Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образобания
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Вэй Ян Сое

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА ОТ ПРЕЦЕССИИ ОРБИТЫ ЛУНЫ

Специальность:01.03.01 – “Астрометрия и небесная механика”

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н.
ПЕРЕПЁЛКИН Вадим Владимирович

Москва– 2022

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В движении земного полюса, как известно [43, 72], выделяются основные составляющие - чандлеровское и годичное колебания, долгопериодический тренд, а также нерегулярные колебания, в том числе стохастического характера [8, 34, 38, 44, 65, 66, 69]. Проблема построения модели и прогноза движения земного полюса связана в первую очередь с нерегулярным поведением его основных компонент [72, 76].

Обычно под чандлеровским колебанием земного полюса понимают его колебание с частотой свободной нутации оси вращения Земли (с чандлеровской частотой) в связанной системе координат [2, 6, 25]. Его можно рассматривать и в более узком смысле, как установившийся режим колебаний на чандлеровской частоте [7, 8] и в более широком смысле - как многочастотный колебательный процесс с основной частотой, близкой к чандлеровской [4, 48, 76]. Однако дать однозначное определение, которое полностью соответствовало бы рассматриваемому физическому процессу весьма затруднительно. Неопределенность в интерпретации чандлеровской компоненты связана с отсутствием исчерпующего объяснения механизма ее возбуждения [26, 28, 76]. В некоторых случаях удобно воспользоваться терминологией теории возмущений. Если установившийся режим чандлеровских колебаний полюса (с постоянной частотой и средней амплитудой) формально принять за "невозмущенный", то в качестве возмущений можно рассматривать те возмущения, которые приводят к вариациям параметров чандлеровского колебания [40, 50]. Хотя нужно заметить, что и установившийся режим чандлеровского колебательного процесса это возмущенное движение.

Вопрос объяснения механизма возбуждения чандлеровского колебания является одним из основополагающих в исследовании движения земного полюса. По крайней мере часть возмущений, приводящих к вариациям параметров чандлеровского колебания оказываются следствием механизма её возбужения. Поэтому исследование переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса (вообще говоря не только чандлеровской, но и годичной) представляет значительный интерес не только для задачи прогнозирования движения полюса, но и связана с изучением механизма возбуждения чандлеровскогго колебания [2, 3]. В первую очередь задача состоит в установлении небесномеханических и геофизических причин такого поведения чандлеровской компоненты колебаний.

Факторы, влияющие на движение Земли относительно центра масс можно условно разделить на астрономические и геофизические. Движение Земли в космическом пространстве, а также движение ее подвижных сред происходит под влиянием тел Солнечной системы и в первую очередь Солнца и Луны [24, 90]. Поэтому в вопросах исследования движения Земли естественным и необходимым является совместный учет астрономических и геофизических факторов в савокупности [59, 61, 62]. Лунно-солнечные гравитационные возмущающие силы приводят к прецессии и нутации Земли. В отличие от прецессии и нутации свойство деформируемости Земли и подвижность ее различных сред является уже определяющими для движения мгновенной оси вращения в теле Земли. И в этом случае важным является не только учет подвижности сред, но и влияющих на них астрономических факторов [58, 83], поскольку за время эволюции Солнечной системы многие процессы надо полагать синхронизированными [1, 85, 86].

Этой теме посвящено немало научных работ. Например, в исследовании [29] рассматривается идеализированная модель влияния Луны на изменения параметров чандлеровского колебания, основанная на дифференциальных уравнениях связанных осцилляторов. В работе [31] изучается влияние параметрического резонанса в системе Земля-Луна на чандлеровское колебание и приводится качественное сравнение с "эмпирическими законами Мельхиора" [76]. В работах [60, 67, 68, 82, 93] устанавливается взаимосвязь вариаций амплитуды и фазы чандлеровской компоненты с геофизическими процессами в атмосфере и океанах. В ряде работ [30, 50, 53, 59, 61, 84, 92] рассматриваются вопросы о связи пространственного движения лунной орбиты с чандлеровским колебанием, обсуждается синхронизация чандлеровского колебания с 18-летним приливным циклом. В частности, в [92] установлено наличие 18-летнего цикла функции возбуждения чандлеровского колебания, приводящего к удвоенному периоду в амплитудной модуляции чандлеровской компоненты. В работах [50, 73, 77] с помощью обработки и анализа данных наблюдений и измерений ряда C04 о движении земного полюса Международной службы вращения Земли (МСВЗ) показано наличие колебательного процесса, синфазного с прецессионным движением орбиты Луны. Однако, вопросы о синхронизации колебаний полюса с прецессией лунной орбиты и о влиянии Луны на его колебательный процесс еще мало изучены и требуют более детального рассмотрения.

