{\varphi} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2}(\theta_+ - \theta_-)$ – площади граней ячейки. Радиус, синус и котангенс угла θ определены на сетке как $r = \frac{2(r_+^3 - r_-^3)}{3(r_+^2 - r_-^2)}$, $\sin \theta = \frac{\cos \theta_- - \cos \theta_+}{\theta_+ - \theta_-}$ и $\operatorname{ctg} \theta = \frac{\sin \theta_+ - \sin \theta_-}{\cos \theta_- - \cos \theta_+}$, соответственно. Для сетки переменной структуры при учете вращения потока по r и θ между всеми соседствующими ячейками суммируются с учетом пересечения площадей граней двух ячеек. В этом случае в площадях S_{\pm}^r и S_{\pm}^{θ} величина $(\varphi_+ - \varphi_-)$ должна трактоваться как угол перекрытия между двумя гранями, а изменение консервативной величины во времени определяется по формуле вида (2.12).

В случае использования явной схемы потока \mathbf{F} на границах ячеек в (2.40) необходимо считать с использованием решения задачи о распаде произвольного МГД-разрыва, как в случае газовой динамики. Однако, решение задачи Римана в МГД является очень сложным, и как правило, используются приближенные подходы, основанные на методе *HLL* [104] с наличием только сильных разрывов в МГД или линеаризованные решатели типа *Рou* [81]. Для явной схемы в нашем комплексе программ реализованы методы *HLL* и *HLLD*, учитывающие сильные разрывы в виде быстрых МГД ударных волн (*HLL*, 3 состояния

среды) и сильные разрывы для быстрых и Альфвеновских характеристик, а также контактные разрывы (HLLD, где "D" – discontinuities, 6 состояний среды). Для методов с квазилагранжевым уточнением решения версии методов HLL и HLLD могут быть найдены в статьях [133; 139]. Для уточнения решения по пространству в явной схеме реализованы кусочно-линейный метод *PLM* второго порядка точности и кусочно-параболические методы *PPM3* и *PPM5* с третьим и пятым порядками из работы [84], в которых кусочно-полиномиальные уточнения расчетных величин сделаны с учетом кривизны геометрии для минимизации численных артефактов вблизи сингулярностей. Для интегрирования системы (2.40) по времени используются явные методы Рунге-Кутты *RK2* и *RK3* (2.18) из работы [105] со вторым и третьим порядками точности, соответственно. Условие устойчивости схемы задается в этом случае выражением (2.8) с заменой скорости звука на быструю магнитозвуковую скорость.

Для интегрирования МГД-системы (2.39) полуняевным методом все члены с магнитным полем могут быть взяты полностью аналогично явному случаю, а градиент давления в уравнении на импульс и поток энтальпии в уравнении на полную энергию берутся неявно. Диссипация в потоке Русанова (2.25) заменяется на сумму модулей скорости потока через ячейку и Альфвеновской скорости. Это приводит к решению уравнения на давление такого же вида, что и (2.29), но с правой частью, зависящей от магнитного поля. Для уточнения решения может использоваться метод *PLM*.

Аппроксимация МГД уравнений (2.40) исключительно методами конечного объема не сохраняет дивергенцию магнитного поля, поскольку закон Фарадея предполагает сохранение магнитного потока через поверхность, ограниченную некоторым контуром (теорема Стокса), а не внутри ограниченного объема. Наличие магнитного заряда на сетке приводит к возникновению нефизической силы вдоль магнитного поля (по аналогии с силой, действующей на заряд вдоль электрического поля), которая не учитывается в уравнении на импульс в системах (2.39), (2.40). Ввиду этого, без процедуры очистки дивергенции (или без дополнительных процедур, реализующих бездивергентность поля на сетке) в моделируемой системе могут возникнуть численные ошибки и неустойчивости [140], связанные с накоплением магнитного заряда. Для минимизации численных ошибок, связанных с ненулевой дивергенцией магнитного поля, мы используем подход, основанный на методе обобщенного множителя Лагранжа из работы [103]. Модифицированная система для закона Фарадея имеет сле-

дующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{v}) + \nabla\psi &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\psi}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Здесь ψ - обобщенный множитель Лагранжа. Система (2.43) также дискретизируется при помощи метода конечного объема. В рамках такого подхода, дивергенция поля удовлетворяет телеграфному уравнению, распространяясь по области со скоростью c_h и затухая на масштабе времени τ . Скорость c_h равняется максимально допустимой сигнальной скорости в расчете и оценивается из условия КФЛ для МГД схемы. Параметр τ в (2.43) взят в форме $\tau = 0.1\Delta/c_h$, где Δ - локальный размер ячейки. Дополнительно, к источниковым членам в (2.40) могут быть добавлены члены с дивергенцией магнитного поля согласно восьми-волновому подходу [81; 141]. Также в коде реализована Галилеево-инвариантная версия схемы очистки дивергенции из работы [139] для учета возможности подвижности сетки.

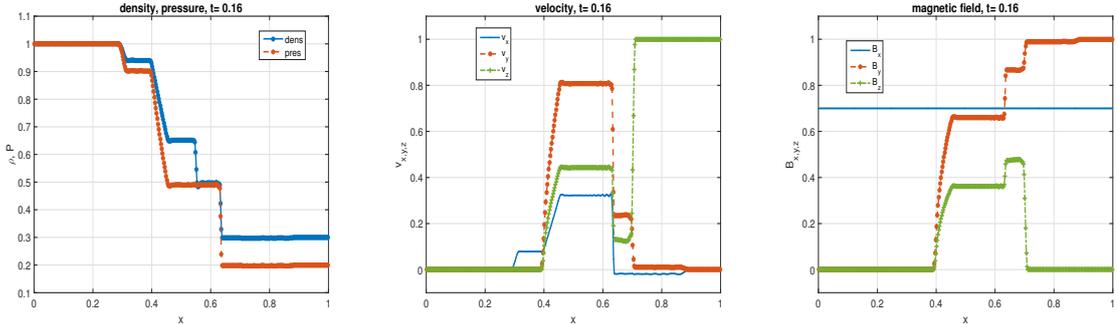


Рисунок 2.8 — Решение задачи о распаде МГД-разрыва 4d из работы [142]:

левая панель – плотность и давление, центральная панель – компоненты скорости, правая панель – компоненты магнитного поля. Используется уравнение состояния идеального газа с $\gamma = 5/3$. Финальное время расчета

$t = 0.16$. Начальные условия

$(\rho, v_x, v_y, v_z, P, B_x, B_y, B_z) = (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.7, 0.0, 0.0)$ для $x < 0.5$ и $(0.3, 0.0, 0.0, 1.0, 0.2, 0.7, 1.0, 0.0)$ для $x > 0.5$. Разрешение сетки $N_x = 400$ ячеек.

Результаты находятся в согласии с [142].

Для тестирования кода был проведен ряд тестов в сферической, цилиндрической и декартовой геометриях. В данном разделе представлены результаты расчетов по явной схеме с методом вычисления потоков *HLLD*, а также уточнением порядка по времени и пространству методами *RK3* и *PPM5*. На Рис.2.8

представлено решение задачи о распаде МГД-разрыва 4d из работы [142], в которой задействованы все компоненты скорости и магнитного поля. Сравнение результатов с цитируемой работой дает отличное согласие. На Рис.2.9 представлены расчеты вихря Орзага-Танга (правый график; см., напр., [104; 138]) в декартовой геометрии и сферического взрыва в замагниченной среде в сферической геометрии (левый график; см., напр., [85; 143]). Расчеты находятся в отличном качественном и количественном согласии с опубликованными результатами.

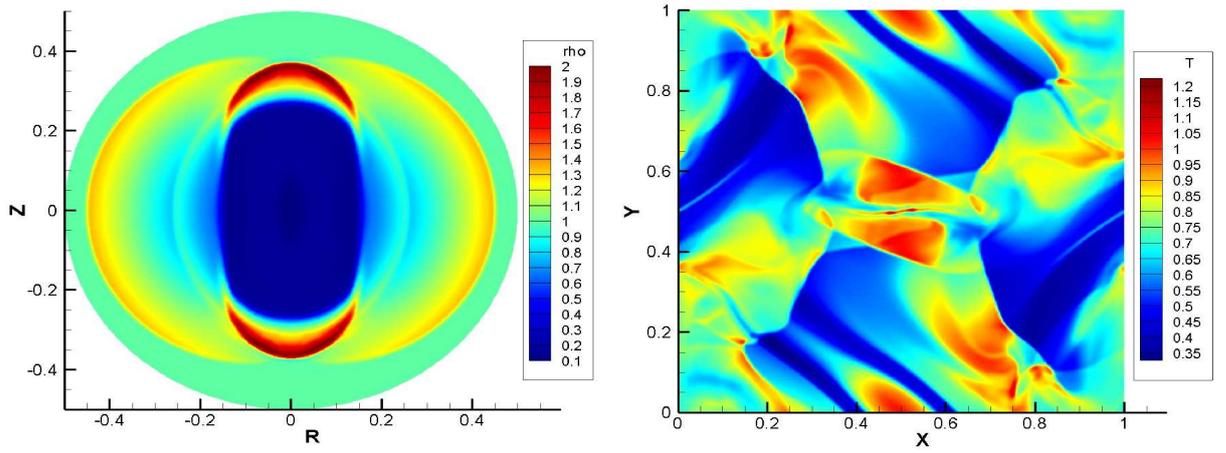


Рисунок 2.9 — Левый график: плотность в замагниченном сферическом взрыве на момент времени $T = 0.2$; Начальные условия:

$(r < 0.1 : P = 10, r > 0.1 : P = 0.1, \rho = 1, \mathbf{B} = 1 \cdot \mathbf{e}_z)$; разрешение сетки $N_r \times N_\theta = 128 \times 256$ (используется древесная сетка вблизи центра области).

Правый график: температура в течении Орзага-Танга на момент времени $T = 0.5$ на сетке 256×256 .

2.3 Учет самогравитации в расчетах

Для рассмотрения самогравитирующих течений, необходимо решать уравнение Пуассона для гравитационного потенциала Ψ в дополнение к уравнениям динамики среды на каждом шаге по времени. В сферической геометрии оно может быть записано следующим образом

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 4\pi G \rho, \quad (2.44)$$

где G – гравитационная постоянная. Для самогравитирующего газа, сила \mathbf{f} в уравнениях среды (2.20) равна $\mathbf{f} = -\nabla\Psi$. Нахождение гравитационного потенциала реализовано двумя способами. В первом подходе для дискретизации уравнения Пуассона (2.44) мы используем стандартный метод конечного объема, описанный выше в этой главе. Дискретизируется уравнение Пуассона в форме

$$\sum_{j=1}^{N_{face,i}} S_{ij}(\nabla_f\Psi)_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij} = 4\pi G\rho_i V_i, \quad (2.45)$$

где градиент потенциала, умноженный на нормаль к грани $(\nabla_f\Psi)_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}$ оценивается по формуле вида (2.14), в котором используются координаты, усредненные по объему ячейки [84; 134]. В результате получается система линейных уравнений с симметричной и знакоопределенной матрицей на функцию Ψ в ячейках, которая решается методом сопряженных градиентов. Чтобы учесть силу тяжести в гидродинамическом коде, используется стандартная центрированная по времени аппроксимация [144]. Данный подход универсален и позволяет получить точное решение дискретного аналога уравнения Пуассона, в разработанном комплексе программ он реализован для всех видов геометрии. Вторым подход основан на цитируемой работе [144], в котором рассмотрено разложение гравитационного потенциала по сферическим гармоникам для уравнения Пуассона в сферической геометрии. Как и в оригинальной работе, мы обрываем ряд по сферическим функциям на ”орбитальном” числе $L = 12$. Данный подход позволяет достаточно точно и вычислительно эффективно моделировать гравитационное поле в контексте коллапсирующих сверхновых, ввиду чего метод получил широкую популярность и реализован в большом количестве расчетных кодов для их моделирования (см., напр., [35; 47; 145]). Из минусов данного подхода можно назвать его неуниверсальность (только сферическая геометрия, медленная сходимость к точному решению с ростом L для сильно несферичных распределений плотности) а также то, что дискретный аналог уравнения (2.44) решается приближенно ввиду обрезания ряда по гармоникам на конечном L .

В качестве тестирования решателя для самогравитации мы рассмотрели классический пример о коллапсе газа без давления (пыли), рассмотренный впервые Колгейтом и Уайтом в качестве теста для гидродинамического кода [31]. Этот тест является традиционным для кодов, моделирующих самогравитирующие течения. При помощи явной схемы для газовой динамики со вторым

порядком точности и ограничителем наклона ”*Monotonized – Central*” решаются уравнения Эйлера совместно с уравнением Пуассона для начальных данных и нормировки обезразмеренных величин из работы [134], рассматривая область $r \subseteq [0, 1.2]$ с $N_r = 256$ логарифмически распределенных ячеек. Решение представлено на левой панели Рис.2.10 в финальный момент времени $T_{fin} = 0.065$ вместе с аналитическим профилем плотности. Решение уравнения Пуассона (2.44) методом конечного объема представлено на правой панели Рис.2.10, для метода разложения по сферическим функциям решение визуально неотлично. На развитой стадии течение находится в хорошем согласии с данными других авторов [84; 134].

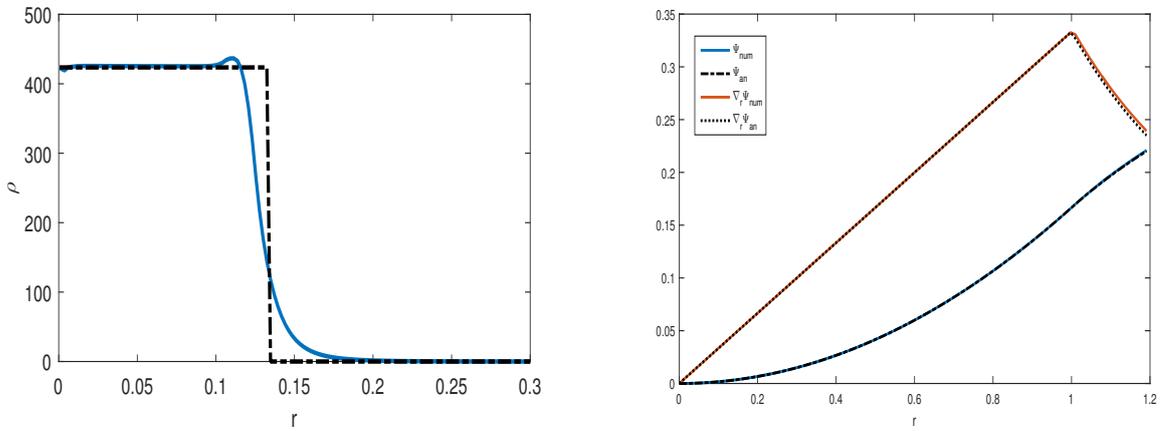


Рисунок 2.10 — Левая панель: Распределение плотности в момент времени $T_{fin} = 0.065$. Синяя сплошная линия отвечает численному решению, черная штрих-пунктирная – аналитическому. Конечная толщина профиля плотности связана с использованием ненулевого (малого) давления для газодинамической схемы. Правая панель: Численное решение для Ψ (синяя линия) и его радиальный градиент (красная линия) вместе с аналитическими решениями при $t = 0$.

2.4 Заключение к Главе 2

В данной главе изложены результаты построения численных схем для уравнений гравитационной газовой динамики и магнитной гидродинамики. Рассмотрены как явные схемы Годуновского типа высокого порядка точности, так

и более современные полунявные подходы. В рамках последних в уравнениях газовой динамики/МГД члены, отвечающие звуковым волнам, берутся с верхнего слоя по времени, что приводит к существенному смягчению условия Куранта-Фридрихса-Леви на допустимый шаг по времени в расчетах. Для обоих подходов рассмотрен квазилагранжевый подход к учету крупномасштабного вращения без перехода к неинерциальной системе отсчета. По изложенным схемам написаны комплексы программ для решения различных задач в контексте астрофизических и плазменных приложений.

По результатам данной главы были опубликованы следующие статьи:

1. Ilya A Kondratyev and Sergey G Moiseenko "A Semi-Implicit Numerical Method for Differentially Rotating Compressible Flows" Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 44, No. 1, pp. 44–55 (2023) DOI:10.1134/S1995080223010225
2. Kondratyev, I.A., Moiseenko, S.G. and Bisnovaty-Kogan, G.S. "Magnetorotational Supernova Explosions: Jets and Mirror Symmetry Violation", Lobachevskii Journal of Mathematics, 45, 1, 50–59 (2024) <https://doi.org/10.1134/S1995080224010268>

Глава 3. Численное моделирование магниторотационной сверхновой с нарушенной зеркальной симметрией магнитного поля

3.1 Магниторотационный механизм взрыва сверхновой и сценарии с нарушением зеркальной симметрии магнитного поля

В данной Главе приведены результаты исследования генерации скорости протонейтронной звезды (ПНЗ) в процессе экваториально несимметричного взрыва магнитноротационной (МР) сверхновой. МР-механизм взрыва коллапсирующих сверхновых, предложенный в работе [4] (см. также расчеты [146] в контексте выделения энергии вращения ядра в энергию радиального движения), предполагает наличие магнитного поля и вращения в ядре массивной звезды перед коллапсом. В рамках данного механизма, после стадии коллапса, в силу его неоднородности, формируется ПНЗ, вращающаяся дифференциально вместе с окружающей ее оболочкой. При наличии магнитного поля, в дифференциально вращающейся среде с вмороженным в нее полоидальным полем, подчиняющейся уравнениям идеальной МГД, возможен т.н. Ω -эффект, выраженный в усилении (накрутке) тороидального магнитного поля за счет энергии дифференциального вращения. Поле может усиливаться как регулярным образом (см. формулу (3.1) ниже), так и нерегулярно ввиду того, что градиент угловой скорости является отрицательным, что является необходимым условием для возникновения магнитовращательной неустойчивости (МВН; MRI - magnetorotational instability, см. [41; 53; 147]). Рост магнитного давления вблизи ПНЗ приводит к формированию волны сжатия, распространяющейся наружу по спадающему фону плотности, которая далее преобразуется в МГД ударную волну. В результате, при наличии также вмороженных в плазму полоидального и тороидального магнитных полей, выброшенное взрывной волной вещество посредством механизма "магнитной башни" [148] канализуется в струйные выбросы, распространяющиеся преимущественно вдоль оси вращения, генерируя таким образом взрыв в виде направленных замагниченных джетов.

Обычно в расчетах МР-сверхновых в ядре звезды предполагается наличие дипольного [5; 40; 43; 46; 47] или квадрупольного поля [41; 48] перед коллапсом, что в случае осевой симметрии приводит к формированию симметричного

по отношению к экватору взрыва в виде направленных джетов в северном и южном полушарии. Данные типы полей имеют т.н. *зеркальную симметрию* – подразумевается, что магнитные давления над экватором и под ним равны на протяжении эволюции системы. Данное ограничение является несколько искусственным, поскольку конфигурация магнитного поля звезд может быть очень сложной. Так, даже в магнитном поле Солнца имеется три крупномасштабных компоненты – дипольная, тороидальная и квадрупольная [149], приводящие к нарушению зеркальной симметрии поля. Таким образом, если в магнитном поле ядра массивной звезды нарушена зеркальная симметрия [68; 69; 150], то ввиду разных магнитных давлений МР-выбросы могут формироваться по-разному в разных полушариях.

В двумерном случае, нарушение зеркальной симметрии может быть трех видов, которые рассмотрены в данной Главе. Первый случай – это наличие в ядре звезды двух или более мультиполей с разными видами симметрии по отношению к экваториальной плоскости (четный + нечетный мультиполи в смысле разложения магнитного поля в ряд – напр., диполь + квадруполь, см., напр., [68]). Вторым вариантом – это наличие смещенного относительно центра звезды симметричного поля (см. работу [150], где сильное смещенное дипольное поле рассмотрено в ядре предсверхновой в контексте формирования быстро движущихся магнитаров). Хотя не вполне ясно, как магнитные поля со смещением порядка радиуса ядра могут возникать в массивных звездах, есть достаточно убедительные наблюдательные данные, что такие конфигурации существуют в компактных объектах (см. работу [151] по замагниченным белым карликам и, напр., [70] в контексте пульсаров). Наличие смещенного дипольного поля в НЗ также рассматривается как возможная причина того, что некоторые радиопульсары остаются активными за ”долиной смерти” [152].