Цель данной диссертационной работы состоит в развитии работы [48], то есть в дальнейшем исследовании свойств колебательного процесса земного полюса с периодом прецессии орбиты Луны и особенностей их синхронизации на более длительном интервале времени. Для этого использовался ряд C01 данных МСВЗ [72] о движении земного полюса, начиная с 1900 года. Численная обработка и анализ длительного ряда C01 проводилась во многих исследованиях, например, в [74, 81]. Однако, проблемы колебаний параметров движения земного полюса (параметров чандлеровских и годичных компонент), происходящих с частотой, близкой к частоте прецессии лунной орбиты обсуждаются достаточно редко.

Актуальность темы исследования. Исследование движения Земли относительно центра масс представляет как естественнонаучный, так и практический интерес. Определение ориентации Земли в небесной геоцентрической системе координат GCRS (Geocentric Celestial Reference System) является одной из важных задач астрометрии, небесной механики и геофизики. Ее решение имеет важные технические приложения и связано с уточнением координатно-временного и навигационного обеспечения спутниковых систем. Ориентация Земли в неподвижном пространстве задается пятью параметрами вращения Земли (ПВЗ), два из которых – координаты земного полюса являются наиболее трудно прогнозируемыми. Это связано с тем, что движение мгновенной оси вращения в теле Земли имеет квазирегулярный характер и определяется астрономическими и геофизическими факторами в савокупности.

Задача о движении земных полюсов имеет более чем столетнюю историю. На сегодняшний день получили качественное объяснение ряд динамических эффектов в движении полюсов (короткопериодические и долгопериодические приливные колебания, некоторые свойства чандлеровской и годичной компонент и их связь с геофизическими процессами), разработаны различные варианты моделей прогноза движения полюса. Однако, как теоретическая модель, так и реализация моделей прогноза его движения далеки от завершенности. Существующие математические модели не в полной мере описывают процесс движения полюса. В частности, при построении прогноза его движения учет вариаций параметров чандлеровской и годичной компонент пока возможен только в рамках численного подхода.

В диссертационной работе решается ***актуальная*** *задача уточнения модели колебаний земного полюса и исследования новых свойств его движения, связанных с долгопериодическими лунными возмущениями.*

Цель диссертационной работы состоит в исследовании особенностей синхронизации поведения чандлеровской и годичной компонент земного полюса с пространственным движением лунной орбиты, а также в разработке и уточнении численно-аналитической модели движения земного полюса, адекватной данным наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 127 страниц, из них 113 страниц текста, включая 41 рисунок.

В **первой главе** диссертации показано существование различных режимов колебательного процесса земного полюса. Установлено, что изменение соотношения амплитуд основных составляющих колебания полюса приводит к изменению средних параметров его движения.

В первой части главы дана общая постановка задачи о невозмущенном движении деформируемой Земли относительно центра масс, приведены основные положения, связанные с вариациями компонент тензора инерции вращающейся деформируемой Земли и с вычислением вектора кинетического момента и его производной по времени. Выписаны дифференциальные уравнения возмущенного движения земного полюса с учетом вращательной деформации, приведено их решение для установившегося чандлеровского колебания.

Во второй части главы исследуется эффект изменения средней частоты движения земного полюса в момент смены ведущей гармоники (с большей амплитудой). Рассмотрены кинематические свойства движения полюса в окрестности изменения средней частоты его движения.

Во **второй главе** диссертации исследуется динамика возмущенного колебательного процесса земного полюса, синфазного с прецессионным движением лунной орбиты.

В первой части главы предложено несколько способов преобразования координат земного полюса к системе, в которой его движение происходит синфазно с изменением ориентации плоскости лунной орбиты по отношению к экватору Земли. Параметры преобразования определяются средними параметрами движения земного полюса и не зависят явно от времени. С помощью численной обработки ряда C01 данных наблюдений и измерений о движении земного полюса на длительном интервале времени начиная с 1900 года выделен колебательный процесс земного полюса, связанный с прецессионным движением орбиты Луны. Показано, что в новой системе координат после преобразования полярный радиус совершает колебания, синфазные с колебаниями угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору, а колебания полярного угла происходят синфазно с отклонением вдоль экватора точки пересечения лунной орбиты с экватором.

Во второй части главы исследуется вклад основных геофизических возмущений (атмосферного и океанического) в колебательный процесс, синфазный с прецессией лунной орбиты. Получены решения дифференциальных уравнений движения земного полюса с учетом кинетического момента атмосферы и углового момента океана и выделена 18-летняя гармоника рассматриваемого колебательного процесса. Показано, что найденные гармоники только частично могут быть обусловлены колебаниями подвижных сред атмосферы и океана.

В **третьей главе** предлагается модификация преобразования на основе аналитического представления амплитуды и вариации полярного угла, которая позволяет упростить идентификацию 18-летних колебаний в движении земного полюса.

В первой части главы рассмотрено несколько способов определения вариаций полярного радиуса после преобразования, использованного в главе 2. Показано, что полярный радиус в новой системе координат определяется огибающими амплитуды движения полюса в исходной системе, а точность определения огибающих амплитуды достаточна для определения 18-летнего цикла.

Во второй части главы получено аналитическое выражение вариации полярного угла в новой системе после рассмотренного преобразования. Показано, что для определения вариаций полярного угла достаточно знать полярные координаты движения полюса вокруг среднего положения в исходной системе координат и временные моменты перехода колебаний полюса из одного режима в другой. Установлено, что найденные колебания полюса, согласованные с пространственным движением орбиты Луны, обусловлены вариациями амплитуды и фазы как чандлеровской, так и годичной составляющих одновременно.

Четвертая глава диссертационной работы посвящена уточнению модели прогнозирования движения земного полюса с учетом долгопериодических лунных возмущений с частотой прецессии орбиты Луны.

В первой части главы с помощью численной обработки данных наблюдений на основе спектрального анализа показано, что амплитуда найденного 18-летнего колебательного процесса не является постоянной, а его частота и фаза стабильны и согласованы с изменением угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору. Установлено, что амплитуда 18-летней цикличности испытывает вариацию с периодом вдвое большим.

Во второй части приводятся результаты численного моделирования на длительном интервале времени - построения серии прогнозов траектории движения земного полюса. Показано, что учет найденных колебаний позволяет повысить точность определения положения земного полюса в среднем на 11-12 см.

Научная новизна работы состоит в следующих пунктах:

1. Показано существование различных режимов колебательного процесса земного полюса, смена которых заключается в согласованном изменении средней частоты его обращения вокруг полюса инерции и в изменении чандлеровской частоты.

2. Показано, что вариации параметров чандлеровской и годичной составляющих движения земного полюса содержат 18-летний цикл, согласованный с прецессионным движением лунной орбиты.

3. Учет синхронизации вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны позволяет повысить точность прогноза траектории движения полюса в среднем на 11-12см.

Теоретическая и практическая значимость:

Идентификация колебаний земного полюса, согласованных с прецессионным движением лунной орбиты, представляет интерес для исследования механизма возбужения колебаний полюса.

Полученные в работе дополнительные слагаемые модели движения полюса с учетом долгопериодического лунного возмущения позволяют повысить точность определения его положения. Они могут быть использованы в автономной модели и не требуют коррекции параметров.

Методы исследования:

Определение параметров разработанных моделей земного полюса проводилось на основе обработки высокоточных данных наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли с помощью метода наименьших квадратов и Фурье-преобразования. Для численного интегрирования дифференциальных уравнений использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Анализ процессов, связанных с колебаниями земного полюса, проводился с помощью спектрального анализа и вейвлет-преобразования данных МСВЗ.

Для описания возмущенного движения земного полюса использовались динамические уравнения Эйлера-Лиувилля в переменных Эйлера. В основу модели возмущенных движений земного полюса положена динамическая теория вращения вязкоупругого тела.

На защиту выносятся следующие **положения**:

1. Показано, что изменение соотношения амплитуд основных гармоник колебания земного полюса приводит к изменению средних параметров его движения. Установлен эффект смены колебательного режима полюса, который заключается в согласованном изменении частоты чандлеровских колебаний и средней частоты обращения полюса вокруг полюса инерции.

2. С помощью численной обработки астрометрических данных измерений положения земного полюса найден колебательный процесс, связанный с прецессионным движением орбиты Луны. Предложено несколько способов преобразования координат земного полюса к системе, в которой его движение происходит синфазно с изменением ориентации

плоскости лунной орбиты по отношению к экватору Земли. Показано, что в этой системе полярный радиус совершает колебания синфазные с колебаниями угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору, а колебания полярного угла происходят синфазно с отклонением вдоль экватора точки пересечения лунной орбиты с экватором.

3. С помощью численного интегрирования уравнений движения земного полюса и обработки данных NCEP/NCAR циркуляции атмосферы и данных NASA/JPL углового момента океана получен вклад основных геофизических возмущений (атмосферного и океанического) в колебательный процесс, синфазный с прецессией лунной орбиты. Показано, что найденные гармоники только частично могут быть обусловлены колебаниями подвижных сред атмосферы и океана.