Тороидальное поле, возникающее в результате накрутки силовых линий, может быть оценено как (см., напр., [41; 43])

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \sim B_p \frac{\partial \Omega}{\partial \log(r)}, \quad (3.1)$$

где B_φ , B_p – тороидальная и полоидальная компоненты поля, соответственно, а Ω – это угловая скорость. Для чисто дипольного или квадрупольного поля генерируемое тороидальное поле будет антисимметричным или симметричным, соответственно, по отношению к экваториальной плоскости. В этом случае магнитное давление будет одинаковым в обоих полушариях, и выбросы будут

симметричными. В случае дипольного поля накрученное поле будет иметь два экстремума над и под экватором, а для квадрупольного поля тороидальное поле будет иметь максимум на экваториальной плоскости. В случае асимметричного поля, заданного суммой компонент, тороидальное поле будет расти по-разному в разных полушариях, а следовательно, различные градиенты магнитного давления будут запускать взрыв сверхновой с разными интенсивностями выбросов по отношению к экватору. Такие же эффекты ожидаются для накрутки магнитного поля при наличии смещенного относительно центра звезды дипольного поля. Данные эффекты могут быть существенны, если дипольное и квадрупольное поля имеют сравнимые величины, либо же, для смещенного относительно центра звезды диполя, если смещение поля сравнимо с размерами коллапсирующего ядра.

Третий вариант генерации анизотропии взрыва – это наличие в ядре звезды нечетного (четного) полоидального магнитного поля и четного (нечетного) тороидального магнитного поля по отношению к экватору [69]. Суперпозиция дипольного и симметричного тороидального полей рассмотрена в данной работе. При наличии начального тороидального поля в предсверхновой, результирующее азимутальное поле будет суммой накрученного антисимметричного и сжатого симметричного полей

$$B_{\varphi} = B_{\varphi,wind}^{asym} + B_{\varphi,compr}^{sym}, \quad (3.2)$$

что также приводит к асимметрии магнитного давления относительно экваториальной плоскости.

Во время стадии коллапса, симметричная тороидальная компонента поля ввиду сохранения магнитного потока изменяется как $B_{\varphi}^{sym} \sim \rho r$ [38; 39]. Для характерных значений

$$\begin{aligned} \rho_{core} &= 10^9 \text{ г/см}^3, \quad \rho_{PNS} = 10^{14} \text{ г/см}^3, \\ r_{core} &= 1000 \text{ км}, \quad r_{PNS} = 10 \text{ км}, \quad B_{\varphi,core}^{sym} = 10^{13} \text{ Гс} \end{aligned} \quad (3.3)$$

можно получить ПНЗ с параметрами $B_{\varphi,PNS}^{sym} = B_{\varphi,core}^{sym} (\rho_{PNS} r_{PNS} / \rho_{core} r_{core}) = 10^{16}$ Гс. В расчетах МР-взрывов сверхновых характерные значения накрученного магнитного поля $B_{\varphi,PNS}^{asym}$ также равняются $\sim 10^{16}$ Гс. Таким образом, при параметрах (3.3) начальное поле $B_{\varphi,core}^{sym}$ может существенно влиять на асимметрию градиентов давления над и под экваториальной плоскостью, приводя тем самым и к асимметрии выбросов в форме джетов.

3.2 Начальные модели

В данной работе мы рассматриваем серии численных моделей МР-сверхновых с несимметричными магнитными полями. Во всех расчетах в качестве начальных используется модель предсверхновой $35OC$ для вращающейся замагниченной звезды с начальной массой в $35 M_{\odot}$ из работы [153]. Данная модель звезды достаточно часто используется в качестве начальных условий в исследованиях, посвященным МР-сверхновым (см., напр., двумерные расчеты [44; 47; 48; 154]). Радиус железного ядра звезды равен 2890 километров на момент начала коллапса, а его масса равна $M_{core} \approx 2.1 M_{\odot}$. В данной работе используется профиль вращения из одномерной модели эволюции [153], зависящий от сферического радиуса, отношение вращательной энергии к гравитационной $T/|W| \approx 0.14\%$.

В качестве конфигурации магнитного поля мы задаем три различных варианта – суперпозицию дипольного и квадрупольного полей [48], смещенное дипольное поле, а также суперпозицию дипольного поля и симметричного по отношению к экватору тороидального поля [5; 155]. Вектор-потенциалы данных конфигураций могут быть заданы в следующем виде

$$\begin{aligned} A_{\varphi}^{dip} &= r \frac{B_{0,dip}}{2} \frac{r_0^3}{(r^2 - 2r \cos \theta z_{off} + z_{off}^2)^{3/2} + r_0^3} \sin \theta, \\ A_{\varphi}^{quad} &= r \frac{B_{0,quad}}{2} \frac{r_0^4}{r^4 + r_0^4} \cos \theta \sin \theta, \\ A_r^{tor} &= r \frac{B_{0,tor}}{2} \frac{r_0^3}{r^3 + r_0^3} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вектор-потенциалы A_{φ}^{dip} и A_{φ}^{quad} задают полоидальное магнитное поле дипольного и квадрупольного типов, соответственно, а A_r^{tor} – задает тороидальное поле. Параметры $B_{0,*}$ (где символ $*$ соответствует $dip, quad, tor$) и r_0 позволяют регулировать величину поля и степень его локализации по ядру звезды. Внутри области $r \ll r_0$ (для параметра смещения $z_{off} = 0$) эти конфигурации полей близки к однородным с индукцией $B \sim B_0$, в то время как при $r \gg r_0$ они спадают с расстоянием как вакуумные конфигурации. Магнитное поле генерируется электрическими токами при $r \lesssim r_0$ с различными типами симметрии. Параметр z_{off} для потенциала диполя задает центр поля, смещенный относительно центра звезды на расстояние z_{off} вдоль оси вращения.

Таблица 7 — Модели с различными полями в ядре предсверхновой. Модели ” DQ ” соответствуют суперпозиции дипольного и квадрупольного полей; модели ” Do ” отвечают смещенному дипольному полю; модели ” DT ” соответствуют суперпозиции дипольного и симметричного тороидального полей. Детали см. в тексте.

модель	параметры	комментарий
$DQ - 1e10$	$B_{0,dip} = B_{0,quad} = 1 \cdot 10^{10}$ Гс	дип. + квад.
$DQ - 2e10$	$B_{0,dip} = B_{0,quad} = 2 \cdot 10^{10}$ Гс	дип. + квад.
$DQ - 5e10$	$B_{0,dip} = B_{0,quad} = 5 \cdot 10^{10}$ Гс	дип. + квад.
$DQ - 1e11$	$B_{0,dip} = B_{0,quad} = 1 \cdot 10^{11}$ Гс	дип. + квад.
$DQ - 3e11$	$B_{0,dip} = B_{0,quad} = 3 \cdot 10^{11}$ Гс	дип. + квад.
$DQ - 6e11$	$B_{0,dip} = B_{0,quad} = 6 \cdot 10^{11}$ Гс	дип. + квад.
$DQ - 1e12$	$B_{0,dip} = B_{0,quad} = 1 \cdot 10^{12}$ Гс	дип. + квад.
$Do - 3e10$	$B_{0,dip} = 3 \cdot 10^{10}$ Гс	смещ. дип., $z_0 = 1500$ км
$Do - 2e11$	$B_{0,dip} = 2 \cdot 10^{11}$ Гс	смещ. дип., $z_0 = 1500$ км
$Do - 1e12$	$B_{0,dip} = 1 \cdot 10^{12}$ Гс	смещ. дип., $z_0 = 1500$ км
$DT - 4e10$	$B_{0,dip} = 4 \cdot 10^{10}$ Гс	дип. + тор., $B_{0,tor} = 10^{13}$ Гс
$DT - 6e10$	$B_{0,dip} = 6 \cdot 10^{10}$ Гс	дип. + тор., $B_{0,tor} = 10^{13}$ Гс
$DT - 1e11$	$B_{0,dip} = 1 \cdot 10^{11}$ Гс	дип. + тор., $B_{0,tor} = 10^{13}$ Гс
$DT - 3e11$	$B_{0,dip} = 3 \cdot 10^{11}$ Гс	дип. + тор., $B_{0,tor} = 10^{13}$ Гс
$DT - 6e11$	$B_{0,dip} = 6 \cdot 10^{11}$ Гс	дип. + тор., $B_{0,tor} = 10^{13}$ Гс
$DT - 1e12$	$B_{0,dip} = 1 \cdot 10^{12}$ Гс	дип. + тор., $B_{0,tor} = 10^{13}$ Гс

В данной главе приведены результаты расчетов 16 несимметричных моделей, перечисленных в Таблице 7. В ней модели ” DQ ” отвечают композиции дипольного и квадрупольного полей одной величины. Параметр $r_0 = 2000$ км используется во всех ” DQ ”-моделях при $z_{off} = 0$. При наличии квадрупольного поля, мы также нормируем поля таким образом, чтобы энергии магнитного поля внутри радиуса r_0 была равной энергии чистого диполя с величиной поля $B_{0,dip}$. ” Do ” модели отвечают наличию смещенного магнитного диполя в ядре звезды. Для них мы полагаем $z_{off} = r_0 = 1500$ км, чтобы рассмотреть конфигурации с большим смещением относительно центра звезды. В DQ и Do моделях начальное магнитное поле локализовано, в основном, в северном полушарии, где оба мультиполя имеют одинаковое направление, а смещение диполя всегда

направлено на север. Модели "DT" имеют сильное симметричное тороидальное поле с индукцией $B_{0,tor} = 10^{13}$ Гс. Для них полагается $r_0 = 2000$ км и $z_{off} = 0$.

3.3 Используемые приближения для среды и учет слабых процессов

Для исследования процессов анизотропии в МР-взрывах моделируются нерелятивистские уравнения идеальной МГД для серий моделей, описанных в предыдущем разделе. В численном моделировании мы использовали двумерных аксиально симметричные ($\partial/\partial\varphi = 0$) уравнения в сферических координатах (r, θ, φ) с приближенными источниками для нейтринного охлаждения/нагрева и самогравитацией. Решаемая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\
& \partial_t(\rho v_r) + \nabla \cdot \left(\rho v_r \mathbf{v} - \frac{B_r \mathbf{B}}{4\pi} \right) + \frac{\partial P_{tot}}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} - \frac{B_\theta^2 + B_\varphi^2}{4\pi r} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\
& \partial_t(\rho v_\theta) + \nabla \cdot \left(\rho v_\theta \mathbf{v} - \frac{B_\theta \mathbf{B}}{4\pi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial P_{tot}}{\partial \theta} = \\
& \quad \rho \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta - v_r v_\theta}{r} + \frac{B_r B_\theta - B_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{4\pi r} - \frac{\rho}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\
& \partial_t(\rho v_\varphi) + \nabla \cdot \left(\rho v_\varphi \mathbf{v} - \frac{B_\varphi \mathbf{B}}{4\pi} \right) = \frac{B_\theta B_\varphi \operatorname{ctg} \theta - B_r B_\varphi}{4\pi r} - \rho \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r}, \\
& \partial_t E + \nabla \cdot \left((E + P_{tot}) \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{4\pi} \right) = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi + Q_\nu, \\
& \partial_t(\rho Y_e) + \nabla \cdot (\rho Y_e \mathbf{v}) = R_\nu, \\
& \partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \\
& \Delta \Psi = 4\pi G \rho.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

В этой системе выше решается дополнительное уравнение на долю неспаренных электронов на один нуклон (далее – доля электронов, electron fraction) $Y_e = \frac{n_e^- - n_e^+}{\sum_i A_i n_i + n_p + n_n}$, где $n_e^-, n_e^+, n_i, n_p, n_n$ – концентрации электронов, позитронов, ядер, протонов и нейтронов, соответственно, а A_i – массовое число ядер), R_ν – член, определяющий изменение Y_e за счёт слабых процессов, Q_ν – источни-

ковый член в уравнении энергии, определяющий охлаждение и нагрев среды за счет излучения и поглощения нейтрино.

Для всех моделей мы использовали уравнение состояния Shen [156] при плотностях $\rho > 10^8$ г/см³ с учетом различных ядер в равновесии, электронов, позитронов и чернотельного излучения. Данное уравнение состояния плотного вещества основано на минимизации свободной энергии барионного вещества при наличии взаимодействия между нуклонами, описываемого в приближении релятивистской теории среднего поля. В настоящий момент уравнение состояния [156] удовлетворяет всем наблюдательным и экспериментальным ограничениям на плотное вещество в плотностями порядка плотности атомного ядра. Для более низких плотностей мы использовали уравнение состояния с электронами, позитронами, идеальным Больцмановским газом барионов и чернотельным излучением с фиксированным составом, определяемым на граничной плотности $\rho = 10^8$ г/см³. Результирующая таблица была построена в работе [157] и находится в открытом доступе.

Самогравитация моделируется методом разложения по сферическим функциям, предложенном в работе [144] с поправкой на эффекты общей теории относительности из работы [145] для монопольного члена.

Для моделирования нейтринной физики во всех моделях используется схема нейтринных потерь/нагрева для электронных нейтрино и антинейтрино, следуя работе [157] без учета μ, τ -нейтрино и давления захваченных нейтрино. В цитируемой работе, на стадии коллапса до отскока ядра используется аппроксимационная формула для описания нейтронизации вещества, разработанная в работе [158], а после коллапса применяется модель на основе работ [159; 160], в которых рассматриваются отдельно оптически тонкая и толстая области, а затем между ними проводится гладкая интерполяция для получения источников членов R_ν и Q_ν в (3.5). В оптически тонкой области, откуда нейтрино могут свободно вылетать без взаимодействия с веществом, учитываются бета-захваты на нуклонах, а также тепловые процессы, в которых рождаются пары нейтрино-антинейтрино – распад плазмона и аннигиляция электрона и позитрона [160]. В оптически толстой области строится одномерная модель диффузии нейтрино [159], в которой в качестве источников непрозрачности учтены процессы рассеяния на нуклонах и тяжелых ядрах, а также поглощение нуклонами. Член R_ν учитывает изменение химического состава в слабых процессах, а Q_ν включает охлаждение [159] и нагрев вещества. Последний член важен после

отскока ядра и берется из работы [161] для реакций поглощения нейтрино/антинейтрино нуклонами в оптически тонком приближении. Данная схема учета нейтрино позволяет качественно (и частично - количественно) учесть все основные процессы в оболочке сверхновых – нейтронизацию вещества на стадии коллапса за счет урка-процессов, формирование оптически толстой области с захваченными нейтрино, возникновение конвективно неустойчивого слоя с отрицательным градиентом доли электронов за фронтом ударной волны отскока и формирование области с нейтринным нагревом за нейтриносферой.

Мы моделируем уравнения МГД, используя разработанный комплекс программ, описанный в Главе 2. Для всех моделей мы использовали явный конечно-объемный метод Годуновского типа с приближенным решением задачи о распаде разрыва по методу *HLLD* [104] в форме [162]. Для повышения порядка точности схемы использовался кусочно-параболический метод *PPM5* [84] с пятым порядком аппроксимации по пространству и метод *RK3* [105] с третьим порядком аппроксимации по времени. Для очистки дивергенции магнитного поля на сетке использовался метод обобщенного множителя Лагранжа из работы [103]. Сеточное разрешение для всех моделей составляет $N_r = 360$, $N_{\theta, max} = 128$ вдоль направлений r и θ , соответственно ($0 \leq r \leq 47.000$ км, $0 \leq \theta \leq \pi$). Радиальная сетка для $r \leq 14$ км равномерна с размером ячейки $\Delta r = 500$ м. Для $14 \text{ км} \leq r \leq 47.000$ км задана логарифмическая сетка с $\Delta r_i = r_{i-1} \frac{\pi}{N_{\theta}}$ (i – радиальный индекс ячейки). В направлении θ используется древесная сетка с начальным разрешением $N_{\theta, 1} = 2$ при $i = 1$, и до $r \approx 14$ км разрешение по углу возрастает до $N_{\theta, max} = 128$ так, чтобы сохранить отношение сторон расчетной ячейки порядка единицы. Таким образом можно ослабить ограничение КФЛ из-за сходимости размеров ячеек к центру координат, не прибегая к грубому одномерному подходу во внутренних областях нейтронной звезды при $r \lesssim 10$ км (см. Главу 2).

3.4 Результаты расчетов

Этап коллапса происходит в основном сферически-симметрично до поздних стадий, когда центробежная сила становится важной. Время отскока ядра (core bounce) почти не зависит от величины магнитного поля и его конфигура-

ции и составляет около 320 миллисекунд с момента начала коллапса. В целом все модели показывают обычную динамику для МР-сверхновых. После стадии коллапса и формирования ударной волны отскока тороидальное поле начинает усиливаться во всех слоях протонейтронной звезды (PNS) и окружающей среды. Формирование конвективно нестабильного слоя происходит [33] после отскока, в области, где градиент доли электронов $\frac{dY_e}{dr} < 0$. В этом слое, который формируется от внутренних 10 км до примерно 50 км, происходит конвективный эффект вытеснения магнитного потока (convective flux expulsion, см. [143; 163]), что приводит к ослаблению магнитного поля внутри конвективной зоны и его выталкиванию к границам конвективного слоя за время эволюции системы после отскока. Формирование такой магнитной структуры почти не зависит от начальной конфигурации поля перед коллапсом.

Магнитное поле в двумерной постановке, рассмотренной здесь, может расти после отскока за счет накрутки силовых линий (доминирующий процесс), влияния магнитовращательной неустойчивости, а также падения вещества с периферии ядра ввиду сохранения магнитного потока. При увеличении магнитного поля градиент магнитного давления приводит к МР-взрыву и формированию струйных выбросов. Время начала взрыва сильно зависит от значения начального полоидального магнитного поля. В моделях с самым высоким начальным полем $B_p \sim 10^{12}$ Гс, взрыв и формирование джетов начинается почти сразу, со временем взрыва $t_{expl} < 30$ мс. Для слабого полоидального поля перед коллапсом $B_p \sim 10^{10}$ Гс стадия взрыва начинается позже, и оболочка начинает расширяться при $t_{expl} \sim 400$ мс после отскока ядра. Протонейтронные звезды в расчетах формируются с достаточно большими массами порядка $\sim 2.2M_\odot$, основная их часть набирается в первые 400 мс после отскока ввиду оседания вещества внешней части ядра (см. также расчеты [47]).

Мы рассчитываем энергию МР-взрывов, используя следующую формулу:

$$E_{expl} = \int_{E+\rho\Psi>0} (E + \rho\Psi)dV, \quad (3.6)$$

где $E = \rho\frac{v^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + \rho e_{therm}$, и интегрирование выполняется по области, где вещество имеет локальную положительную энергию, включая гравитационную энергию связи. Значение скорости кика v_{kick} рассчитывается, предполагая сохранение импульса во время взрыва:

$$v_{kick} = -\frac{1}{M_{PNS}} \int_{E+\rho\Psi>0} \rho v_z dV = -\frac{p_{eject,z}}{M_{PNS}}. \quad (3.7)$$

Масса ПНЗ M_{PNS} рассчитывается как объемный интеграл по области, где плотность превышает 10^{11} г/см³; $p_{eject,z}$ — это компонента импульса выброшенного вещества вдоль оси z . Определение значения скорости кика в (3.7) аналогично работе [5]. Скорость, приобретаемая ПНЗ, значительно меньше скорости выбросов, приводящих ее в движение: скорость равна нескольким сотням км/с для ПНЗ относительно нескольких десятков тысяч км/с скорости джетов [62]. Поэтому движение ПНЗ в расчетах не учитывается и отсутствует на рисунках ниже. Магнитные силы, приводящие к МР-взрыву, концентрируются в окрестности ПНЗ, и система работает аналогично ”реактивному двигателю”, приводя к истечениям различной интенсивности относительно экваториальной плоскости. Благодаря сохранению импульса мы можем косвенно оценить скорость ПНЗ по выброшенному импульсу из обеих полушарий согласно уравнению (3.7).

Уровень асимметрии взрыва представлен величиной A_E следующим образом:

$$A_E = \frac{E_N - E_S}{E_N + E_S}, \quad (3.8)$$

где E_N и E_S — части энергии в выброшенном веществе из северного и южного полушарий, соответственно. Это значение находится в диапазоне $(-1,1)$. Положительные значения A_E соответствуют случаю, когда взрыв в северном направлении сильнее, в то время как отрицательные значения соответствуют более сильному взрыву в южном полушарии. Нулевое значение A_E определяет экваториально-симметричный взрыв. Знак скорости кика ПНЗ противоположен знаку A_E .