4. Установлено, что колебания, согласованные с пространственным движением орбиты Луны, присутствуют как в чандлеровской, так и в годичной компонентах движения полюса. Реализован алгоритм аппроксимации и прогноза траектории движения полюса. Показано, что учет найденных колебаний в уравнениях движения позволяет повысить точность определения его положения в среднем на 11-12см для автономной модели без коррекции параметров.

Апробация основных результатов проводилась на научно-технических конференциях и семинарах, в том числе: XII международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли NPNJ' (Алушта,2018 г); Всероссийская астрометрическая конференция – «Пулково-2018» (Санкт-Петербург, 2018 г); XXI Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСППС'(Алушта,2019 г);8-я Всероссийская конференция «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение» (Санкт-Петербург, 2019 г); Международная научно-техническая конференция МИИГАИК (Москва, 2019 г); JapanGeoscienceUnionMeeting (Chiba, Japan.2019 г); 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019» (Москва, 2019 г); 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2020» (Москва, 2020 г).

Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают **персональный вклад** автора.

По теме диссертации опубликовано 15 работ в научных изданиях, из них 3 работы [53, 54, 78] – в научных изданиях, рекомендованных ВАК и входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования (WoS, Scopus), 4 публикации [16, 27, 46, 55] – в российских научных изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК не по профилю диссертации, 8 работ [12, 13, 14, 15, 47, 51, 52, 77] – в остальных научных изданиях.

ГЛАВА 1. ДВИЖЕНИЕ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ ЧАНДЛЕРОВСКОГО И ГОДИЧНОГО КОЛЕБАНИЙ

1.1 Вариации тензора инерции при движении деформируемой Земли относительно центра масс

Исследование движения Земли относительно центра масс и построение математической модели ее вращения представляют естественнонаучный и практический интерес [43, 76]. Задача определения ориентации Земли в небесной геоцентрической системе координат GCRS (Geocentric Celestial Reference System) является одной из важных задач астрометрии и небесной механики [20]. Ориентация Земли в неподвижном пространстве задается пятью параметрами вращения Земли (ПВЗ), два из которых – координаты земного полюса. Математические модели прогнозирования движения земного полюса имеют важные технические приложения и могут быть использованы в задаче уточнения координатно-временного и навигационного обеспечения спутниковых систем [32, 35, 36, 37, 39]. Колебания земного полюса являются наиболее трудно прогнозируемыми. Это связано с тем, что движения мгновенной оси вращения в теле Земли имеет квазирегулярный характер и определяется как астрономическими, так и геофизическими факторами.

Приведем основные положения теории вращения Земли, связанные с колебанием земного полюса и построением модели его движения. Вначале рассмотрим вариации тензора инерции вследствие вращательной деформации, а затем, выпишем уравнения установившегося чандлеровского колебания.

В основе математической модели движения земного полюса в связанной системе координат лежат динамические уравнения Эйлера-

Лиувилля вращения деформируемой Земли с переменным тензором инерции. Они получаются из теоремы об изменении кинетического момента.

Необходимо учесть, что под земным полюсом понимается не полюс вращения (пересечение мгновенной оси вращения с поверхностью Земли), а промежуточный полюс с координатами (x, y), который определяется в рамках перехода от земной системы координат к системе GCRS [72]. Зная изменения координат земного полюса, можно вычислить координаты полюса вращения (x_ω, y_ω) и компоненты p, q вектора $\boldsymbol{\omega}$ мгновенной угловой скорости вращения Земли [20, 80]:

$$\begin{aligned} x_\omega &= x - \dot{y}\omega^{-1}, \quad p = \omega x_\omega, \\ y_\omega &= -y - \dot{x}\omega^{-1}, \quad q = \omega y_\omega. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Известно [26, 63, 64, 76], что движение земного полюса представляет собой сложение квазипериодических чандлеровского и годичного колебаний, векового и долгопериодического тренда [81], близсуточных и внутрисуточных вариаций [57], а также флуктуаций стохастического характера [47, 51]. Под основным колебательным процессом земного полюса будем понимать сложение чандлеровской и годичной компонент [5, 6, 45, 46]. Наиболее важным является построение модели основного движения земного полюса [36, 39].

Значения величин смещения полюса весьма малы - они не превышают 0.5 угловых секунд для годового его движения. Анализ данных наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ) [72] показывает, что в этом случае влияние деформаций на вращение Земли вокруг центра масс оказывается весьма существенным [10, 21]. Таким образом, определение вариаций тензора инерции деформируемой Земли, а также вычисление вектора кинетического момента и его полной производной по времени, необходимо при исследовании как возмущённого, так и невозмущённого движения Земли относительно центра масс.

Используя работы [10, 19, 48], приведем основные положения, связанные с вариациями компонент тензора инерции деформируемой Земли, возникающие вследствие перемещения мгновенной оси вращения.