Кинетическая энергия кика ПНЗ очень мала по сравнению с энергией взрыва сверхновой. Так, например, $E_{kick} \simeq 6.75 \cdot 10^{47}$ эрг для массы НЗ $1.5M_{\odot}$ и $v_{kick} = 300$ км/с, тогда как энергия взрыва в расчетах составляет $E_{expl} \sim 10^{51}$ эрг. В этом случае необходимо убедиться, что анизотропия, связанная с численными ошибками, достаточно мала и не вызывает искусственной асимметрии взрыва. Для этого мы смоделировали МР-взрыв с симметричным магнитным полем. Мы рассмотрели модель с чисто дипольным полем, с параметрами $B_0 = 10^{12}$ Гс, $r_0 = 2000$ км и $z_{off} = 0$ в (3.4), которая далее обозначается как ”D0 — 1e12”. Энергия взрыва в этой модели составляет $E_{expl} \simeq 1.11 \cdot 10^{51}$ эрг, а скорость ПНЗ $v_{kick} \simeq 6.46$ км/с через 661 мс после отскока ядра. Следовательно, уровень численной анизотропии достаточно низок, чтобы можно было делать прогнозы относительно асимметрии выброса в расчетах.

3.4.1 Суперпозиция дипольного и квадрупольного магнитных полей

Энергии взрывов, скорости ПНЗ и значения анизотропии взрыва, полученные для суперпозиции дипольных и квадрупольных полей, представлены в Таблице 8. На Рис. 3.1 показана зависимость энергий взрывов и скоростей кика ПНЗ от времени после отскока для моделей DQ из Таблицы 7.

Таблица 8 — Результаты моделирования для моделей с суперпозицией дипольных и квадрупольных полей. Показаны энергии взрывов, скорости кика ПНЗ и значения анизотропии A_E . Финальные времена после отскока для всех моделей указаны в последнем столбце в миллисекундах.

модель	$E_{expl}, 10^{51}$ эрг	$v_{kick},$ км/с	A_E	$t_{p.b.}^f,$ мс
$DQ - 1e10$	0.715	-465.5	0.793	1300
$DQ - 2e10$	0.814	-476.7	0.696	1300
$DQ - 5e10$	0.802	-451.6	0.665	1300
$DQ - 1e11$	0.731	-311.1	0.532	1300
$DQ - 3e11$	0.621	-133.2	0.206	1176
$DQ - 6e11$	0.770	-31.45	-0.026	1065
$DQ - 1e12$	1.151	181.0	-0.277	843

Во всех моделях DQ джеты формируются сначала в северном полушарии, где суммируются мультипольные компоненты. Однако в случаях сильных магнитных полей в моделях с $B_0 = 6 \cdot 10^{11}$ и 10^{12} Гс морфология взрывной волны развивается иначе, чем в моделях с меньшими значениями B_0 .

На Рис.3.1 (левая часть) мы видим, что энергия взрыва плавно возрастает для больших полей при $B_0 \gtrsim 6 \cdot 10^{11}$ Гс. Для меньших значений B_0 эта зависимость становится хаотичной и концентрируется вокруг предельной кривой, которая кажется независимой от B_0 . Такое поведение может быть связано с усилением магнитного поля под действием определенного типа магнитовращательной неустойчивости [52; 164] (неустойчивости типа Тайлера, т.е. с доминированием тороидального магнитного поля), наблюдаемой в более ранних расчетах [41; 42], вместе с падением замагниченного вещества после отскока ядра. Эта неустойчивость развивается при меньших B_0 и характеризуется

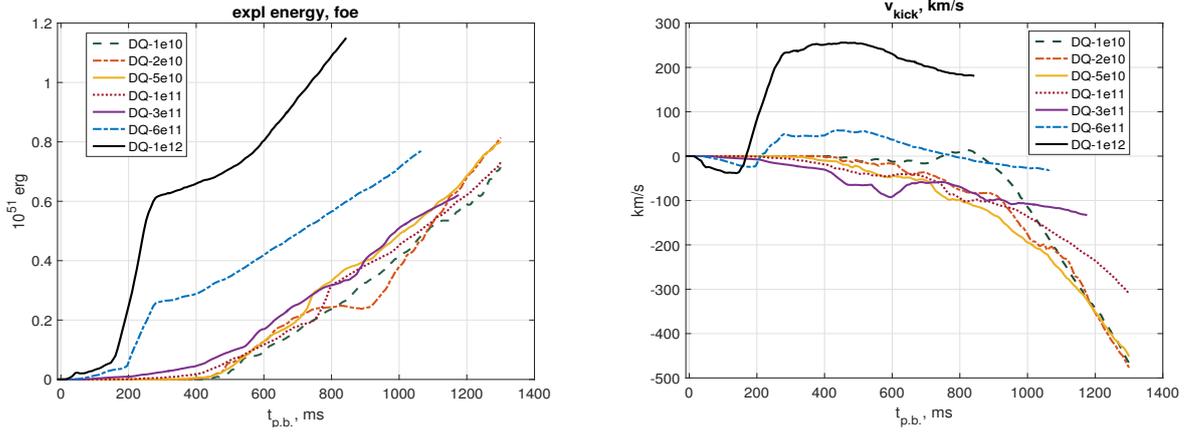


Рисунок 3.1 — Интегральные характеристики для конфигураций с дипольным и квадрупольным магнитными полями в зависимости от времени после отскока: левая панель — энергия взрыва, правая панель — скорость кика ПНЗ.

быстрым ростом хаотического магнитного поля, которое в конечном итоге превышает B_0 . Чтобы проиллюстрировать рост поля для случаев параметра B_0 от слабого до среднего (модели от $DQ - 1e10$ до $DQ - 3e11$), на Рис. 3.2 представлена эволюция полоидальной магнитной энергии в ПНЗ для северного и южного полушарий для модели DQ с $B_0 = 5 \cdot 10^{10}$ Гс.

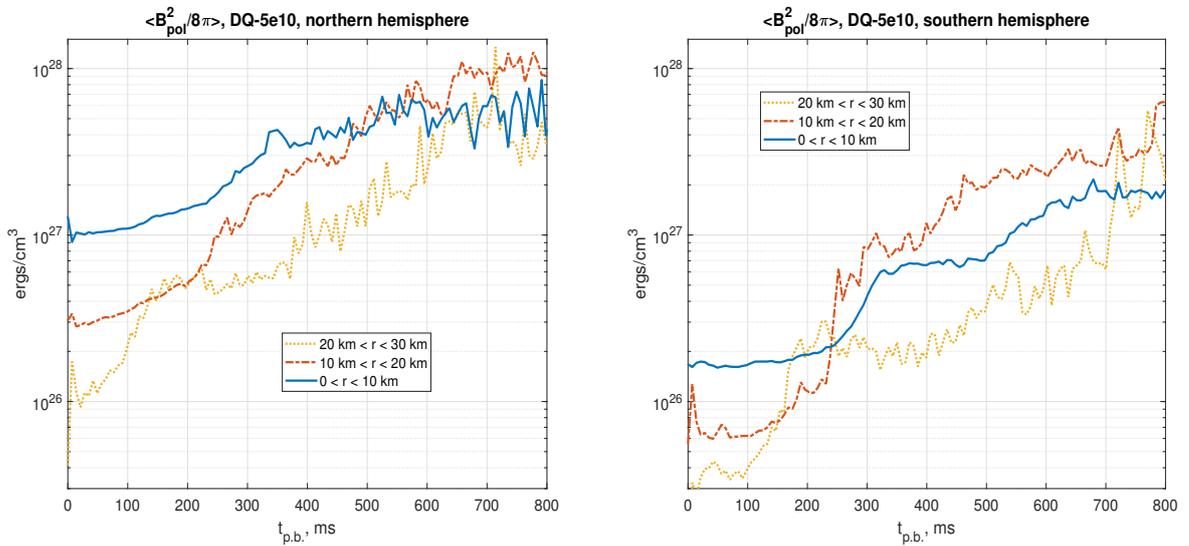


Рисунок 3.2 — Усредненная плотность полоидальной магнитной энергии в областях $0 < r < 10$ км (синие линии), $10 \text{ км} < r < 20$ км (красные штрих-пунктирные линии) и $20 \text{ км} < r < 30$ км (желтые штриховые линии) внутри ПНЗ как функция времени после отскока в модели $DQ - 5e10$. Левая панель — северное полушарие, правая панель — южное полушарие.

В первые 200 – 250 мс после отскока ядра полоидальное поле плавно нарастает в областях с $r < 30$ км в обоих полушариях за счет падения на-

магнитного вещества из внешних частей ядра. Через 250 мс поле быстро усиливается в области $10 \text{ км} < r < 20 \text{ км}$ от центра звезды (см. красные кривые на рис. 3.2). Тороидальная составляющая становится доминирующей в структуре поля вскоре после отскока, и более вероятно, что полоидальное поле растет с $t_{p.b.} \gtrsim 250 \text{ мс}$ в обоих полушариях из-за неустойчивости типа Тайлера. Эту неустойчивость хорошо видно по экспоненциальному росту полоидального поля в южном полушарии (правая часть Рис.3.2). Результирующее северное полоидальное поле остается более сильным, чем южное, во всех моделях поля от низкого до среднего ($B_0 < 6 \cdot 10^{11} \text{ Гс}$). В результате накрученное тороидальное поле обеспечивает более сильный градиент магнитного давления на севере. Это приводит к более сильному северному выбросу и отрицательной скорости ПНЗ (см. рис. 3.1). Усиление поля в моделях со слабыми и средними магнитными полями насыщается и начинает эффективно производить энергию МР-взрывов при $t_{p.b.} \sim 500 \text{ мс}$.

В моделях $DQ - 6e11$ и $DQ - 1e12$ направление скорости ПНЗ меняется для наибольших магнитных полей. Для модели с $B_0 = 10^{12} \text{ Гс}$ усиление поля во времени показано на Рис. 3.3. В этом случае рост северного тороидального поля, создаваемого накруткой, сильно влияет на угловую скорость, уменьшая ее. Северный выброс запускается в $\sim 20 \text{ мс}$ после отскока из-за высокого градиента магнитного давления в области максимального градиента угловой скорости на расстоянии $\sim 10 \text{ км}$ от центра звезды. В соответствующем южном регионе полоидальное поле быстро растет в течение первых 70 мс после отскока, что приводит к последующему росту тороидального поля за счет накручивания (см. правую панель рис. 3.3). Рост магнитного поля в пределах $r \lesssim 20 \text{ км}$ приводит к запуску южного джета к $\sim 80 \text{ мс}$ после отскока ядра, который становится более интенсивным, чем северный. Согласно Рис. 3.1 (черные сплошные линии), при $t \gtrsim 200 \text{ мс}$ мы наблюдаем более сильный южный выброс и положительную скорость кика ПНЗ. Экспоненциальный рост магнитного поля под действием доминирующего тороидального поля в дифференциально вращающейся области изучался Х.Спруитом [164]. Экспоненциальная функция показана на правой панели Рис. 3.3, чтобы проиллюстрировать быстрый рост поля.

На Рис.3.4 показана временная эволюция распределения энтропии для начального магнитного поля $B_0 = 3 \cdot 10^{11} \text{ Гс}$. В этом случае МР-механизм начинает запускать струйные выбросы примерно через $\sim 80 \text{ мс}$ после отскока ядра. Возникающий северный джет в результате остается сильнее. На правой пане-

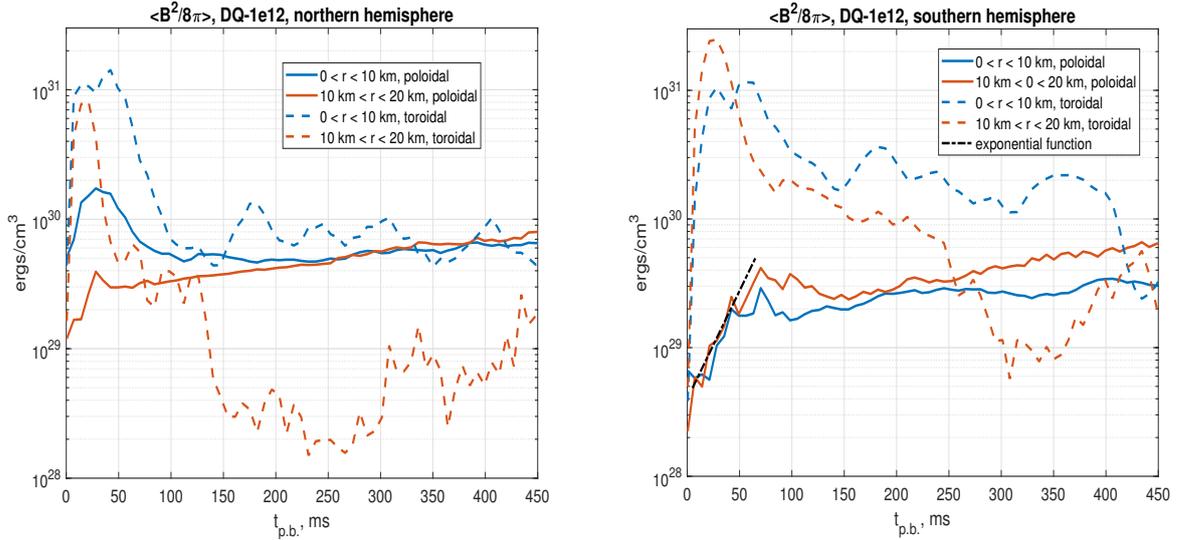


Рисунок 3.3 — Усредненная плотность полоидальной (сплошные линии) и тороидальной (пунктирные линии) магнитных энергий в областях $0 < r < 10$ км (синие линии) и $10 \text{ км} < r < 20$ км (красные линии) внутри ПНЗ как функция времени после отскока в модели $DQ - 1e12$. Левая панель – северное полушарие, правая панель – южное полушарие. Экспоненциальная функция (черная штрих-пунктирная линия) изображена на правой панели для иллюстрации быстрого роста полоидального поля в южном полушарии.

ли энтропия южного джета больше из-за его меньшей плотности. Все модели демонстрируют струйные структуры с высокой энтропией и умеренной коллимацией для слабого магнитного поля. Коллимация струи растет с увеличением B_0 . При $B = 10^{12}$ Гс мы наблюдаем более энергичный южный джет, в отличие от случаев с меньшими магнитными полями.

Логарифм абсолютного значения полоидального поля в окрестности ПНЗ в модели $DQ - 3e11$ представлен на Рис. 3.5 для различных времен после отскока. Сразу после коллапса видна асимметричная структура полоидального поля (Рис. 3.5, левая панель) с более сильным полем над экватором, наследованным от конфигурации поля до коллапса. В более поздние моменты времени хаотические движения жидкости в области радиусом ~ 50 км, связанные с возможным развитием МВН вместе с конвективными движениями, искажают полоидальное поле. В областях 2 линии поля более сложны из-за более выраженного начала хаотического движения. В конечном итоге поле остается сильнее в северном направлении, приводя к более сильному северному выбросу с отрицательной скоростью кика.

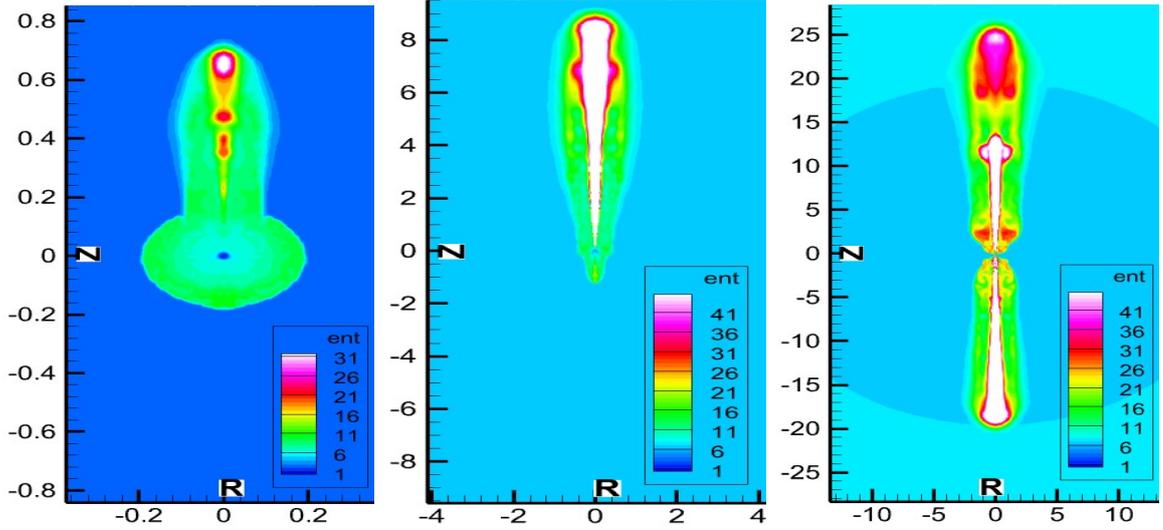


Рисунок 3.4 — Удельная энтропия (в единицах k_B/m_u) для модели $DQ - 3e11$ в разные моменты времени: левая панель — $t_{p.b.} = 84$ мс, центральная панель — $t_{p.b.} = 350$ мс, правая панель — $t_{p.b.} = 896$ мс. Масштаб пространственных осей указан в единицах 1000 км.

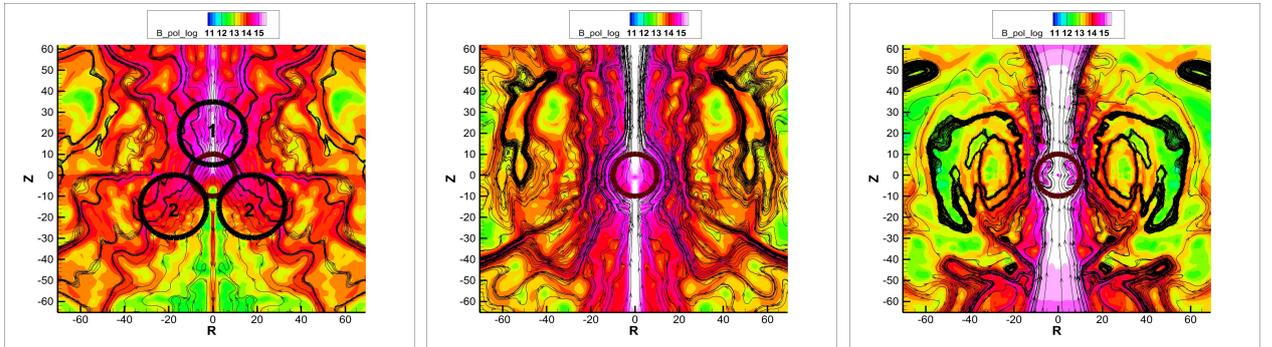


Рисунок 3.5 — Логарифм абсолютного значения полоидального магнитного поля (Гс) в окрестности ПНЗ для модели $DQ - 3e11$ с $B_0 = 3 \cdot 10^{11}$ Гс в разные моменты времени после отскока: левая панель: $t_{p.b.} = 14$ мс, центральная панель: $t_{p.b.} = 350$ мс, правая панель: $t_{p.b.} = 896$ мс. Черные кривые показывают линии полоидального поля. Круг в центре обозначает радиус 10 км. Расстояние от центра звезды в цилиндрических координатах указано на осях в километрах. На левой панели дипольная и квадрупольная части магнитного поля суммируются вблизи северного полюса в области 1. В областях 2 линии поля более сложны из-за более выраженного начала хаотического движения.

В результате анализа DQ -моделей установлена следующая динамика моделируемых МР-взрывов. Для начальных магнитных полей от низких до средних усиление поля развивается в обоих полушариях, и значения результирующих полей следуют значениям начальных полей. Поэтому градиент магнитного давления на севере остается более сильным, а формирующиеся джеты также сильнее в северном направлении. При больших значениях B_0 полюидальное поле не усиливается выше экватора, а быстрый рост поля выражен ниже экваториальной плоскости, что приводит к более сильному истечению оттуда. Такое изменение асимметрии выбросов и сопутствующих им скоростей ПНЗ в зависимости от величины начального магнитного поля хорошо видны на Таблице 8.

3.4.2 Смещенное дипольное магнитное поле

Случай смещенного диполя в ядре звезды перед коллапсом качественно близок к случаю с суперпозицией дипольного и квадрупольного полей, и три рассчитанных модели в этом подразделе показывают схожую динамику. Этот факт ожидаем, поскольку смещенную конфигурацию можно разложить в ряд по мультиполям с большим вкладом от мультиполей старших порядков при увеличении параметра смещения z_{off} . Как и в моделях DQ , мы получаем дже-тообразные взрывы с разной интенсивностью в южном и северном полушариях.