В качестве модели деформируемой Земли выбрана простая модель вязкоупругого тела, состоящая из твердой внутренней части («ядра») и вязкоупругого внешнего слоя («мантии») [10, 63, 64, 65] Считается, что деформации подвижной среды малые, относительные перемещения точек среды на границе с «ядром» отсутствуют, а внешняя граница свободна.

Вследствие предположения о малости деформаций среды мантии Земли процесс деформирования рассматривается в квазистатическом приближении, согласно линейной теории вязкоупругости [3, 13, 30]. При сравнительно высокой частоте приливных колебаний мантия Земли ведет себя как упругое тело [10]. Влияние вязкости среды на коротких интервалах времени проявляется весьма слабо и в ряде случаев может быть опущено, например, при исследовании высокочастотных вариаций и краткосрочном прогнозировании движения земного полюса [13, 14, 15]. Однако, наличие в гидросфере мелко и крупномасштабных движений и турбулентных флуктуаций, что подтверждается геофизическими измерениями, может приводить к уменьшению кинетической энергии вращательного движения Земли, а так же к затуханию чандлеровского колебательного процесса. В связи с этим является необходимым учет диссипативных свойств вязкоупругой мантии Земли. Эти допущения позволяют исследовать задачу в рамках методов механики и теории возмущений с применением численных методов для оценки параметров модели [10].

Для определения положения земного полюса основополагающим является преобразование между двумя геоцентрическими системами координат – Кёниговой системой $C_2\xi_1\xi_2\xi_3$ и связанной с Землёй системой $C_2x_1x_2x_3$. Оси системы координат $C_2x_1x_2x_3$, связанной с твёрдым «ядром» планеты в недеформированном её состоянии, совместим с главными осями тензора инерции Земли. Для деформированного состояния обычно вводится система $C_2x_1'x_2'x_3'$ путем переноса начала координат из точки C_2 в точку C_2' - центр масс с учетом малых деформаций - и параллельного переноса осей. Векторы перемещений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$, заданные в системах $C_2x_1x_2x_3$ и $C_2x_1'x_2'x_3'$, связаны соотношением $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_c$, где $\mathbf{u}_c$ - вектор перемещения центра масс Земли относительно твёрдого ядра. По данным наблюдений (например, спутниковой миссии GRACE – Gravity Recovery and Climate Experience [71]) перемещение центра масс крайне мало и его можно считать неподвижным.

Предполагая, что мантия однородна и изотропна, вектор упругого перемещения $\mathbf{u}$ (в отсутствии диссипации) удовлетворяет уравнениям состояния Навье-Коши [3] и граничным условиям на поверхности Земли ($\mathbf{P}$) и поверхности ядра ($\mathbf{P}_0$):

$$\begin{gathered}(1-2\nu)\Delta\mathbf{u} + \nabla\left(\nabla,\mathbf{u}\right) + \rho\frac{1-2\nu}{\mu}\mathbf{\Phi} = 0,\\ \mathbf{n}\cdot\sigma_n|_P = 0, \quad \mathbf{u}|_{P_0} = 0.\end{gathered} \tag{1.1.2}$$

Здесь ν - коэффициент Пуассона, ρ - плотность, μ - модуль сдвига, ∇ - оператор Гамильтона, Δ - оператор Лапласа, $\mathbf{n}$ - вектор нормали к $\mathbf{P}$, σ_n - тензор напряжений,

$$\mathbf{\Phi} = -\left(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \ddot{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{u}}\right)$$

- массовая плотность сил инерции, $\boldsymbol{\omega}=\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)^T$ - вектор мгновенной угловой скорости вращения Земли, заданный своими компонентами для квазистационарной модели в системе координат $C_2x_1x_2x_3$, $\mathbf{r}=(x_1,x_2,x_3)^T$ - радиус-вектор, задающий положение точки планеты в недеформированном состоянии.

Вектор перемещения $\mathbf{u}$ можно представить в виде суммы $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega})+\mathbf{u}_*(\mathbf{r},t)$ векторов смещения в поле центробежных сил инерции $\mathbf{u}(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega})$ и смещения, вызванного гравитационными приливами от Луны и Солнца $\mathbf{u}_*(\mathbf{r},t)$ [22, 23].

Для построения модели невозмущённого движения земного полюса на коротких интервалах времени запишем вариации тензора инерции δJ деформируемой Земли при $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega})$ [3, 48, 89]. Вектор $\mathbf{u}$ является решением краевой задачи (1.1.2), который ищется в виде разложения по степеням малого параметра $\rho\omega^2R_З^2/\mu$ ($R_З\approx 6382$ км - радиус Земли).