Таблица 9 — Результаты расчетов для моделей со смещенным на север дипольным магнитным полем. Показаны энергии взрыва, скорости кика ПНЗ и параметр анизотропии A_E . В последнем столбце приведены финальные времена после отскока.

модель	$E_{expl}, 10^{51}$ эрг	$v_{kick},$ км/с	A_E	$t_{p.b.}^f,$ мс
$Do - 3e10$	0.599	-337.9	0.683	1300
$Do - 2e11$	0.457	-124.5	0.332	1188
$Do - 1e12$	1.007	115.5	-0.151	1073

Во всех моделях джет появляется раньше в той части, где значение магнитного поля было больше в момент начала коллапса (северное полушарие).

Энергии, скорости кика и значения анизотропии взрыва для моделей Do представлены в Таблице 9. На Рис. 3.6 показаны зависимости энергий и скоростей кика ПНЗ от времени после отскока. Для моделей Do мы получили, что направление кика меняется с изменением значения исходного поля B_0 . Поэтому возникающая струя сильнее из полушария с более сильной начальной магнитной энергией при меньших значениях B_0 и меняет свое направление при наибольшем B_0 , как в моделях DQ .

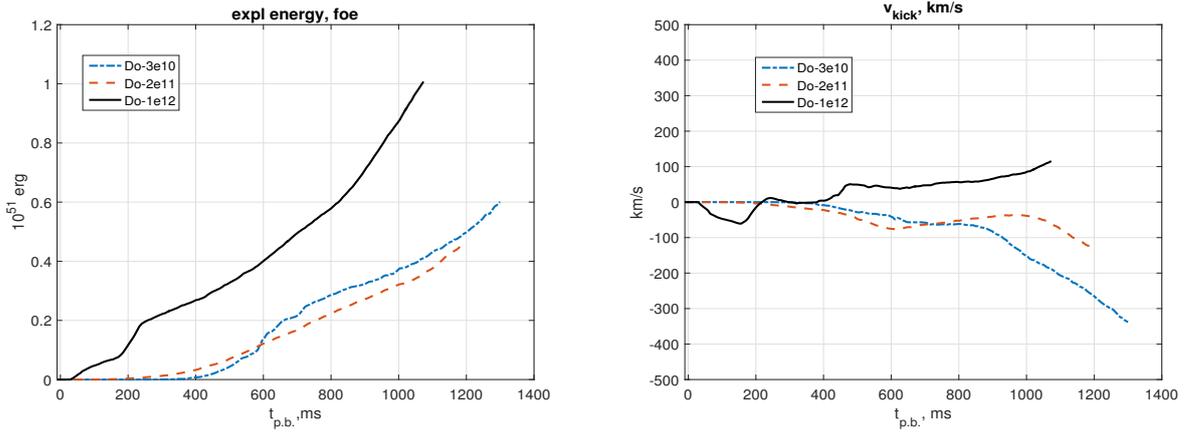


Рисунок 3.6 — Интегральные характеристики для конфигураций со смещенными дипольными магнитными полями как функции времени после отскока: левая панель показывает энергию взрыва, правая панель показывает скорость ПНЗ.

Параметр r_0 в (3.4), характеризующий локализацию поля, был взят меньшим в моделях Do , чем в соответствующих моделях DQ . В результате мы начинаем с меньшим количеством магнитной энергии до коллапса, и в результате взрывы слабее в моделях Do при том же B_0 , чем в DQ моделях. Из сравнения Таблиц 8 и 9 видно, что скорости кика в моделях Do ниже при слабых B_0 , чем для DQ . При слабых полях асимметрия магнитного поля приводит к формированию более энергичного северного джета. При наибольшем рассчитанном $B_0 = 10^{12}$ Гс южный джет становится сильнее, как и в моделях DQ , что следует из сравнения Рис. 3.1 и 3.6

Генерация кика для сильно замагниченной ПНЗ была исследована в работе [150] для начального дипольного поля B_0 порядка $5 \cdot 10^{13}$ Гс. Формирование импульса ПНЗ было связано со смещенным положением диполя. Во всех вариантах более сильный джет имел направление вдоль смещения поля, т.е. в полушарии с большей магнитной энергией. Этот результат отличается от наших расчетов, см. Рис.3.6 и Таб.9. Различие может быть связано с очень

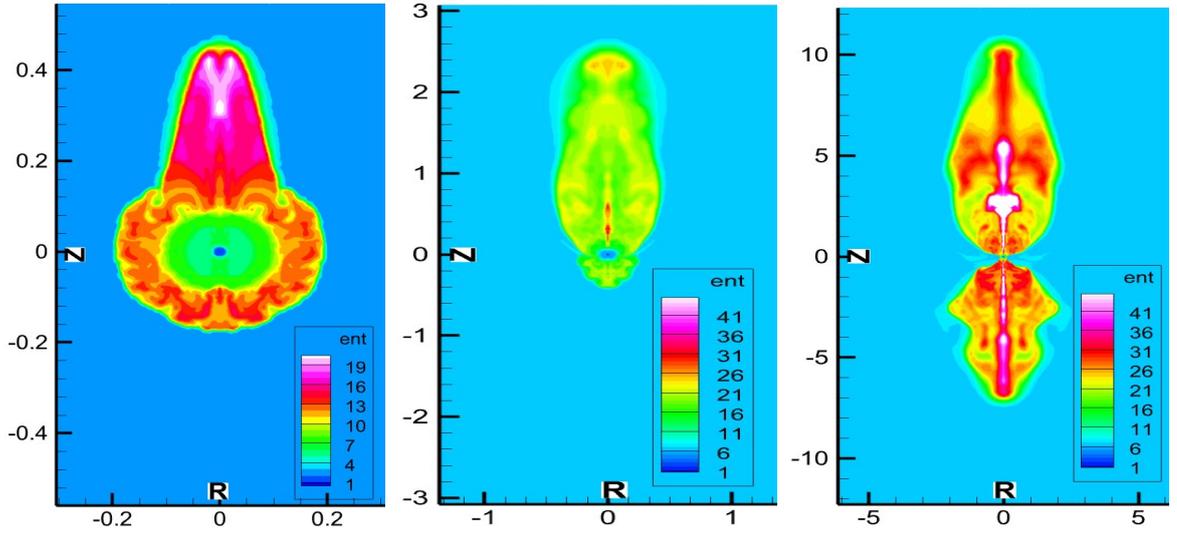


Рисунок 3.7 — Удельная энтропия (в единицах k_B/m_u) для модели $Do = 3e10$ в разные моменты времени: левая панель — $t_{p.b.} = 233$ мс, центральная панель — $t_{p.b.} = 401$ мс, правая панель — $t_{p.b.} = 800$ мс. Масштаб пространственных осей приведен в единицах 1000 км.

сильным начальным магнитным полем в работе [150]. Оно могло подавить все МГД-неустойчивости, развивающиеся в наших расчетах, что изменило направление импульса. В наших расчетах с более слабыми полями неустойчивости развиваются в обоих полушариях, приводя к более сильному джету в северном направлении, т.е. в области с большим полем. В нашем случае сильного поля $Do = 1e12$ неустойчивость не успевает развиваться в северном полушарии с большим полем, но развивается в противоположном полушарии, усиливая там магнитное поле и приводя к возникновению более сильного джета в противоположном направлении. Таким образом, результирующий джет сильнее из полушария с большей начальной магнитной энергией для меньших значений B_0 и меняет направление для больших B_0 .

3.4.3 Суперпозиция дипольного и симметричного тороидального магнитных полей

Случай начальной суперпозиции дипольного поля и сильной тороидальной компоненты перед коллапсом развивается иначе, чем первые два варианта. Асимметрия здесь не задается с самого начала, а появляется в дифферен-

циально вращающейся звезде из-за начальной разницы в типах симметрии полоидального и тороидального полей [69]. Нарушение зеркальной симметрии после начала коллапса в присутствии дифференциального вращения заключается в более быстром увеличении тороидального поля в одном (южном) полушарии и более медленном в другом (северном).

Во всех моделях DT величина начального тороидального поля была $B_{0,tor} = 10^{13}$ Гс в формуле (3.4).

Таблица 10 — Результаты расчетов для моделей с суперпозицией дипольного и тороидального полей. Показаны энергии взрыва, скорости кика ПНЗ и значения анизотропии A_E . Финальные моменты времени после отскока указаны в последнем столбце.

модель	$E_{expl}, 10^{51}$ эрг	$v_{kick}, \text{ км/с}$	A_E	$t_{p.b.}^f, \text{ мс}$
$DT - 4e10$	0.559	-256.5	0.528	1300
$DT - 6e10$	0.532	-279.1	0.577	1200
$DT - 1e11$	0.521	-212.4	0.448	1052
$DT - 3e11$	0.682	-56.21	0.040	1038
$DT - 6e11$	1.351	-14.10	-0.014	1024
$DT - 1e12$	2.269	10.57	-0.035	1015

Энергии, величины кика ПНЗ и значения анизотропии взрыва представлены в Таблице 10. На рис. 3.8 показана зависимость энергий и скоростей кика от времени после отскока. Модели можно разделить на две группы. Первая группа моделей с начальными дипольными полями $4e10$, $6e10$, $1e11$ Гс в Таблице 10 показывают схожие свойства взрыва с промежуточными значениями асимметрии и скоростей кика, направленными на юг. Во второй группе моделей с высокими магнитными полями $3e11$, $6e11$, $1e12$ Гс получено уменьшение асимметрии взрывных волн и исчезновение скорости кика. В последних моделях $DT - 6e11$ и $DT - 1e12$ с наибольшим полем скорость ПНЗ находится в пределах погрешности численной точности, и их можно рассматривать как симметричные взрывы без кика.

Модели из первой группы показывают схожие свойства динамики взрыва. Эволюция магнитного поля проиллюстрирована на Рис. 3.9 для модели $DT - 6e10$. В момент отскока ядра тороидальное поле представляет собой сжатую конфигурацию, унаследованную в основном от исходного тороидального поля, где оно имеет четную структуру относительно экватора (левая панель

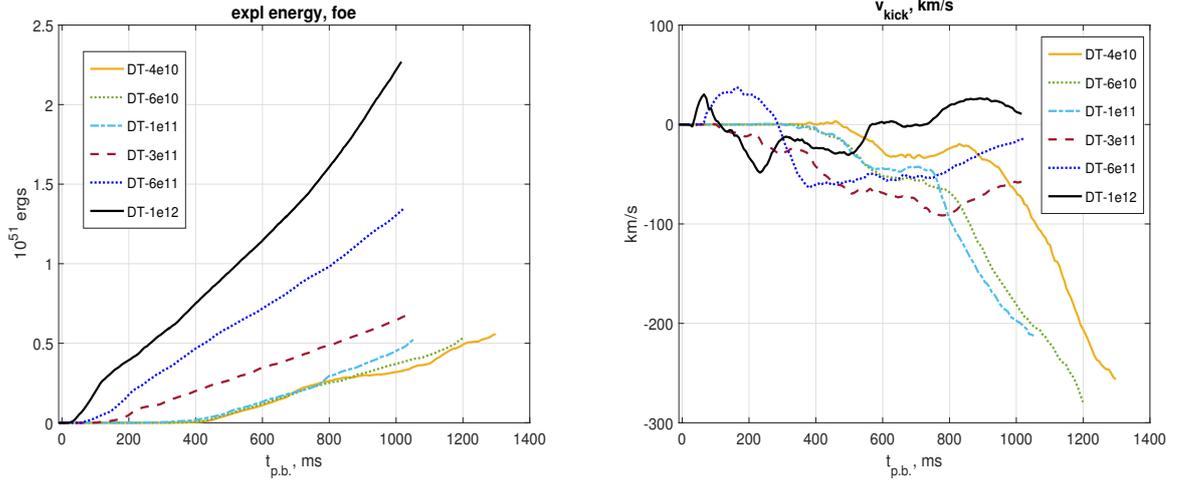


Рисунок 3.8 — Интегральные характеристики для конфигураций с суперпозицией дипольных и тороидальных полей как функции времени после отскока: левая панель — энергия взрыва, правая панель — скорость кика ПНЗ.

Рис. 3.9). В момент отскока полоидальное поле приобретает более сложную форму. Внутри области радиусом 10 км от центра магнитное поле вогнутое относительно центра звезды, в то время как снаружи оно имеет выпуклую структуру (см. также [143; 163]). Накрутка антисимметричного дипольного поля за счет дифференциального вращения производит антисимметричную тороидальную компоненту, которая растет со временем. Антисимметрично сгенерированное тороидальное поле во внутренней части (радиусом $r \leq 10$ км) ПНЗ и поле в областях с радиусом $r > 10$ км имеют разные знаки (центральная панель Рис. 3.9, $t_{p.b.} = 254$ мс). Общая структура магнитного поля напоминает конфигурацию "скрученного тора"[165] с доминированием тороидальной компоненты. Наибольший градиент магнитного давления находится в областях выше экватора (см. круги на Рис. 3.9), где $B_{\phi, compr}^{sym}$ и $B_{\phi, wind}^{asym}$ имеют одинаковый знак внутри внутренней области радиусом 10 км, и где распределение тороидального поля проходит через ноль. Это приводит к более резкому градиенту тороидального магнитного давления по сравнению с аналогичной областью ниже экватора. Градиент магнитного давления сильнее в северном полушарии, и поэтому северное джетообразное истечение становится сильнее южного. В моделях $DT-4e10$, $DT-6e10$ и $DT-1e11$ получены значения асимметрии $A_E \sim 0.5$ и скорости кика $v_{kick} \sim 200 - 300$ км/с на финальных этапах расчетов.

В моделях с самыми сильными полоидальными полями $DT-3e11$, $DT-6e11$ и $DT-1e12$ сгенерированное антисимметричное тороидальное поле становится сильнее симметричного сжатого тороидального поля внутри

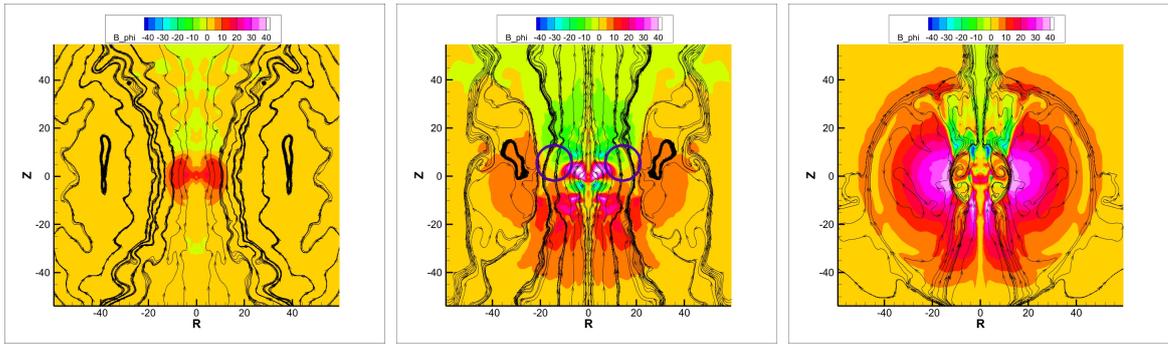


Рисунок 3.9 — Распределение магнитного поля в окрестности ПНЗ в разные времена после отскока в модели $DT - 6e10$ (левая панель — 9 мс после отскока, центральная панель — 254 мс, правая панель — 646 мс). Расстояние от центра звезды в цилиндрических координатах нанесено на оси в километрах, в то время как цветовая палитра соответствует значению тороидального поля в единицах 10^{15} Гс. Черные контуры соответствуют линиям полоидального магнитного поля. Область с наибольшим градиентом магнитного давления находится в северном полушарии, отмечена фиолетовыми кругами на центральной панели.

ПНЗ. Первоначально возникшая асимметрия поля слишком мала для создания заметной асимметрии джетов, которая уменьшается за счет намотанного антисимметричного поля с почти равными модулями индукции над и под экваториальной плоскостью. В результате формируются почти симметричные выбросы, см. Таблицу 10. Небольшая асимметрия джета и небольшая скорость ПНЗ ожидаются также в случае, когда начальное тороидальное поле достаточно велико, и нарушение симметрии накрученного поля мало.

Для иллюстрации морфологии МР-взрывов в моделях типа DT удельная энтропия потока для модели $DT - 6e10$ изображена на Рис.3.10 на разных стадиях взрыва. В начале стадии взрыва джеты формируются почти одновременно и с незначительными асимметриями (см. левую и центральную панели на Рис. 3.10). Существенная экваториальная анизотропия взрыва накапливается только после распространения джетов на несколько тысяч километров от центра (правая панель на Рис. 3.10), в отличие от моделей типа DQ и Do , где джеты формируются в разное время. Отметим, что для высоких магнитных полей перед коллапсом из второй группы форма выбрасываемого вещества остается почти симметричной относительно экватора в течение всего времени расчета.

Из Таблицы 10 и Рис. 3.9 видно, что импульс направлен (в противоположную сторону к асимметрии джета) в сторону, где тороидальное магнитное поле

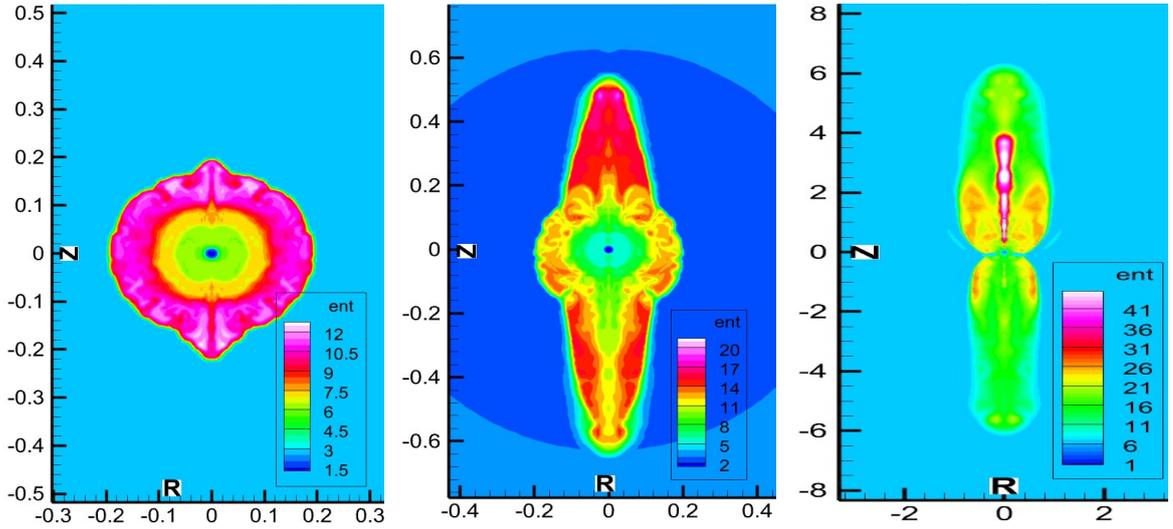


Рисунок 3.10 — Удельная энтропия (в единицах k_B/m_u) для модели $DT - 6e10$ в разные времена: левая панель — $t_{p.b.} = 142$ мс, центральная панель — $t_{p.b.} = 254$ мс, правая панель — $t_{p.b.} = 648$ мс. Масштаб пространственных осей указан в тысячах километров.

увеличивается, в отличие от простой модели [69], где полоидальное поле всегда сохраняет свою выпуклую форму. Вогнутая форма полоидального поля, приобретенная после коллапса, приводит к изменению направления намотанного поля и направления импульса. Для проверки этого объяснения мы провели построение упрощенной модели с искусственно индуцированным выпуклым магнитным полем после отскока ядра. Для задания распределения магнитного поля мы использовали формулу (3.4) с параметрами $B_{0,dip} = 4 \cdot 10^{14}$ Гс, $B_{0,tor} = 2 \cdot 10^{16}$ Гс и $r_0 = 40$ км. Энергия взрыва и скорость кика для этой модели вместе с распределением энтропии на $t_{p.b.} \approx 300$ мс представлены на Рис. 3.11. Экваториальная асимметрия выброса, сформированная здесь во взрыве, имеет направление, противоположное тому, которое создается вогнутым полоидальным полем, а направление импульса соответствует модели [69].

3.5 Заключение к Главе 3

В данной Главе изложены результаты исследований генерации скорости протонейтронной звезды при взрыве сверхновой, вызванной МГД-процессами в рамках МР-механизма. Были изучены три возможных варианта. Первый — это

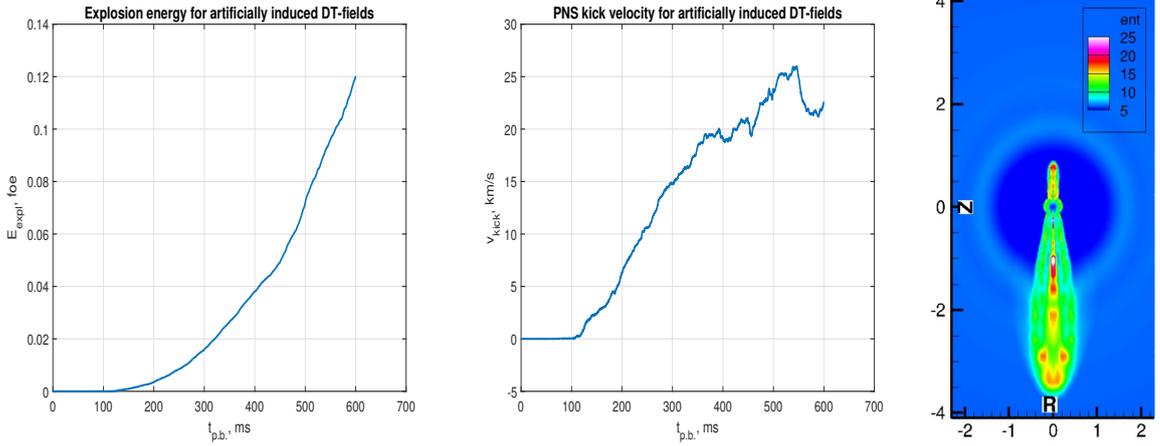


Рисунок 3.11 — Свойства взрыва тестовой модели с искусственно индуцированными полоидальными и тороидальными полями после коллапса. Левая панель — эволюция энергии взрыва, центральная панель — эволюция скорости кика, правая панель — распределение энтропии (k_B/m_u) на $t_{p.b.} \approx 300$ мс. Масштаб осей на правой панели указан в тысячах километров.

суперпозиция квадрупольного и дипольного магнитных полей в ядре звезды-предсверхновой, второй случай — с начальным смещенным дипольным полем, и третий — рассматривающий дипольное поле вместе с симметричной тороидальной компонентой перед коллапсом ядра. Из-за асимметрии в джетах из сколлапсировавшего ядра МР механизм может объяснить возникновение скорости протонейтронной звезды до ~ 500 км/с, приобретенной в первые несколько секунд после отскока ядра. В большинстве промоделированных случаев скорость ПНЗ не насыщается и может увеличиться до более высоких значений на более поздних временах. Зависимость скорости импульса от магнитного поля показана на Рис. 3.12 для трех семейств моделей в финальные моменты симуляций.

Для моделей DQ и Do было обнаружено, что наибольшая асимметрия взрыва возникает при наиболее слабых магнитных полях перед коллапсом с $B \gtrsim 10^{10}$ Гс (с $A_E \sim 0.7 - 0.8$), и уменьшается с увеличением полоидального магнитного поля. То же самое касается и скорости ПНЗ, которая имеет максимальные абсолютные значения $v_{\text{kick}} \sim 480$ км/с для $DQ - 2e10$ и ~ 340 км/с для $Do - 3e10$. С увеличением начальной величины полоидального поля анизотропия взрыва и скорость кика уменьшаются до нуля, а затем меняют знак и начинают расти в другую сторону. Так, например, в моделях DQ как значение асимметрии A_E , так и скорость ПНЗ v_{kick} достигают почти нулевых значений для начального поля $B = 6 \cdot 10^{11}$ Гс, а затем меняют знак и начинают уве-

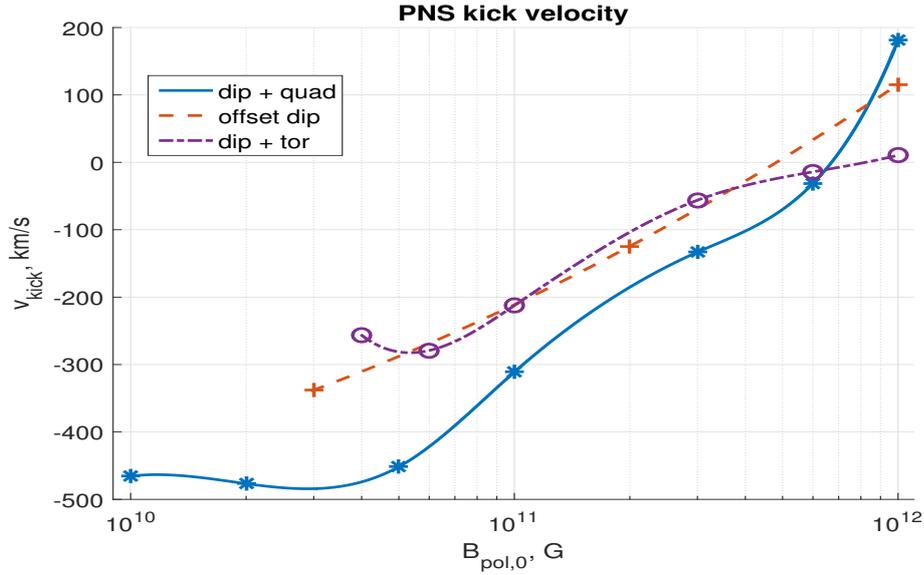


Рисунок 3.12 — Зависимость скорости ПНЗ от полоидального магнитного поля для различных семейств моделей в финальные моменты времени. Сглаженные линии представляют модели DQ (синие сплошные), Do (красные пунктирные) и DT (фиолетовые штрихпунктирные).

личиваться в противоположном направлении. Также наблюдается насыщение скорости кика со временем на уровне ~ 180 км/с для модели с самым высоким начальным магнитным полем $B_0 = 10^{12}$ Гс (См. рис. 3.1). Следует отметить, что модель $DQ - 1e12$ имеет на $\sim 15\%$ меньшую энергию взрыва, чем тестовая модель с дипольным полем " $D0 - 1e12$ " с такой же начальной магнитной энергией в такое же время после отскока. Этот результат согласуется с недавней работой [48], где рассматривался набор моделей коллапсирующих сверхновых с различными магнитными мультиполями, и сообщалось о снижении энергии взрыва с увеличением порядка мультиполя. Случай моделей Do имеет качественное сходство с моделями DQ с немного меньшими скоростями ПНЗ.

В наборе моделей DT для значений полоидального магнитного поля порядка $\lesssim 10^{11}$ Гс образование накрученного антисимметричного тороидального поля вместе с наличием симметричного компонента в окрестности ПНЗ приводит к формированию нейтронной звезды со скоростями порядка $\sim 200 - 300$ км/с. В этих случаях взрыв развивается сильнее в направлении (выше экватора в наших расчетах), где накрученное тороидальное поле суммируется с сжатым компонентом внутри первых 10 км, а также где тороидальное поле проходит через нуль, создавая резкий градиент магнитного давления. Такая структура тороидального поля появляется из-за накрутки поля в присутствии

выпукло-вогнутого полоидального магнитного поля. При дальнейшем увеличении величины начального полоидального поля тороидальная компонента, генерируемая дифференциальным вращением, становится доминирующей, и система "забывает" о симметричной части, что приводит к взрывам почти без нарушения экваториальной симметрии и возникновения скорости у ПНЗ. Для сильного магнитного поля в модели $DT - 1e12$ энергия взрыва имеет на $\sim 13\%$ большее значение, чем для звезды с чисто дипольным полем той же величины (тестовая модель " $D0 - 1e12$ ") из-за дополнительного градиента магнитного давления от симметричного тороидального поля.

Сравнивая возможные сценарии формирования асимметричных джетов в контексте МР-сверхновых, можно заключить, что наличие полоидальных полей с нарушенной зеркальной симметрией (модели DQ и Do) в коллапсирующем ядре в виде комбинации мультиполей приводит к сильно анизотропным взрывам и формированию скорости ПНЗ более эффективно, чем модель с начальным тороидальным полем (DT), особенно для высоких начальных магнитных полей $B_0 \sim 10^{12}$ Гс.

Мы использовали двумерные осесимметричные МГД-уравнения, в результате чего скорости ПНЗ направлены параллельно оси вращения. Было бы интересно рассмотреть трехмерную постановку для этих задач, так как многие (см., напр., [5; 62]) трехмерные численные модели не могут воспроизвести наблюдаемое для многих НЗ выравнивание оси вращения с направлением кика [57; 166] (см., однако, недавние работы [167] и [63]).

В нашем коде был реализован упрощенный подход к моделированию нейтринного переноса с использованием схемы потерь вдоль радиальных лучей. Хотя такая схема позволяет правильно воспроизводить качественное поведение нейтринной физики в оболочке сверхновой, для решения этой проблемы были предложены более точные подходы к моделированию нейтринного переноса с использованием метода Монте-Карло (см., например, [168]) и моделей двухмоментного переноса нейтрино с $M1$ -замыканием [35].

По результатам данной главы были опубликованы следующие статьи:

1. Kondratyev, I.A., Moiseenko, S.G. and Bisnovaty-Kogan, G.S.
"Magnetorotational Supernova Explosions: Jets and Mirror Symmetry

- Violation”, Lobachevskii Journal of Mathematics, 45, 1, 50–59 (2024)
<https://doi.org/10.1134/S1995080224010268>
2. Kondratyev, I.A., Moiseenko, S.G. and Bisnovatyi-Kogan, G.S.
”Magnetorotational Neutron Star Kicks”, Physical Review D, 110, 8,
083025 (2024) <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.083025>

Заключение

В диссертационной работе были решены две астрофизические задачи, связанные с физикой компактных объектов – нейтронных звезд с магнитным полем и вращением.

–В **Главе 1** представлены результаты по численному исследованию переноса тепла во внешних слоях замагниченных нейтронных звезд. Впервые проведены серии трехмерных расчетов теплопроводности во внешних слоях замагниченной нейтронной звезды. По рассчитанным распределениям температуры с неосесимметричными магнитными полями в нейтронной звезде были построены синтетические кривые блеска, для которых проведено сравнение с дипольным случаем для выявления качественных особенностей, присущих трехмерным магнитным полям внутри одиночных нейтронных звезд, излучающих в тепловом диапазоне. Получено, что включение даже относительно слабого квадрупольного поля (с отношением максимума индукции на поверхности $\beta = 0.5$ по отношению к диполю) может существенно изменить наблюдательные проявления для объектов типа ”Великолепной семерки”. Было получено, что пульсации теплового излучения могут существенно усилиться по сравнению с нейтронной звездой, обладающей только дипольным магнитным полем. При этом обнаружены характерные искривления пиков на кривых блеска как для двухпиковых, так и для однопиковых распределений. Наблюдательные данные для трех объектов ”Семерки” (RX J0420, RX J0720 и RX J0806) имеют схожие особенности в кривых блеска и величине пульсаций с рассмотренными здесь моделями, что может говорить о сложной трехмерной структуре поля в них. Разработанный нами комплекс программ может быть использован для сравнения различных теоретических моделей анизотропной теплопроводности и предположений о структуре поля в нейтронных звездах с данными наблюдений реальных источников.

–В **Главе 2** разработаны численные схемы для многомерных МГД-течений с квазилагранжевым учетом крупномасштабного вращения, что позволяет точнее моделировать течения, возникающие в аккреционных дисках и магниторотационных взрывах сверхновых. Рассмотрены как традиционные явные Годуновские методы повышенного порядка точности, так и более современные полунявные численные схемы с расщеплением потока на акустическую и адвективную части, в которых акустическая часть берется с верхнего слоя по

времени. Это приводит к исключению скорости звука из условия устойчивости схемы, что существенно увеличивает допустимый временной шаг и позволяет эффективнее моделировать течения при наличии компактных объектов с высокой скоростью звука. Проведены различные тестовые расчеты для многомерных уравнений газовой динамики и магнитной гидродинамики.

–В **Главе 3** изложены результаты МГД-моделирования коллапса ядра и магниторотационного взрыва сверхновой в двумерной осесимметричной постановке для вращающейся замагниченной звезды с начальной массой в $35M_{\odot}$. С использованием разработанного нами комплекса программ, описанного в Главе 2, проведены серии МГД-расчетов для различных полей с нарушенной зеркальной симметрией в ядре звезды – 1) суперпозиции диполя и квадруполья, 2) смещенного относительно центра дипольного поля и 3) суперпозиции дипольного и симметричного тороидального полей. Во всех сериях расчетов получены асимметричные относительно экваториальной плоскости взрывы в виде джетов, что должно приводить к генерации приобретенной скорости – кика – протонейтронной звезды. Во всех сценариях рассмотрена зависимость скорости кика и анизотропии выброса от величины начального поля. Скорости компактных объектов в расчетах возникают за время около одной секунды. Получено, что скорость компактного объекта v_{kick} может достигать величины в несколько сотен (100 – 500) километров в секунду, что хорошо согласуется с наблюдательными данными. Таким образом, с использованием глобальных численных МГД-расчетов показано, что в рамках магниторотационного механизма с нарушенной зеркальной симметрией магнитного поля в звезде-предсверхновой можно объяснить возникновение больших скоростей некоторых нейтронных звезд. В дальнейшем данную работу можно развить с учетом использования уже трехмерных численных моделей, в рамках которых могут быть исследованы также такие эффекты, как усиление магнитного поля вблизи протонейтронной звезды после коллапса путем динамо-эффекта и изгибная неустойчивость вылетающих из ядра звезды джетов.

Благодарности Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю Сергею Григорьевичу Моисеенко за большую поддержку, доверие и ценные советы на всех этапах работы над диссертацией. Также автор выражает большую благодарность профессору Геннадию Семеновичу Бисноватому-Когану за огромное количество ценных

замечаний и плодотворных обсуждений. Наконец, автор благодарит своего деда Москвина Михаила Сергеевича и близких друзей – Софию Еремееву, Андрея Оськина, Павла Оськина и Александру Богданову, без поддержки которых написание данной диссертационной работы далось бы гораздо сложнее. Автор также благодарит создателей шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации.

Список литературы

1. *Bethe, H. A.* Supernova mechanisms / H. A. Bethe // *Rev. Mod. Phys.* — 1990. — Т. 62. — С. 801.
2. *Janka, H.-T.* Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae / H.-T. Janka // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* — 2012. — Т. 62. — С. 407.
3. *Lyne, A. G.* High birth velocities of radio pulsars / A. G. Lyne, D. R. Lorimer // *Nature.* — 1994. — Т. 369, № 6476. — С. 127.
4. *Bisnovatyi-Kogan, G. S.* The Explosion of a Rotating Star As a Supernova Mechanism / G. S. Bisnovatyi-Kogan // *Astron. Zh.* — 1970. — Т. 47. — 813 (Soviet Astronomy, 14, 652 (1971)).
5. Three dimensional magnetorotational core-collapse supernova explosions of a 39 solar mass progenitor star / J. Powell [и др.] // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2023. — Т. 522, № 4. — С. 6070.
6. *Usov, V. V.* Millisecond pulsars with extremely strong magnetic fields as a cosmological source of γ -ray bursts / V. V. Usov // *Nature.* — 1992. — Т. 357. — С. 472.
7. Toward a Mass and Radius Determination of the Nearby Isolated Neutron Star RX J185635–3754 / J. A. Pons [и др.] // *Astrophys. J.* — 2002. — Т. 564. — С. 981.
8. *Kaplan, D. L.* A Coherent Timing Solution for the Nearby Isolated Neutron Star RX J0720.4–3125 / D. L. Kaplan, M. H. van Kerkwijk // *Astrophys. J.* — 2005. — Т. 628, № L45.
9. *Kaplan, D. L.* The Optical Counterpart of the Isolated Neutron Star RX J1605.3+3249 / D. L. Kaplan, S. R. Kulkarni, M. H. van Kerkwijk // *Astrophys. J.* — 2003. — Т. 588, № L33.
10. *Haberl, F.* The XMM-Newton view of radio-quiet and X-ray dim isolated neutron stars / F. Haberl // in proceedings of the XMM-Newton EPIC Consortium meeting, Palermo, 2003 October 14–16, *Mem. Soc. Astron. It.* — 2004. — Т. 75. — 454 [arXiv:astro-ph/0401075].
11. / D. Viganò [и др.] // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — Т. 443. — С. 31.

12. *Perez-Azorin, J. F.* Anisotropic thermal emission from magnetized neutron stars / J. F. Perez-Azorin, J. A. Miralles, J. A. Pons // *Astron. Astrophys.* — 2006. — T. 451. — C. 1009.
13. XMM-Newton observations of PSR J0726-2612, a radio-loud XDINS / M. Rigoselli [и др.] // *Astron. Astrophys.* — 2019. — T. 627. — A69.
14. *Zane, S.* Unveiling the thermal and magnetic map of neutron star surfaces through their X-ray emission: method and light-curve analysis / S. Zane, R. Turolla // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2006. — T. 366. — C. 727.
15. *Geppert, U.* Temperature distribution in magnetized neutron star crusts / U. Geppert, D. Kuker, D. Page // *Astron. Astrophys.* — 2006. — T. 457. — C. 937.
16. *Aguilera, D.* 2D Cooling of magnetized neutron stars / D. Aguilera, J. Pons, J. Miralles // *Astron. Astrophys.* — 2008. — T. 486. — C. 255.
17. *Pons, J.* Magneto-thermal evolution of neutron stars / J. Pons, J. Miralles, U. Geppert // *Astron. Astrophys.* — 2009. — T. 496. — C. 207.
18. Unifying the observational diversity of isolated neutron stars via magneto-thermal evolution models / D. Viganò [и др.] // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2013. — T. 434. — C. 123.
19. A NICER view of the massive pulsar PSR J0740+ 6620 informed by radio timing and XMM-Newton spectroscopy / T. E. Riley [и др.] // *The Astrophysical Journal Letters.* — 2021. — T. 918, № 2. — C. L27.
20. *Page, D.* Surface Temperature of a Magnetized Neutron Star and Interpretation of the ROSAT Data. II. / D. Page, A. Sarmiento // *Astrophys. J.* — 1996. — T. 473. — C. 1067.
21. *Potekhin, A. Y.* Neutron Stars—Thermal Emitters / A. Y. Potekhin, J. A. Pons, D. Page // *Space Science Rev.* — 2015. — T. 191. — C. 239.
22. *Ardeljan, N. V.* Nonstationary magnetorotational processes in a rotating magnetized cloud / N. V. Ardeljan, G. S. Bisnovatyi-Kogan, S. G. Moiseenko // *Astron. Astrophys.* — 2000. — T. 355. — C. 1181.
23. *Ardeljan, N. V.* Implicit Free-Lagrange method for computing two-dimensional magnetogasdynamic flows / N. V. Ardeljan, K. V. Kosmachevskii // *Comput. Math. Modelling.* — 1995. — T. 6. — C. 209.

24. *Murphy, J. W.* BETHE-HYDRO: an arbitrary Lagrangian-Eulerian multidimensional hydrodynamics code for astrophysical simulations / J. W. Murphy, A. Burrows // *Astrophys. J. Suppl.* — 2008. — Т. 179, № 1. — С. 209.
25. *Stone, J. M.* ZEUS-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. I. The Hydrodynamic Algorithms and Tests / J. M. Stone, M. L. Norman // *Astrophys. J. Suppl.* — 1992. — Т. 80. — С. 753.
26. *Gingold, R. A.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars / R. A. Gingold, J. J. Monaghan // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* — 1977. — Т. 181, № 3. — С. 375.
27. *Monaghan, J. J.* Smoothed Particle Hydrodynamics / J. J. Monaghan // *Annual Rev. Astron. Astrophys.* — 1992. — Т. 30. — С. 543.
28. *Price, D. J.* Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics / D. J. Price // *Journal of Computational Physics.* — 2012. — Т. 231, № 3. — С. 759.
29. *Toro, E. F.* Riemann Solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction / E. F. Toro. — Springer, 2009.
30. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1989.
31. *Colgate, S. A.* The Hydrodynamic Behavior of Supernovae Explosions / S. A. Colgate, R. H. White // *Astrophys. J.* — 1966. — Т. 143. — С. 626.
32. *Bethe, H. A.* Revival of a stalled supernova shock by neutrino heating / H. A. Bethe, J. R. Wilson // *Astrophys. J.* — 1985. — Т. 295. — С. 14.
33. *Epstein, R. I.* Lepton-driven convection in supernovae / R. I. Epstein // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1979. — Т. 188, № 2. — С. 305.
34. *Blondin, J. M.* Stability of Standing Accretion Shocks, with an Eye toward Core-Collapse Supernovae / J. M. Blondin, A. Mezzacappa, C. DeMarino // *Astrophys. J.* — 2003. — Т. 584, № 2. — С. 971.
35. *Fornax: a Flexible Code for Multiphysics Astrophysical Simulations* / M. A. Skinner [и др.] // *Astrophys. J. Suppl.* — 2019. — Т. 241. — С. 7.