При отсутствии внешних сил уравнения движения в связанной системе имеют вид:

$$\dot{\mathrm{G}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{G}=0. \tag{1.1.3}$$

Выпишем вектор G кинетического момента Земли в деформированном состоянии:

$$\mathrm{G}=\int_{\Omega}(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\dot{\mathbf{u}}\rho d\mathbf{v}. \tag{1.1.4}$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ - скорость и ускорение в связанной системе координат, $d\mathbf{v}$ - элемент объёма. В выражениях G и $\dot{\mathrm{G}}$ можно пренебречь квадратичными членами по величине $\mathbf{u}$. Тогда вектор G представим в виде двух слагаемых главной части и малых вариаций, обусловленных смещениями $\mathbf{u}$:

$$G = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho d\mathbf{v} + \Delta G. \tag{1.1.5}$$

Вектор ΔG - дополнительный кинетический момент, возникающий вследствие деформаций планеты из-за центробежного потенциала, имеет вид:

$$\Delta G = \delta J \boldsymbol{\omega} = \int_{\Omega} [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \rho d\mathbf{v} + \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} \rho d\mathbf{v}. \tag{1.1.6}$$

Вследствие малости деформаций среда мантии описывается линейной теорией вязкоупругости, а процесс деформирования происходит квазистатически. В уравнениях задачи (1.1.2) пренебрежем малыми членами $\ddot{\mathbf{u}}$ и $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}$. Также вследствие близости вектора $\boldsymbol{\omega}$ к главной оси инерции - оси фигуры Земли, можно пренебречь слагаемым $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u}$, а в (1.1.6) вторым слагаемым в сравнении с первым. В работах [3, 10] для описания деформированного состояния Земли применяется линейная теория вязкоупругости малых деформаций на основе модального подхода. Вектор перемещения $\mathbf{u}$ точек вязкоупругой среды может быть представлен в виде ряда по собственным формам задачи о свободных колебаниях упругой планеты. Предполагается, что характерное время T движения планеты (период собственного вращения) относительно центра масс существенно превосходит период свободных колебаний упругой части на собственной частоте, а также характерное время затухания свободных упругих колебаний на наинизшей собственной частоте много меньше T. Следуя [10] в первом приближении по χ (χ- коэффициент, характеризующий вязкость), выражение для $\mathbf{u}$ имеет вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - \chi \dot{\mathbf{u}}_0$$

где $\mathbf{u}_0$ - решение задачи в упругом приближении без учета вязкости.

Тогда вектор перемещений $\mathbf{u}$ можно найти в виде [10, 42]:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{V}_{ij}\omega_i\omega_j - \chi\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{V}_{ij}\dot{\omega}_i\omega_j \tag{1.1.7}$$

где первое слагаемое - решение краевой задачи (1.1.2) при $\mathbf{\Phi} = -\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$. Функции $\mathbf{V}_{ij}$ зависят от формы тела и параметров ρ, μ, ν и являются решением уравнения:

$$\Delta\mathbf{V}_{ij} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla\left(\nabla,\mathbf{V}_{ij}\right) = \frac{\mu}{\rho}\left[\mathbf{e}_i\times(\mathbf{e}_j\times\mathbf{r}) + \mathbf{e}_j\times(\mathbf{e}_i\times\mathbf{r})\right] \tag{1.1.8}$$

с соответствующими граничными условиями уравнения (1.1.2).

Далее, проецируя (1.1.6) и (1.1.7) на оси связанной системы, получим вариации компонент тензора инерции Земли вследствие упругих деформаций (без учета вязкости). Они представляют собой переменную во времени квадратичную форму по компонентам вектора угловой скорости:

$$\delta J = A_{33}r^2 + A_{13}pr + A_{23}qr + A_{11}p^2 + A_{12}pq + A_{22}q^2 \tag{1.1.9}$$

Здесь вводя стандартные обозначения $p=\omega_1,\ q=\omega_2,\ r=\omega_3$ и полагая $\omega_3 \approx r_0$ (r_0- постоянное значение угловой скорости осевого вращения Земли) вследствие малости p, q ($p,q \ll r$), пренебрежем квадратичными по p, q и их производным слагаемыми. Тогда получим выражения компонент тензора инерции Земли линейные по p, q. Наибольшими по величине будут вариации $\delta J_{13}, \delta J_{23}$. Они имеют вид:

$$\delta J_{13} = 2r_0Ep - 4r_0E\chi\dot{p}, \quad \delta J_{23} = 2r_0Eq - 4r_0E\chi\dot{q}. \tag{1.1.10}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения движения земного полюса будут содержать малые диссипативные слагаемые, определяемые полюсным приливом:

$$\begin{aligned}\delta J_{23} &= \sigma_{11}^{p}p + \sigma_{11}^{q}q\\ \delta J_{13} &= \sigma_{21}^{p}p + \sigma_{21}^{q}q\,.\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Здесь коэффициенты диссипации $\sigma_{ij}^{p,q}$ $(i,\ j{=}1{,}2)$ определяются из наблюдений.