36. *Mueller, B.* The dynamics of neutrino-driven supernova explosions after shock revival in 2D and 3D / B. Mueller // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2015. — T. 452. — C. 287.
37. *Powell, J.* Three-dimensional core-collapse supernova simulations of massive and rotating progenitors / J. Powell, B. Muller // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2020. — T. 494. — C. 4665.
38. *Bisnovatyi-Kogan, G. S.* The Magnetohydrodynamic Rotational Model of Supernova Explosion / G. S. Bisnovatyi-Kogan, I. P. Popov, A. A. Samokhin // Astrophys. Space. Sci. — 1976. — T. 41. — C. 287.
39. *Mueller, E.* A magnetohydrodynamical supernova model / E. Mueller, W. Hillebrandt // Astron. Astrophys. — 1979. — T. 80. — C. 147.
40. Magneto-driven Shock Waves in Core-Collapse Supernovae / T. Takiwaki [и др.] // Astrophys. J. — 2004. — T. 616. — C. 1086.
41. *Ardeljan, N. V.* Magnetorotational Supernovae / N. V. Ardeljan, G. S. Bisnovatyi-Kogan, S. G. Moiseenko // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2005. — T. 359. — C. 333.
42. *Moiseenko, S. G.* A magnetorotational core-collapse model with jets / S. G. Moiseenko, N. V. Ardeljan, G. S. Bisnovatyi-Kogan // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2006. — T. 370, № 1. — C. 501.
43. Simulations of Magnetically Driven Supernova and Hypernova Explosions in the Context of Rapid Rotation / A. Burrows [и др.] // Astrophys. J. — 2007. — T. 664. — C. 416.
44. The Proto-neutron Star Phase Of The Collapsar Model And The Route To Long-soft Gamma-ray Bursts And Hypernovae / L. Dessart [и др.] // Astrophys. J. — 2008. — T. 673, № L43.
45. *Takiwaki, T.* Gravitational Wave Signatures of Magnetohydrodynamically Driven Core-Collapse Supernova Explosions / T. Takiwaki, K. Kotake // Astrophys. J. — 2011. — T. 743, № 4. — C. 30.
46. Magnetorotational Core-Collapse Supernovae in Three Dimensions / P. Moesta [и др.] // Astrophys. J. Lett. — 2014. — T. 785, № L29.

47. *Obergaulinger, M.* Protomagnetar and black hole formation in high-mass stars / M. Obergaulinger, M. A. Aloy // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2017. — T. 469, № L43.
48. The impact of non-dipolar magnetic fields in core-collapse supernovae / M. Bugli [и др.] // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2020. — T. 492. — C. 58.
49. *Bugli, M.* Three-dimensional core-collapse supernovae with complex magnetic structures – I. Explosion dynamics / M. Bugli, J. Guilet, M. Obergaulinger // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2021. — T. 507, № 1. — C. 443.
50. Magnetorotational Explosion of a Massive Star Supported by Neutrino Heating in General Relativistic Three-dimensional Simulations / T. Kuroda [и др.] // Astrophys. J. — 2020. — T. 896. — C. 102.
51. *Aloy, M. A.* Magnetorotational core collapse of possible GRB progenitors – II. Formation of protomagnetars and collapsars / M. A. Aloy, M. Obergaulinger // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2021. — T. 500, № 4. — C. 4365.
52. *Tayler, R. J.* The Adiabatic Stability of Stars Containing Magnetic Fields – I: Toroidal Fields / R. J. Tayler // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 1973. — T. 161. — C. 365.
53. The Magnetorotational Instability in Core-Collapse Supernova Explosions / S. Akiyama [и др.] // Astrophys. J. — 2003. — T. 584. — C. 954.
54. *Kuroda, T.* Impact of a Magnetic Field on Neutrino–Matter Interactions in Core-collapse Supernovae / T. Kuroda // Astrophys. J. — 2021. — T. 906. — C. 128.
55. A large scale dynamo and magnetoturbulence in rapidly rotating core-collapse supernovae / P. Moesta [и др.] // Nature. — 2015. — T. 528. — C. 376.
56. *Utrobin, V. P.* Enormous explosion energy of Type IIP SN 2017gmr with bipolar ^{56}Ni ejecta / V. P. Utrobin, N. N. Chugai, et al // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2021. — T. 505 (1). — C. 116–125.
57. *Smirnova, T. V.* The Spatial Structure of Pulsar Emission Sources Determined Using Interstellar Scintillation / T. V. Smirnova, V. I. Shishov, V. M. Malofeev // Astrophys. J. — 1996. — T. 462. — C. 289.

58. *Hansen, B. M. S.* The pulsar kick velocity distribution / B. M. S. Hansen, E. S. Phinney // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 1997. — T. 291. — C. 569.
59. *Lai, D.* Neutron Star Kicks and Asymmetric Supernovae / D. Lai. — in "Physics of Neutron Star Interiors" (Lecture Notes in Physics), ed. D. Blaschke, N.K. Glendenning, A. Sedrakian, Springer, 2001. — C. 424.
60. The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue / R. N. Manchester [и др.] // Astron. J. — 2005. — T. 129. — C. 1993.
61. Multidimensional supernova simulations with approximative neutrino transport. I. Neutron star kicks and the anisotropy of neutrino-driven explosions in two spatial dimensions / L. Scheck [и др.] // Astron. Astrophys. — 2006. — T. 457. — C. 963.
62. *Wongwathanarat, A.* Three-dimensional neutrino-driven supernovae: Neutron star kicks, spins, and asymmetric ejection of nucleosynthesis products / A. Wongwathanarat, H.-T. Janka, E. Müller // Astron. Astrophys. — 2013. — T. 552. — A126.
63. A Theory for Neutron Star and Black Hole Kicks and Induced Spins / A. Burrows [и др.] // Astrophys. J. — 2024. — T. 963. — C. 63.
64. *Chugai, N. N.* Pulsar Space Velocities and Neutrino Chirality / N. N. Chugai // Soviet Astronomy Letters. — 1984. — T. 10. — C. 87.
65. *Bisnovatyi-Kogan, G. S.* Asymmetric neutrino emission and formation of rapidly moving pulsars / G. S. Bisnovatyi-Kogan // Astron. Astrophys. Trans. — 1993. — T. 3:4. — C. 287.
66. *Arras, P.* Neutrino-nucleon interactions in magnetized neutron-star matter: The effects of parity violation / P. Arras, D. Lai // Phys. Rev. D. — 1999. — T. 60. — C. 043001.
67. *Dobrynina, A.* Influence of a magnetic field on beta-processes in supernova matter / A. Dobrynina, I. Ognev // Phys. Rev. D. — 2020. — T. 101. — C. 083003.
68. *Wang, J. C. L.* Intrinsically Asymmetric Astrophysical Jets / J. C. L. Wang, M. E. Sulkanen, R. V. E. Lovelace // Astrophys. J. — 1992. — T. 390. — C. 46.

69. *Bisnovatyi-Kogan, G. S.* Violation of Mirror Symmetry of the Magnetic Field in a Rotating Star and Possible Astrophysical Manifestations / G. S. Bisnovatyi-Kogan, S. G. Moiseenko // *Astron. Rep.* — 1992. — T. 69. — C. 563.
70. *Burnett, C. R.* Stokes tomography of a radio pulsar with an offset magnetic dipole / C. R. Burnett, A. Melatos // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — T. 440. — (3) 2519.
71. *Pons, J. A.* Magnetic, thermal and rotational evolution of isolated neutron stars / J. A. Pons, D. Viganò // *Living Reviews on computational astrophysics.* — 2019. — T. 5. — C. 3.
72. *Gudmundsson, E. H.* Structure of neutron star envelopes / E. H. Gudmundsson, C. J. Pethick, R. I. Epstein // *Astrophys. J.* — 1983. — T. 272. — C. 286.
73. *Greenstein, G.* Pulselike character of blackbody radiation from neutron stars / G. Greenstein, G. J. Hartke // *Astrophys. J.* — 1983. — T. 271. — C. 283.
74. *Bisnovatyi-Kogan, G. S.* Nuclear-energy release in neutron-star envelopes, and sources of x-ray emission / G. S. Bisnovatyi-Kogan, J. N. Kulikov, V. M. Chechetkin // *Soviet Ast.* — 1976. — T. 20. — C. 552.
75. *Potekhin, A. Y.* Thermal structure and cooling of neutron stars with magnetized envelopes / A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev // *Astron. Astrophys.* — 2001. — T. 374. — C. 213.
76. *Geppert, U.* Temperature distribution in magnetized neutron star crusts / U. Geppert, D. Kuker, D. Page // *Astron. Astrophys.* — 2004. — T. 426. — C. 267.
77. *Wood, T.* Three dimensional simulation of the magnetic stress in a neutron star crust / T. Wood, R. Hollerbach // *Phys Rev Lett.* — 2015. — T. 114(19), № 191101.
78. *DeGrandis, D.* Three-dimensional Modeling of the Magnetothermal Evolution of Neutron Stars: Method and Test Cases / D. DeGrandis, et al // *Astrophys. J.* — 2020. — T. 903. — C. 40.
79. *Urpin, V.* Thermal and Electrical Conductivity in White Dwarfs and Neutron Stars / V. Urpin, D. G. Yakovlev // *Sov. Astron.* — 1980. — T. 24. — C. 303.

80. *Bisnovatyi-Kogan, G. S.* Calculation of Thermal Conductivity Coefficients of Electrons in Magnetized Dense Matter / G. S. Bisnovatyi-Kogan, M. V. Glushikhina // Plasma Physics Reports. — 2018. — Т. 44, № 4. — С. 355.
81. *Бисикало, Д.* Газодинамика тесных двойных звезд / Д. Бисикало, А. Жилкин, А. Боярчук. — М.: Физматлит, 2013.
82. *Godunov, S. K.* A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations / S. K. Godunov // Mat. Sbornik. — 1959. — Т. 47. — С. 271.
83. *Colella, P.* The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations / P. Colella, P. R. Woodward // Journal of Computational Physics. — 1984. — Т. 54. — С. 174.
84. *Mignone, A.* High-order conservative reconstruction schemes for finite volume methods in cylindrical and spherical coordinates / A. Mignone // J. Comp. Phys. — 2014. — Т. 270, № 1. — С. 784.
85. *Stone, J. M.* A simple unsplit Godunov method for multidimensional MHD / J. M. Stone, T. Gardiner // New Astronomy. — 2009. — Т. 14. — С. 139.
86. PLUTO: A Numerical Code for Computational Astrophysics / A. Mignone [и др.] // Astrophys. J. Suppl. — 2007. — Т. 170, № 1.
87. *Courant, R.* Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik / R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy // Mathematische Annalen. — 1928. — Т. 100. — С. 32.
88. *Harlow, F. H.* Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface / F. H. Harlow, J. E. Welch // Physics of Fluids. — 1965. — Т. 8. — С. 2182.
89. *Casulli, V.* Pressure method for the numerical solution of transient, compressible fluid flows / V. Casulli, D. Greenspan // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 1984. — Т. 4, № 11. — С. 1001.
90. *Park, J. H.* Multiple pressure variables methods for fluid flow at all Mach numbers / J. H. Park, C.-D. Munz // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2005. — Т. 49, № 8. — С. 905.

91. *Cordier, F.* An Asymptotic-Preserving all-speed scheme for the Euler and Navier-Stokes equations / F. Cordier, P. Degond, A. Kumbaro // Journal of Computational Physics. — 2012. — Т. 231. — С. 5685.
92. *Dumbser, M.* A conservative, weakly nonlinear semi-implicit finite volume scheme for the compressible Navier–Stokes equations with general equation of state / M. Dumbser, V. Casulli // Applied Mathematics and Computation. — 2016. — Т. 272, № 2. — С. 479.
93. A second order all Mach number IMEX finite volume solver for the three dimensional Euler equations / W. Boscheri [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2020. — Т. 415, № 109486.
94. *Boscheri, W.* High order pressure-based semi-implicit IMEX schemes for the 3D Navier-Stokes equations at all Mach numbers / W. Boscheri, L. Pareschi // Journal of Computational Physics. — 2021. — Т. 434, № 110206.
95. A divergence-free semi-implicit finite volume scheme for ideal, viscous, and resistive magnetohydrodynamics / M. Dumbser [и др.] // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2019. — Т. 89, № 1/2. — С. 16.
96. *Fambri, F.* A novel structure preserving semi-implicit finite volume method for viscous and resistive magnetohydrodynamics / F. Fambri // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2021. — Т. 93, № 12. — С. 3447.
97. *Masset, F.* A fast Eulerian transport algorithm for differentially rotating disks / F. Masset // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. — 2000. — Т. 141, № 1. — С. 165.
98. *Duffel, P. C.* DISCO: A 3D moving-mesh magnetohydrodynamics code designed for the study of astrophysical disks / P. C. Duffel // Astrophys. J. Suppl. — 2016. — Т. 226. — С. 2.
99. *Springel, V.* E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh / V. Springel // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2010. — Т. 401, № 2. — С. 791.
100. *Duffel, P. C.* TESS: A Relativistic Hydrodynamics Code on a Moving Voronoi Mesh / P. C. Duffel, A. I. MacFadyen // Astrophys. J. Suppl. — 2011. — Т. 197. — С. 15.
101. *Самарский, А. А.* Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. — М.: Наука, 1992.

102. *Арделян, Н. В.* Вопросы построения и исследования полностью консервативных разностных схем магнитной газодинамики / Н. В. Арделян, К. В. Космачевский, С. В. Черниговский. — М.: МГУ, 1987.
103. Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations / A. Dedner [и др.] // J. Comp. Phys. — 2002. — Т. 175. — С. 645.
104. *Miyoshi, T.* A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics / T. Miyoshi, K. Kusano // J. Comp. Phys. — 2005. — Т. 208. — С. 315.
105. *Shu, S.-W.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes / S.-W. Shu, S. Osher // J. Comp. Phys. — 1988. — Т. 77. — С. 439.
106. *Брагинский, С. И.* Вопросы теории плазмы. Выпуск 1. / С. И. Брагинский. — М.: ГосАтомИздат, 1963.
107. *Брагинский, С. И.* Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме / С. И. Брагинский // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. — 1957. — Т. 6. — С. 459.
108. *Яковлев, Д. Г.* / Д. Г. Яковлев, В. А. Урпин // Астрономический Журнал. — 1980. — Т. 57. — С. 526.
109. *Flowers, E.* Transport properties of dense matter / E. Flowers, N. Itoh // Astrophys. J. — 1976. — Т. 206. — С. 218.
110. *Ziman, J.* Electrons and Phonons: The Theory of Transport Phenomena in Solids / J. Ziman. — Oxford University Press, 1996.
111. *Бисноватый-Коган, Г. С.* Физические основы теории звездной эволюции / Г. С. Бисноватый-Коган. — М.:Наука, 1989.
112. *Blandford, R. D.* Thermal origin of neutron star magnetic fields / R. D. Blandford, J. H. Applegate, L. Hernquist // Mon. Not. R. Astr. Soc. — 1983. — Т. 204. — С. 1025.
113. *Bisnovatyi-Kogan, G. S.* Four Tensors Determining Thermal and Electric Conductivities of Degenerate Electrons in Magnetized Plasma / G. S. Bisnovatyi-Kogan, M. V. Glushikhina // Plasma Physics Reports. — 2018. — Т. 44, № 12. — С. 1114.

114. *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.:Наука, 1988.
115. *Douchin, F.* A unified equation of state of dense matter and neutron star structure / F. Douchin, P. Haensel // *Astron. Astrophys.* — 2001. — Т. 380. — С. 151.
116. A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities / E. Chabanat [и др.] // *Nucl. Phys. A.* — 1997. — Т. 627. — (4) 710.
117. A Skyrme parametrization from subnuclear to neutron star densities Part II. Nuclei far from stabilities / E. Chabanat [и др.] // *Nucl. Phys. A.* — 1998. — Т. 635. — С. 231.
118. *Baym, G.* Neutron star matter / G. Baym, H. Bethe, C. Pethick // *Nucl. Phys.* — 1971. — Т. A175. — С. 255.
119. *Baym, G.* The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models / G. Baym, C. Pethick, D. Sutherland // *Astrophys. J.* — 1971. — Т. 170. — С. 306.
120. *Rybicki, G. B.* Radiative processes in astrophysics / G. B. Rybicki, A. P. Lightman. — WILEY-VCH, 2004.
121. *Silant'ev, N. A.* Radiative heat transfer in surface layers of neutron stars with a magnetic field / N. A. Silant'ev, D. G. Yakovlev // *Astrophys. Space Sci.* — 1980. — Т. 71. — С. 45.
122. *Potekhin, A. Y.* Heat blanketing envelopes and thermal radiation of strongly magnetized neutron stars / A. Y. Potekhin, G. Chabrier, D. G. Yakovlev // *Astrophys. Space Sci.* — 2007. — Т. 308. — С. 353.
123. *Pechenik, K. R.* Hot spots on neutron stars - The near-field gravitational lens / K. R. Pechenik, C. Ftaclas, J. M. Cohen // *Astrophys. J.* — 1983. — Т. 274. — С. 846.
124. *Page, D.* Surface Temperature of a Magnetized Neutron Star and Interpretation of the ROSAT Data. I. Dipolar Fields / D. Page // *Astrophys. J.* — 1995. — Т. 442. — С. 273.
125. *Turolla, R.* Pulse Profiles from Thermally Emitting Neutron Stars / R. Turolla, L. Nobili // *Astrophys. J.* — 2013. — Т. 768. — С. 147.

126. *Morrison, R.* Interstellar photoelectric absorption cross sections, 0.03-10 keV / R. Morrison, D. McCammon // *Astrophys. J.* — 1983. — T. 270. — C. 119.
127. *Beloborodov, A. M.* Gravitational Bending of Light Near Compact Objects / A. M. Beloborodov // *Astrophys. J.* — 2002. — T. 566, № L85.
128. *Haberl, F.* The isolated neutron star X-ray pulsars RX J0420.0–5022 and RX J0806.4–4123: New X-ray and optical observations / F. Haberl, et al. // *Astron. Astrophys.* — 2004. — T. 424. — C. 635.
129. *Landau, L. D.* Course of Theoretical Physics. Fluid Mechanics. Vol. 6 (2nd ed.) / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. — Pergamon, 1987.
130. *Toro, E. F.* Flux splitting schemes for the Euler equations / E. F. Toro, M. E. Vazquez-Cendon // *Computers and Fluids.* — 2012. — T. 70. — C. 1.
131. *Roe, P. L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes / P. L. Roe // *Journal of Computational Physics.* — 1981. — T. 43 (2). — C. 357.
132. *Toro, E. F.* Restoration of the Contact Surface in the HLL Riemann Solver / E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares // *Shock Waves.* — 1994. — T. 4. — C. 25.
133. *Gaburov, E.* Astrophysical weighted particle magnetohydrodynamics / E. Gaburov, K. Nitadori // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — T. 414, № 1. — C. 129–154.
134. *Monchmeyer, R.* A Conservative Second-Order Difference Scheme for Curvilinear Coordinates - Part One - Assignment of Variables on a Staggered Grid / R. Monchmeyer, E. Mueller // *Journal of Computational Physics.* — 1989. — T. 217. — C. 351.
135. *Ascher, U. M.* Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations / U. M. Ascher, S. J. Ruuth, R. J. Spite // *Appl. Numer. Math.* — 1997. — T. 25 (2–3). — C. 151.
136. *Sod, G. A.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws / G. A. Sod // *Journal of Computational Physics.* — 1978. — T. 27, № 1. — C. 1.
137. *Miczek, F.* New numerical solver for flows at various Mach numbers / F. Miczek, F. Röpke, P. Edelmann // *Astron. Astrophys.* — 2015. — T. 576. — A50.

138. Magnetohydrodynamic simulation code CANS+: Assessments and applications / Y. Matsumoto [и др.] // Publ. Astron. Soc. Japan. — 2019. — Т. 71 (4), № 83. — С. 1.
139. *Hopkins, P. F.* Accurate, meshless methods for magnetohydrodynamics / P. F. Hopkins, M. J. Raives // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2016. — Т. 455, № 1. — С. 51–88.
140. *Toth, G.* The $\nabla \cdot \mathbf{B}$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes / G. Toth // J. of Computational Physics. — 2000. — Т. 161. — С. 605–652.
141. *Powell, K. G.* An Approximate Riemann Solver for Magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension) / K. G. Powell // ICASE Report No. 94-24, Langley, VA. — 1994. — Т. 440. — С. 2519.
142. *Ryu, D.* Numerical Magnetohydrodynamics in Astrophysics / D. Ryu, T. W. Jones // Astrophys. J. — 1995. — Т. 442. — С. 228.
143. *Matsumoto, J.* 2D numerical study for magnetic field dependence of neutrino-driven core-collapse supernova models / J. Matsumoto, et al // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2020. — Т. 499. — С. 4174.
144. *Steinmetz, M.* Simulating self-gravitating hydrodynamic flows / M. Steinmetz, E. Mueller // Computer Phys. Commun. — 1995. — Т. 89. — С. 45.
145. Exploring the relativistic regime with Newtonian hydrodynamics: an improved effective gravitational potential for supernova simulations / A. Marek [и др.] // Astron. Astrophys. — 2006. — Т. 445, № 1. — С. 273–289.
146. *LeBlanc, J. M.* A Numerical Example of the Collapse of a Rotating Magnetized Star / J. M. LeBlanc, J. R. Wilson // Astrophys. J. — 1970. — Т. 161. — С. 541.
147. *Balbus, S. A.* A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. I. Linear Analysis / S. A. Balbus, J. F. Hawley // Astrophys. J. — 1991. — Т. 376. — С. 214.
148. *Yoshiaki, K.* Magnetic-Tower Jet Solution for Launching Astrophysical Jets / K. Yoshiaki // High Energy Density Laboratory Astrophysics. — Springer Netherlands-Dordrecht, 2007. — С. 11–15.

149. *Паркер, Е.* Космические магнитные поля, пер. с англ., ч. 1-2 / Е. Паркер. — М.: Мир, 1982.
150. *Sawai, H.* Numerical Simulations of Equatorially Asymmetric Magnetized Supernovae: Formation of Magnetars and Their Kicks / H. Sawai, K. Kotake, S. Yamada // *Astrophys. J.* — 2008. — Т. 672. — С. 465.
151. *Achilleos, N.* Offset magnetic dipoles in white dwarfs / N. Achilleos, D. T. Wickramasinghe // *Astrophys. J.* — 1989. — Т. 346. — С. 444.
152. *Arons, J.* Pulsar Death at an Advanced Age / J. Arons. — *Pulsar Astronomy – 2000, Beyond*, ASP Conference Series, Vol. 202, 2000.
153. *Woosley, S. E.* The Progenitor Stars of Gamma-Ray Bursts / S. E. Woosley, A. Heger // *Astrophys. J.* — 2006. — Т. 637. — С. 914.
154. *Varma, V.* A comparison of 2D Magnetohydrodynamic supernova simulations with the COCONUT-FMT and AENUS-ALCAR codes / V. Varma, B. Müller, M. Obergaulinger // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2021. — Т. 508. — С. 6033.
155. Magnetorotational Collapse of Population III Stars / Y. Suwa [и др.] // *Publ. Astron. Soc. Japan.* — 2007. — Т. 59. — С. 771.
156. Relativistic Equation of State for Core-collapse Supernova Simulations / H. Shen and H. Toki and K. Oyamatsu and K. Sumiyoshi // *Astrophys. J. Suppl.* — 2011. — Т. 197. — С. 20.
157. *O'Connor, E.* A new open-source code for spherically symmetric stellar collapse to neutron stars and black holes / E. O'Connor, C. D. Ott // *Class. Quant. Grav.* — 2010. — Т. 27, № 114103.
158. *Liebendorfer, M.* A Simple Parameterization of the Consequences of Deleptonization for Simulations of Stellar Core Collapse / M. Liebendorfer // *Astrophys. J.* — 2005. — Т. 633. — С. 1042.
159. *Rosswog, S.* High-resolution calculations of merging neutron stars – II. Neutrino emission / S. Rosswog, M. Liebendorfer // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2003. — Т. 342. — С. 673.
160. *Ruffert, M.* Coalescing neutron stars – a step towards physical models. I. Hydrodynamic evolution and gravitational-wave emission / M. Ruffert, H.-T. Janka, G. Schafer // *Astron. Astrophys.* — 1996. — Т. 311. — С. 532.

161. *Janka, H.-T.* Conditions for shock revival by neutrino heating in core-collapse supernovae / H.-T. Janka // *Astron. Astrophys.* — 2001. — T. 368. — C. 527.
162. *Minoshima, T.* A low-dissipation HLLD approximate Riemann solver for a very wide range of Mach numbers / T. Minoshima, T. Miyoshi // *J. Comp. Phys.* — 2021. — T. 208, № 110639.
163. *Obergaulinger, M.* Magnetic field amplification and magnetically supported explosions of collapsing, non-rotating stellar cores / M. Obergaulinger, H. T. Janka, M. A. Aloy" // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — T. 445. — C. 3169.
164. *Spruit, H. C.* Differential rotation and magnetic fields in stellar interiors / H. C. Spruit // *Astron. Astrophys.* — 1999. — T. 349. — C. 189.
165. *Ciolfi, R.* Twisted-torus configurations with large toroidal magnetic fields in relativistic stars / R. Ciolfi, L. Rezzolla // *Mon. Not. R. Astron. Soc. Lett.* — 2013. — T. 435, № 1. — C. 11.
166. *Lai, D.* Pulsar Jets: Implications for Neutron Star Kicks and Initial Spins / D. Lai, D. F. Chernoff, J. M. Cordes // *Astrophys. J.* — 2001. — T. 459. — C. 1111.
167. *Janka, H.-T.* Supernova Fallback as Origin of Neutron Star Spins and Spin-kick Alignment / H.-T. Janka, A. Wongwathanarat, M. Kramer // *Astrophys. J.* — 2022. — T. 926. — C. 9.
168. *Krivosheyev, Y. M.* Monte Carlo Simulations of Radiative and Neutrino Transport under Astrophysical Conditions / Y. M. Krivosheyev, G. S. Bisnovaty-Kogan // *Astron. Rep.* — 2018. — T. 62. — C. 311.
169. *Blinnikov, S. I.* Equation of State of a Fermi Gas: Approximations for Various Degrees of Relativism and Degeneracy / S. I. Blinnikov, N. V. Dunina-Barkovskaya, D. K. Nadyozhin // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 1996. — T. 106. — C. 171.
170. *Chabrier, G.* Equation of state of fully ionized electron-ion plasmas / G. Chabrier, A. Y. Potekhin // *Phys. Rev. E.* — 1998. — T. 58, № 4941.
171. *Antia, H. M.* Rational Function Approximations for Fermi-Dirac Integrals / H. M. Antia // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 1993. — T. 84. — C. 101.

172. *Берестецкий, В. Б.* Квантовая электродинамика / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М.:Наука, 1989.
173. *Шварцшильд, М.* Строение и эволюция звезд / М. Шварцшильд. — М.: Эдиториал УРСС, 2004.
174. *Ardeljan, N. V.* / N. V. Ardeljan, I. S. Gushin // Vestnik MSU. — 1982. — Т. 15, № 3. — С. 3.

Приложение А

Уравнение состояния в оболочке нейтронной звезды и коэффициенты непрозрачности

А.1 Уравнение состояния

Во внешней оболочке НЗ в данной модели мы рассматриваем полностью ионизированную плазму железа ($Z = 26, A = 56$) с вырожденными электронами и невырожденными нерелятивистскими ядрами, при этом пренебрегается кулоновским взаимодействием между электронами и ионами, и не рассматриваются эффекты квантования уровней энергии электронов в магнитном поле (квантование Ландау). В таком приближении давление представлено суммой давлений идеальных газов электронов и ядер

$$P = P_{id}^{(N)} + P_{id}^{(e)},$$

где давление ядер $P_{id}^{(N)} = n_N k_B T$, в котором n_N - концентрация ядер. Давление релятивистских электронов произвольной степени вырождения может быть записано с помощью интегралов Ферми-Дирака [169; 170]:

$$P_{id}^{(e)} = \frac{(2m_e)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3 \beta^{5/2}} (I_{3/2}(\chi, \tau) + \frac{\tau}{2} I_{5/2}(\chi, \tau)) \quad (\text{A.1})$$

Здесь $\beta = (k_B T)^{-1}$, $\chi = \beta \mu_{id}^{(e)}$ - химический потенциал электронов, нормированный на $k_B T$, $\tau = (\beta m_e c^2)^{-1}$, а интеграл Ферми-Дирака определен следующим образом:

$$I_\nu(\chi, \tau) = \int_0^\infty \frac{u^\nu \sqrt{1 + \tau u/2}}{\exp(u - \chi) + 1} du, \quad (\text{A.2})$$

где $u = \beta m_e c^2 (\sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{m_e^2 c^4}} - 1)$, p - импульс электрона.

В пределе $\tau \rightarrow 0$ интегралы Ферми-Дирака превращаются в обычные нерелятивистские интегралы Ферми $I_\nu(\chi)$. Химический потенциал в таком случае может быть получен из соотношения

$$\chi^{nonrel} = X_{1/2}(2\theta^{-3/2}/3) \quad (\text{A.3})$$

где $\theta = T/T_F$, $T_F = m_e c^2 / k_B [\sqrt{1 + x_r^2} - 1]$ - температура Ферми, $x_r = p_{fe} / m_e c$, а X_v - функция, обратная к интегралу Ферми, ее высокоточная аналитическая аппроксимация получена в работе [171]. Точность нерелятивистских формул быстро падает при $T > 10^7 K$, поэтому к данной аппроксимации должна быть добавлена поправка, взятая из работы [170]

$$\chi = \chi^{nonrel} - \frac{3}{2} \log \left[1 + \left(\frac{\tau}{1 + \tau/2\theta} \right) \frac{1 + q_1 \sqrt{\tau} + q_2 q_3 \tau}{1 + q_2 \tau} \right], \quad (\text{A.4})$$

где коэффициенты q_i имеют вид

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{3}{2} (e^\theta - 1)^{-1} \\ q_2 &= 12 + 8\theta^{-3/2} \\ q_3 &= \frac{2}{\pi^{1/3}} - \frac{e^{-\theta} + 1.612e^\theta}{6.192\theta^{0.0944}e^{-\theta} + 5.535\theta^{0.698}e^\theta} \end{aligned}$$

Для релятивистских интегралов Ферми-Дирака использовалась аналитическая аппроксимация с учетом произвольных степеней вырождения и релятивизма электронов, полученная в работе [169].

A.2 Непрозрачности

Тепло в оболочке переносится за счет электронов во внутренних слоях и излучения вблизи поверхности. Ввиду аддитивности коэффициента теплопроводности, полный коэффициент непрозрачности плазмы вдоль нормали к оболочке НЗ находится из коэффициентов фотонной и электронной непрозрачности следующим образом [111]:

$$K^{-1} = K_e^{-1} + K_r^{-1} \quad (\text{A.5})$$

где K_e и K_r - электронная и фотонная непрозрачности, соответственно [111; 120]. Электронная непрозрачность может быть получена из аналогии с лучистой теплопроводностью:

$$K_e = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa_e \rho} \quad (\text{A.6})$$

Здесь κ_e является коэффициентом теплопроводности вдоль нормали к оболочке НЗ ((1.13) с учетом (1.3)) для вырожденных электронов, однако во внешних слоях оболочки электроны могут быть невырождены, поэтому там необходимо использовать формулы для невырожденных электронов. Они также получены в работе [80] методом Чепмена-Энскога для двух- и трех-полиномиального разложения решения уравнения Больцмана по полиномам Сонина-Лагерра. Для случая вдоль поля коэффициент теплопроводности невырожденных электронов запишется следующим образом:

$$\kappa_{e\parallel}^{nd} = \frac{5 k_B^2 T n_e}{2 m_e} \tau_{nd} \frac{25}{4(1 + \sqrt{2}/Z)}, \quad (\text{A.7})$$

где $\tau_{nd} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi}} \frac{(k_B T)^{3/2}}{Z^2 e^4 n_N \Lambda}$ - среднее время между электрон-ионными столкновениями. Коэффициент подавления потока тепла в случае теплопереноса поперек магнитного поля был взят из работы [80]. Заметим, что метод Чепмена-Энскога применим только при $\omega\tau \ll 2\pi$, поэтому при $\omega\tau > 1.5$ мы переходим к классическому соотношению [79] $\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}$ с учетом условия непрерывности κ_{\perp}^{nd} .

Коэффициент теплопроводности для сильно вырожденной материи вдоль поля равен $\kappa_{\parallel}^{sd} = \frac{5\pi^2 k_B^2 T n_e}{6 m_e^*} \tau$. Поперек поля коэффициент подавляется на фактор $\left(\frac{1}{1+(\omega\tau)^2} - \frac{6}{5} \frac{(\omega\tau)^2}{(1+(\omega\tau)^2)^2}\right)$ при $\omega\tau \ll 2\pi$, а при $\omega\tau > 1.5$ мы также переходим к приближенному соотношению $\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}$ также с учетом условия непрерывности κ_{\perp} .

Для использования формул выше в расчетах, необходимо сшить невырожденный и сильно вырожденный пределы, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa_e &= \frac{1 - \chi}{2 - \chi} \kappa_e^{nd} + \frac{1}{2 - \chi} \kappa_e^{sd}, \quad \chi \leq 0, \\ \kappa_e &= \frac{1}{2 + \chi} \kappa_e^{nd} + \frac{1 + \chi}{2 + \chi} \kappa_e^{sd}, \quad \chi \geq 0, \end{aligned}$$

где $\chi = \mu_{id}^{(e)}/(k_B T)$. Учет невырожденных коэффициентов теплопроводности влияет на результаты расчетов незначительно, поскольку при плотностях, где электроны невырождены, тепло передается, главным образом, излучением.

Основной вклад в радиационную непрозрачность вносят свободно-свободное и связанно-свободное поглощение, а также Томсоновское рассеяние. В отсутствие магнитного поля Томсоновская непрозрачность в нерелятивистском пределе записывается следующим образом [172]:

$$K_{Th} = \frac{n_e \sigma_T}{\rho} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{n_e}{\rho}, \quad (\text{A.8})$$

где σ_T - Томсоновское сечение рассеяния, $\frac{e^2}{m_e c^2}$ - классический радиус электрона.

Сечение свободно-свободного поглощения с учетом спонтанного и вынужденного излучения в условиях локального термодинамического равновесия в нерелятивистском случае дается следующей формулой [111]:

$$\sigma_{aff}^* = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m_e^2 c h v \nu^3} g_{ff} (1 - e^{-h\nu/k_B T}), \quad (\text{A.9})$$

где v - скорость электрона, ν частота фотона, g_{ff} - близкий к единице фактор Гаунта, учитывающий квантовые поправки к классической формуле. Чтобы получить коэффициент поглощения [111] на одной частоте, необходимо провести усреднение по Ферми-Дираку:

$$\alpha_{ff}^\nu = \frac{8\pi m_e^3}{A m_u h^3} \int_0^\infty \frac{\sigma_{aff}^* v^2 dv}{1 + \exp\left(\frac{mv^2}{2k_B T} - \chi\right)} q_{ff},$$

$$q_{ff} = \left(1 + \exp\left(\chi - \frac{h\nu}{k_B T} - \frac{mv^2}{2k_B T}\right)\right)^{-1},$$

где m_u - атомная единица массы, а фактор q_{ff} определяет долю незаполненных состояний электронов в вырожденном газе. Данный интеграл берется в квадратурах, усреднение дает

$$\alpha_{ff}^\nu = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{8\pi Z^2 e^6}{A m_u c h^4 \nu^3} g_{ff} k_B T \log\left(\frac{e^\chi + 1}{e^{\chi - h\nu/k_B T} + 1}\right). \quad (\text{A.10})$$

Для нахождения непрозрачности для свободно-свободных переходов, необходимо выражение (A.10) усреднить по Росселанду [111] следующим образом:

$$K_{ff} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_{ff}^\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu},$$

где $B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$ - интенсивность равновесного планковского излучения. Усреднение по Росселанду дает следующее выражение для невырожденного случая [111]:

$$K_{ff}^{nd} = 4.34 \cdot 10^{22} \frac{\rho}{T^{7/2}} \frac{Z^2}{A}, \quad (\text{A.11})$$

а в сильно вырожденном пределе K_{ff} запишется в виде

$$K_{ff}^{sd} = 0.036 \frac{32\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^6 g_{ff}}{m_u c h k_B^2} \frac{Z^2}{A T^2}. \quad (\text{A.12})$$

Сечение связанно-свободного поглощения дается следующей формулой [111] в нерелятивистском пределе:

$$\alpha_{bf}^{\gamma} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^6 h^2}{m_e^{3/2} c m_u (k_B T)^{7/2}} \frac{Z^2}{A} n_e g_{bf} \times \left[\frac{1}{n} \frac{E_b}{k_B T} \exp^{E_b/k_B T} \left(\frac{k_B T}{h\nu} \right)^3 q_{bf} \right],$$

$$E_b = \frac{2\pi^2 m_e Z^2 e^4}{h^2 n^2},$$

$$q_{bf} = \left(1 + \exp \left(\chi - \frac{h\nu}{k_B T} + \frac{E_b}{k_B T} \right) \right)^{-1},$$
(A.13)

где E_b - энергия уровня связанного электрона в водородоподобном ионе, n - номер уровня, g_{bf} - фактор Гаунта, q_{bf} - поправка на вырождение электронов. Чтобы получить коэффициент Росселандовой непрозрачности, необходимо просуммировать выражение в квадратных скобках в α_{bf}^{γ} в (A.13) по всем связанным состояниям, а затем усреднить полученное выражение по Росселанду. Для невырожденных электронов мы использовали значение K_{bf} из книги [111]:

$$K_{bf}^{nd} = 7.23 \cdot 10^{24} \frac{\rho}{T^{7/2}} \frac{Z^2}{A} \frac{g_{bf}}{t},$$
(A.14)

где множитель $\frac{t}{g_{bf}}$ принимает значения от единицы до десяти. При росте плотности электронный газ во внешней оболочке НЗ быстро переходит к сильному вырождению. Чтобы приближенно учесть влияние вырождения на связанно-свободное поглощение, запишем суммирование α_{bf}^{γ} в (A.13) по связанным электронным состояниям:

$$\alpha_{bf}^{\gamma} = K_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_b}{n k_B T} \frac{e^{-\chi}}{x^3} \frac{e^x - 1}{e^{x - \frac{E_b}{k_B T} - \chi} + 1},$$
(A.15)

где $K_0 = K_{bf}^{nd} \cdot t$, а $x = \frac{h\nu}{k_B T}$. В выражении выше при сильном вырождении $\chi \gg 1$, и поэтому в сечение поглощения вносят вклад в основном только очень жесткие кванты на хвосте планковского спектра, которые не внесут существенного вклада в среднюю непрозрачность. Пренебрегая экспонентой $e^{x - \frac{E_b}{k_B T} - \chi}$ в (A.15) и усредняя по n и по частотам аналогично расчетам, приведенным в книге М.Шварцшильда [173] для невырожденного случая, можно получить следующее приближенное выражение:

$$K_{bf}^{sd} = K_0 e^{-\chi} \frac{g'_{bf}}{t'},$$
(A.16)

где множитель $\frac{t'}{g_{bf}}$ также принимает значения от единицы до десяти.

Для использования формул (A.11),(A.12) для ff-переходов и (A.14),(A.16) для bf-переходов в расчетах, их необходимо непрерывно сшить, например, следующим образом:

$$K_{ff,bf} = K_{ff,bf}^{nd} \frac{1}{1 + e^{m\chi}} + K_{ff,bf}^{sd} \frac{e^{m\chi}}{\varepsilon + e^{m\chi}}, \quad (\text{A.17})$$

где $m, \varepsilon > 1$ - числа, определяющие плавность перехода от одного предела к другому. При этом в K_{bf}^{sd} необходимо $\chi = \frac{\mu_c}{k_B T}$ заменить на его модуль. Таким образом, в отсутствие магнитного поля фотонная непрозрачность складывается из томсоновской, связанно-свободной и свободно-свободной непрозрачностей: $K_r(\rho, T)_{B=0} = K_{Th} + K_{bf} + K_{ff}$.