Вращательная деформация, возникающая вследствие перемещения мгновенной оси вращения в теле Земли, приводит к заметным вариациям в моментах инерции Земли. Наибольшие по величине вариации испытывают центробежные моменты инерции, то есть вариации коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала. Их выражения (без учета океана) имеют вид [72]:

$$\begin{bmatrix} \delta\overline{c}_{21} \\ \delta\overline{s}_{21} \end{bmatrix} = -1.829\cdot 10^{-5}\begin{bmatrix} p+0.0115q \\ q-0.0115p \end{bmatrix}. \qquad (1.1.12)$$

Из сравнения коэффициентов при p, q в (1.1.11) и (1.1.12), учтя связь $\delta\overline{c}_{21}$ и $\delta\overline{s}_{21}$ с δJ_{13} и δJ_{23}, найдем величины $\sigma_{ij}^{p,q}$.

1.2 Возмущенное движение земного полюса и установившееся чандлеровское колебание

Согласно [5, 41] дифференциальные уравнения модели движения полюса получаются из динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} - \dot{J}\boldsymbol{\omega}, \qquad (1.2.1)$$

$$\boldsymbol{\omega} = (p,q,r)^{\mathrm{T}}.$$

Здесь J - матрица переменного тензора инерции, $\mathbf{M}$ - вектор возмущающих моментов сил, приводящих к наблюдаемому движению земного полюса. Вследствие малости p, q (p, $q \ll r$) и скорости изменения моментов инерции получим из (1.2.1) в первом приближении по p, q систему уравнений:

$$\dot{p} + \frac{C-B}{A} rq = \frac{M_p}{A} + \frac{J_{qr}}{A} r^2,$$
$$\dot{q} - \frac{C-A}{B} rp = \frac{M_q}{B} - \frac{J_{pr}}{B} r^2, \qquad (1.2.2)$$
$$\dot{r} + \frac{B-A}{C} pq = \frac{M_r}{C},$$

где M_p, M_q, M_r - компоненты возмущающих моментов сил. Здесь предположим, что

$$A = A^*(1+\alpha_p), \quad B = B^*(1+\alpha_q), \quad C = C^*(1+\alpha_r) \qquad (1.2.3)$$
$$\delta A(\varphi) = A^*\alpha_p, \quad \delta B(\varphi) = B^*\alpha_q, \quad \delta C(\varphi) = C^*\alpha_r,$$

где коэффициенты $\alpha_{p,q,r}$- описывают суточные приливные "горбы"; φ - угол собственного вращения.

Тогда из (1.2.2) получим уравнения для экваториальных компонент p, q, характеризующих движение полюса Земли:

$$\dot{p} + \frac{C^*-B^*}{A^*} rq = \left(-\frac{C^*}{A^*}\alpha_r + \frac{B^*}{A^*}\alpha_q + \frac{C^*-B^*}{A^*}\alpha_p \right) rq + \frac{J_{qr} r^2 + M_p}{A^*},$$
$$\dot{q} - \frac{C^*-A^*}{B^*} rp = \left(\frac{C^*}{B^*}\alpha_r - \frac{A^*}{B^*}\alpha_p - \frac{C^*-A^*}{B^*}\alpha_q \right) rp + \frac{-J_{pr} r^2 + M_q}{B^*}. \qquad (1.2.4)$$

Так как, приливные суточные "горбы" имеют нулевое среднее за сутки, то после усреднения по φ уравнения принимают вид:

$$\dot{p} + N_p q = j^0_{qr} + \mu_p, \quad p(t_0) = p_0,$$
$$\dot{q} - N_q p = -j^0_{pr} + \mu_q, \quad q(t_0) = q_0, \qquad (1.2.5)$$
$$N_p = \frac{C^*-B^*}{A^*} r_0, \quad N_q = \frac{C^*-A^*}{B^*} r_0, \quad r_0 = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с},$$

где $j^0_{pr} = \left\langle \frac{J_{pr} r_0^2}{B^*} \right\rangle_\varphi$, $j^0_{qr} = \left\langle \frac{J_{qr} r_0^2}{A^*} \right\rangle_\varphi$ - усредненные по суточному вращению приливные "выступы", определяемые центробежными моментами инерции деформируемой Земли, A^*, B^*, C^* - осевые моменты инерции замороженной фигуры Земли. Величины μ_p, μ_q имеют смысл удельных моментов сил и характеризуют внешние возмущения, приводящие к наблюдаемому движению земного полюса.