Таблица 11 — Коэффициенты для a_n , b_n и c_n из (A.18).

n	a_n	b_n	c_n
1	0.2587	0.1941	0.0533
2	0.0949	0.0610	0.090
3	0.1619	0.1400	0.0993
4	0.2533	0.1547	0.231
5	0.3418	0.0415	2.15
6	0.4760	0.3115	0.2377

Мы учли влияние магнитного поля на непрозрачность таким же образом, как и в работе [75]. Авторы цитируемой здесь работы построили аналитическую аппроксимацию полученных численно свободно-свободных и Томсоновских непрозрачностей в магнитном поле [121]. Росселандовы непрозрачности вдоль и поперек поля записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{K_{r\parallel}(\rho, T, B)}{K_r(\rho, T, 0)} &= \frac{1 + A_1 u^2}{1 + A_1 u^2 + A_2 u^3 + (A_3 u)^2 u^2} \\ \frac{K_{r\perp}(\rho, T, B)}{K_r(\rho, T, 0)} &= \frac{1 + A_4 u^2}{1 + (A_5 u)^{3.5} + (A_6 u)^4} \\ A_n &= a_n - b_n f^{c_n}, \quad f = \frac{K_{ff}}{K_{ff} + K_{Th}} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

В формуле выше $u = T_B/(2T)$, где $T_B = \hbar\omega_g/k_B$, $\omega_g = \omega/\sqrt{1 + x_r^2}$. В Таблице 11 приведены коэффициенты для A_n . Влияние магнитного поля на связанно-свободное поглощение мы учли таким же образом, как и на свободно-свободное.

Приложение Б

Метод опорных операторов на сетке, состоящей из тетраэдров

Для численного решения задачи о распространении тепла в коре нейтронной звезды была применена разностная схема на основе операторного подхода, предложенного академиком А.А. Самарским. Метод опорных операторов (операторно-разностный метод, метод Самарского) был развит А.А.Самарским [30] и его учениками. В работах Н.В. Арделяна на основе методики опорных операторов был разработан операторно-разностный метод для уравнений математической физики на треугольной сетке [23; 102; 174]. Данный метод позволяет получить полностью консервативные разностные схемы, при этом сеточные аналоги дифференциальных операторов векторного анализа удовлетворяют сеточным аналогам соответствующих соотношений (сопряженность градиента и дивергенции, равенство нулю дивергенции от ротора, ротора от градиента и т.д.), что и сами дифференциальные операторы. В двумерной лагранжевой постановке этот метод был успешно применен для численного решения ряда астрофизических задач, таких как коллапс быстровращающегося замагниченного протозвездного облака [22], магниторотационный взрыв сверхновой [41] и др.

Данный метод был развит нами для решения трехмерных задач. Были построены трехмерные конечно-разностные аппроксимации основных дифференциальных операторов (дивергенция, градиент и др.) векторного анализа на неоднородной сетке, состоящей из тетраэдров. При построении сеточных операторов использовалась ячеечно-узловая аппроксимация, означающая, что некоторые функции определены в узлах сетки, а некоторые функции определены в ячейках сетки и граничных узлах. При получении операторов использовались разностные аналоги интегральных соотношений, и полученные с использованием такого подхода разностные операторы удовлетворяют тем же тождествам, что и сами дифференциальные операторы. Для разностной аппроксимации различных краевых задач были построены (также с учетом сеточных аналогов интегральных соотношений) граничные операторы, отвечающие за дифференцирование функций в граничных узлах расчетной области. Схема построения граничного оператора допускает несколько вариантов шабло-

на для него: один локальный (оператор строится с учетом значений функции, на которую он действует, только в искомом граничном узле) и два нелокальных (оператор строится с учетом значений функции в искомом граничном узле и в граничных узлах-соседях). Все три варианта шаблона для граничных операторов были построены и протестированы вместе с аппроксимациями дифференциальных операторов внутри расчетной области.

В следующих подразделах приведены вывод вышеупомянутых операторов и описание методики численного решения краевой задачи для трехмерного уравнения теплопроводности в коре НЗ (1.18).

Б.1 Разностные аналоги дифференциальных операторов

Рассмотрим сетку, состоящую из тетраэдров. На этой сетке, следуя [23; 102; 174], введем линейные сеточные пространства ячеечных функций, узловых функций и функций, определенных в граничных узлах. Такой формальный подход позволяет исследовать разностные схемы на аппроксимацию и устойчивость при помощи современных эффективных методов [30; 101].

Сначала мы введем сеточный оператор градиента, который переводит скалярную узловую функцию в ячейечную векторную функцию. Для определения сеточного аналога непрерывного градиента мы использовали следующее инвариантное определение оператора *grad*:

$$\nabla p = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S p * d\vec{S}. \quad (\text{Б.1})$$

Пусть p скалярная узловая сеточная функция. Внутри каждой ячейки мы дополнительно определяем ее как линейную интерполяцию узловых значений p в узлах, по которым строится ячейка.

После интегрирования этой линейной интерполяции при помощи теоремы о среднем, получаем определение сеточного аналога оператора *grad*:

$$(\nabla_{\Delta} p)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{k=1}^4 (\bar{p}_k S_k \vec{n}_k)_i. \quad (\text{Б.2})$$

Здесь $\bar{p}_k = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)_k}{3}$ - это среднее интерполированное значение p в k -ой грани тетраэдра, индексы 1, 2 и 3 отвечают узловым значениям p в k -ой грани; \vec{n}_k -

это единичная внешняя по отношению к тетраэдру нормаль к k -ой грани, S_k - площадь k -ой грани ячейки, и V_i - это объем ячейки с индексом i . Выражение (Б.2) является аппроксимацией первого порядка для дифференциального оператора $grad$. Сеточные аналоги других операторов (переводящих функции из узлов в ячейки), таких как $div(vector)$, $div(tensor)$, $grad(vector)$, $rot(vector)$ и т.д., могут быть получены аналогичным образом.

Введем скалярные произведения в сеточных линейных пространствах $(p, g)_\alpha = \sum_s U_s p_s g_s$, α отвечает ячеечным и узловым пространствам. Для ячеек $U_s = V_i$ - объем ячейки, для узлов $U_s = W_j$, здесь $W_j = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{K_j} V_k$ - "объем узла" (см. [23] и ссылки в ней).

Разностный аналог оператора дивергенции (оператор действует на ячеечную векторную функцию, результат действия оператора - узловая скалярная функция) строится таким образом, чтобы быть сопряженным разностному оператору $-grad$ (Б.2). Для этого используется формула Грина и ее разностный аналог (в случае, когда все функции обращаются в ноль на границе расчетной области или сама область бесконечна):

$$\int p \nabla \cdot \vec{v} dV + \int \vec{v} \cdot \nabla p dV = 0 \quad (\text{Б.3})$$

Сеточный аналог формулы Грина (Б.3) записывается в терминах скалярного произведения в соответствующих сеточных пространствах:

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \nabla_\Delta p) + (\nabla_\times \cdot \vec{v}, p) &= 0, \\ \sum_{l=1}^{N_l} \nabla_\times \cdot \vec{v}_l p_l W_l &= - \sum_{k=1}^{K_j} \vec{v}_k \nabla_\Delta p_k V_k. \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

После перегруппировки членов в (Б.4) разностный аналог для оператора div в искомом j -ом узле может быть записан в следующей форме:

$$(\nabla_\times \cdot \vec{v})_j = - \frac{1}{3W_j} \sum_{k=1}^{K_j} \vec{v}_k \cdot (\vec{n}_1 S_1 + \vec{n}_2 S_2 + \vec{n}_3 S_3)_k, \quad (\text{Б.5})$$

здесь K_j - это число соседей-ячеек узла j , \vec{v}_k - значение ячеечной функции \vec{v} в k -ой ячейке. Индексы 1, 2 и 3 соответствуют граням ячейки k , включающим узел j . Суммирование производится по всем ячейкам, прилегающим к j -му узлу.

Б.2 Граничные операторы

Для численного решения краевых задач необходимо сформулировать сеточные аналоги краевых условий различного вида.

По аналогии с двумерным подходом из [23], введем граничный оператор Φ на трехмерной сетке из тетраэдров. Оператор Φ действует на элементы из пространства функций в граничных узлах. Результат действия граничного оператора - функция, определенная в граничных узлах сетки (при этом сам тип функции после действия граничного оператора меняется: вектор становится скаляром, диадик - вектором и т.п.). Оператор строится так, чтобы удовлетворять аналогу интегрального соотношения Грина для области вместе с границей:

$$(p, \nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla p, \vec{v}) = \oint p \vec{v} d\vec{S},$$

$$\sum_{l=1}^{N_l} \nabla_{\times}^0 p_l \vec{v}_l W_l + \sum_{k=1}^{K_j} p_k \nabla_{\Delta} \cdot \vec{v}_k V_k = \sum_{q=1}^{K_{\gamma}} \Phi \cdot \vec{v}_q p_q W_q, \quad (\text{Б.6})$$

здесь K_{γ} это количество граничных соседей-узлов к искомому граничному узлу с индексом γ , W_q - это "объем" граничного узла [23]. Верхний нулевой индекс в ∇_{\times}^0 означает, что оператор действует только на ячеечные функции.

Граничный оператор Φ может быть введем тремя способами, которые приводят к трем разным шаблонам для этого оператора. Первый способ - это простое численное интегрирование по поверхности ячеек в окрестности соответствующего граничного узла

$$(\Phi \cdot \vec{v})_{\gamma} = \frac{\vec{v}_{\gamma}}{3W_{\gamma}} \cdot \sum_{q=1}^{K_{\gamma}} \vec{n}_q S_q. \quad (\text{Б.7})$$

Заметим, что эта аппроксимация граничного оператора требует значения граничной функции только в самом искомом узле (локальный шаблон). При этом данный оператор теряет аппроксимацию в случае, если граница не очень гладкая [174].

Второй способ - численное интегрирование с учетом интерполяции граничной функции из соседних граничных узлов:

$$(\Phi \cdot \vec{v})_{\gamma} = \frac{1}{9W_{\gamma}} \sum_{q=1}^{K_{\gamma}} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_{\gamma})_q \cdot \vec{n}_q S_q. \quad (\text{Б.8})$$

В (Б.8) \vec{v}_1 и \vec{v}_2 это значения функции \vec{v} в граничных узлах, на которых лежит q -ая граничная грань ячейки, прилежащей к граничному узлу γ . Чтобы получить третью формулу, вводятся фиктивные ячейки вне расчетной области, далее вывод Φ проводится так же, как и в работе [102]. В итоге получается следующая аппроксимация граничного оператора Φ :

$$(\Phi \cdot \vec{v})_\gamma = \frac{1}{12W_\gamma} \left(\sum_{q=1}^{K_\gamma} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_\gamma)_q \cdot \vec{n}_q S_q + \vec{v}_\gamma \cdot \sum_{q=1}^{K_\gamma} \vec{n}_q S_q \right). \quad (\text{Б.9})$$

Разностная аппроксимация оператора div с учетом границы может быть записана в виде $(\nabla \cdot \vec{v} = \nabla_\times^0 \cdot \vec{v} + \Phi \cdot \vec{v} + O(\Delta x)$, Δx - характерный размер ячейки). Трехмерные граничные операторы для других разностных аналогов операторов, переводящих функции из ячеек в узлы, могут быть построены аналогичным образом.

Б.3 Тестирование построенных операторов

Для тестирования полученных аналогов разностных операторов был проведен ряд отладочных расчетов для различных эллиптических уравнений с граничными условиями Дирихле и Неймана, а также смешанными граничными условиями. В качестве иллюстрации в данном разделе представлены результаты моделирования краевой задачи для уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле в шаре единичного радиуса. Дифференциальная формулировка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta U = f, \\ U|_{\Gamma} = U_\gamma, \end{cases} \quad (\text{Б.10})$$

где $f = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Общее решение системы (Б.10) может быть получено при помощи метода объемных потенциалов

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{d\vec{r}^* f(\vec{r}^*)}{|\vec{r}^* - \vec{r}|}. \quad (\text{Б.11})$$

Для численного решения системы (Б.10) нам необходимо знать значения искомой функции U в граничных узлах сетки. Аппроксимация формулы (Б.11) на тетраэдрической сетке для нахождения решения в граничных узлах U_γ имеет следующий вид:

$$U_\gamma(\vec{r}_q) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{K_j} \frac{V_k f(\vec{r}_\Delta)}{|\vec{r}_\Delta - \vec{r}_q|}, \quad (\text{Б.12})$$

в которой \vec{r}_Δ – среднее по ячейке значение вектора координат \vec{r} , а K_j – это полный набор ячеек сетки.

Аналогично подходу, разработанному в работе [23], мы включаем сеточные граничные условия в операторно-разностную форму задачи. Запишем уравнение Пуассона в граничных узлах, а также выделим границу в самом уравнении, определенном в расчетной области:

$$\begin{aligned} \delta \nabla_\times \cdot \nabla_\Delta U_\gamma &= \delta f, \\ \nabla_\times \cdot \nabla_\Delta (I - \delta)U + \nabla_\times \cdot \nabla_\Delta \delta U &= f, \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

где оператор δ в выражениях выше равен нулю во внутренних узлах сетки и единице – в граничных узлах, а I – единичный оператор. Вычитая в выражении выше одно уравнение из другого, можно получить искомую операторную задачу:

$$(I - \delta) \nabla_\times \cdot \nabla_\Delta (I - \delta)U = (I - \delta)f - (I - \delta) \nabla_\times \cdot \nabla_\Delta U_\gamma. \quad (\text{Б.14})$$

Можно увидеть, что сеточная формулировка задачи приводит к решению только одного операторного уравнения, учитывающего граничные условия, в котором $(I - \delta) \nabla_\times \cdot \nabla_\Delta (I - \delta)$ – это сеточный оператор Лапласа. В силу сопряженности разностных операторов, разностный аналог оператора Лапласа является самосопряженным, как и исходный непрерывный оператор. Это приводит к тому, что матрица оператора является симметричной и положительно определенной, и для решения уравнения (Б.14) можно использовать любой из эффективных итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей.

Решение операторно-разностного уравнения Пуассона (Б.14) вместе с аналитическим решением уравнения (Б.10) представлено на Рис. Б.1. Максимальная относительная ошибка на сетке из ~ 2000 узлов не превышает 5%.

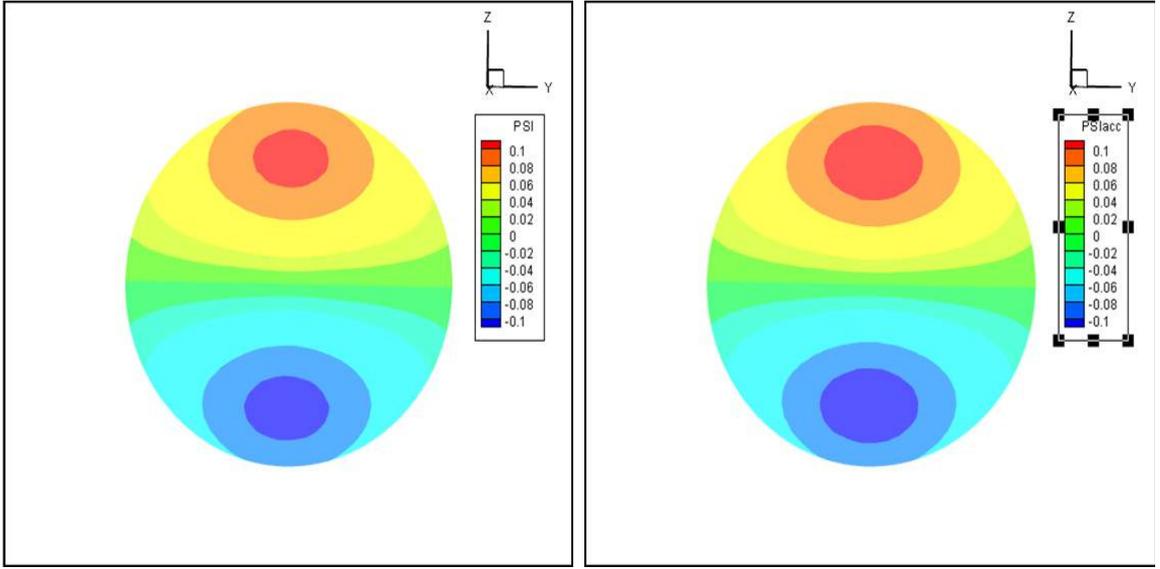


Рисунок Б.1 — Решение U задачи Дирихле для уравнения Пуассона (Б.10) (сечение в плоскости Y - Z), левая панель – численное решение, правая панель – точное решение.

Б.4 Операторная формулировка краевой задачи для уравнения теплопроводности в коре нейтронной звезды

При помощи подхода, разработанного в [23], нам необходимо включить граничные условия в операторно-разностную форму решаемой задачи. Запишем систему уравнений (1.18) в разностной форме во всей области вместе с границей:

$$\begin{cases} \nabla_{\times}^0 \cdot \kappa \cdot \nabla_{\Delta} T + \delta_1 \Phi \cdot \kappa \cdot \Phi^* T + \delta_2 \Phi \cdot \kappa \cdot \Phi^* T = 0, \\ \delta_1 T = T_{core}, \\ \delta_2 (\kappa \cdot \Phi^* T + \vec{n} \sigma T_s^4) = 0. \end{cases} \quad (\text{Б.15})$$

Здесь операторы $\delta_{1,2}$ определены аналогично оператору δ из предыдущего раздела, индексы 1 и 2 отвечают сорту границы: 1 - внутренняя, 2 - внешняя граница. При этом температура поверхности определяется по $T_s - T_b$ -соотношению: $T_s = T_s(\delta_2 T)$. Температура задана в узлах сетки, а магнитное поле и плотность - в ячейках и граничных узлах сетки. Слагаемые $\delta_{1,2} \Phi \cdot \kappa \cdot \Phi^* T$ в первом уравнении (Б.15) доопределяют уравнение теплопроводности на границах области. Φ^* - это граничный оператор, сопряженный к Φ . Он также определяется формулой (Б.9), но действует на скалярную функцию как градиент в граничных узлах сетки.

Подействуем на последнее уравнение в (Б.15) скалярным граничным оператором Φ и вычтем его из первого уравнения, получится следующая система

$$\begin{cases} \nabla_{\times}^0 \cdot \kappa \cdot \nabla_{\Delta} T + \delta_1 \Phi \cdot \kappa \cdot \Phi T - \delta_2 \Phi \cdot \vec{n} \sigma T_s^4 = 0 \\ \delta_1 T = T_{core} \end{cases}$$

После этого выделим первую границу в первом уравнении из (Б.15) и умножим первое уравнение из (Б.15) на δ_1 , затем, после вычитания одного выражения из другого и подстановки граничного условия Дирихле на внутренней границе можно получить итоговую операторно-разностную задачу:

$$(I - \delta_1) \nabla_{\times}^0 \cdot \kappa \cdot \nabla_{\Delta} (I - \delta_1) T + (I - \delta_1) \nabla_{\times} \cdot \kappa \cdot \nabla_{\Delta} T_{core} - \delta_2 \Phi \cdot \vec{n} \sigma T_s^4 = 0. \quad (\text{Б.16})$$

Полученное операторное уравнение является конечно-разностной аппроксимацией решаемой краевой задачи (1.18).

Б.5 Алгоритм решения задачи о теплопроводности во внешних слоях замагниченных НЗ

В работе ищется стационарное распределение температуры для краевой задачи (1.18) с граничными условиями (1.17). При этом необходимо решать эту задачу самосогласованно, поскольку поверхностная температура T_s , входящая в краевое условие на внешней границе (1.17), сама является функцией температуры в коре. Нами была реализована итерационная процедура установления (релаксации): задача решается с граничными условиями первого рода на внутренней границе и второго рода на внешней границе до тех пор, пока не выполнится неравенство $\max \left| \frac{T_s^n - T_s^{n-1}}{T_s^{n-1}} \right| < \varepsilon$, где n - номер итерации, ε - это некоторое заданное малое число. При этом после каждой итерации значение T_s уточняется при помощи $T_s - T_b$ -соотношения по полученному в ходе предыдущей итерации значению температуры на внешней границе коры. T_s^0 для граничного условия на первой итерации решения данной задачи получается из начального приближения для температуры коры. Это, в некотором смысле, эквивалентно решению нестационарного трехмерного уравнения теплопроводности с граничными условиями первого и третьего рода, причем значение потока тепла $\sigma T_s^4(T)$ в граничном условии (1.18) берется с предыдущего слоя по времени. На каждой

итерации по "времени" система уравнений (1.18) решается операторно-разностным методом, описанным выше.

Операторно-разностное уравнение (Б.16) нелинейно по T^n и решается для каждого n методом Ньютона, на каждой итерации по методу Ньютона возникающая система линейных алгебраических уравнений решается итерационным методом Зейделя. Таким образом, следуя описанной выше итерационной процедуре, можно получить самосогласованные распределения температуры в объеме коры и на поверхности НЗ.