В приливных “выступах”, зависящих от перемещения подвижных масс деформируемой мантии Земли, можно выделить слагаемые, которые являются функциями компонент p, q вектора мгновенной угловой скорости. Эти компоненты описывают полюсный прилив [70, 79, 88] - отклик деформируемого слоя мантии Земли на изменение центробежного потенциала вследствие перемещения мгновенной оси вращения в теле Земли и представляют собой диссипативные слагаемые в уравнениях модели движения земного полюса.

Тогда в уравнениях (1.2.5) с учетом полюсного прилива вязкоупругой Земли и полюсного прилива в океане можно ввести эффективную частоту, используя обозначения N_p^*, N_q^*. С учетом слагаемых полюсного прилива (твердотельного и океанического) частота $N^* = \sqrt{N_p^* N_q^*}$ - средняя чандлеровская частота, будет соответствовать значению $0.84 \div 0.85$ циклов в год.

Для амплитудно-частотного анализа колебательного процесса удобно выразить компоненты p, q через полярные координаты:

$$p = c_p + a\cos\psi, \quad q = c_q + a\sin\psi, \tag{1.2.6}$$

где a - амплитуда (радиус), а ψ - фаза (полярный угол).

Дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы движения земного полюса получаются из уравнений (1.2.5) и имеют вид:

$$\dot{a} = (N_q^* - N_p^*)a\sin 2\psi + \mu_p \cos\psi + \mu_q \sin\psi$$
$$\dot{\psi} = N_q^* \cos^2\psi + N_p^* \sin^2\psi + a^{-1}\left[\mu_q \cos\psi - \mu_p \sin\psi\right]. \tag{1.2.7}$$

В качестве стационарного чандлеровского колебания примем установившееся колебание со средними наблюдаемыми параметрами – амплитудой a_{ch} и фазой ψ_{ch} чандлеровского колебания. Оно может быть записано в виде:

$$a_{ch} = a_{ch}^0 \sqrt{\frac{N_p + N_q \tan^2\left(\sqrt{N_q N_p}\, t\right)}{1 + \tan^2\left(\sqrt{N_q N_p}\, t\right)}}, \tag{1.2.8}$$
$$\psi_{ch} = \psi_{ch}^0 + \arctan\left(\sqrt{\frac{N_q}{N_p}} \tan\left(\sqrt{N_q N_p}\, t\right)\right) + \pi n,$$
$$n = \left[\frac{\sqrt{N_q N_p} + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right], \quad n \in N,$$

где значение a_{ch}^0 определяется коэффициентом диссипации и амплитудой внешнего воздействия μ_p, μ_q с частотой, близкой к чандлеровской, [...] - обозначает целую часть. В связи с тем, что эллиптичность чандлеровского колебания мала, учтем в стационарном решении (1.2.8) только среднее чандлеровское колебание с постоянной амплитудой $\tilde{a}_{ch}^0$ и средней частотой $N^* = \sqrt{N_p^* N_q^*}$ (равной среднему значению за цикл):

$$\left\langle \dot{\psi}_{ch} \right\rangle_{T_{ch}} = \sqrt{N_q N_p}\, t,$$
$$\tilde{a}_{ch}^0 = \left\langle a_{ch} \right\rangle_{T_{ch}} = \frac{1}{T_{ch}} \int_t^{t+T_{ch}} a_{ch}\, dt = \mathrm{const}. \tag{1.2.9}$$

В дальнейшем (за исключением численного преобразования главы 2) будем пренебрегать эллиптичностью не только чандлеровского колебания, но и годичного колебания, которая также достаточно мала. Если же требуется исследовать асимметрию колебаний в p, q, то все рассуждения, выкладки и вычисления проведенные ниже в главах 1-4 можно проделать отдельно для p и q.

1.3 Изменение средней частоты колебательного процесса полюса

Уравнения для проекций угловой скорости p, q представляют собой двухчастотную модель с годичной и чандлеровской составляющими [5]:

$$\begin{aligned} p &= c_p + a_{ch}\cos\left(Nt+\alpha_{ch}\right) + a_h\cos\left(\nu t+\alpha_h\right), \\ q &= c_q + a_{ch}\sin\left(Nt+\alpha_{ch}\right) + a_h\sin\left(\nu t+\alpha_h\right). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Значения чандлеровской частоты N и годичной частоты ν принимаются постоянными и соответствуют 0.843 цикла в год и 1 цикл в год, соответственно. Оценки этих значений получены на основе обработки длительного ряда наблюдений с помощью метода наименьших квадратов [3, 18]. Параметры $c_{p,q}$ - описывают долгопериодические вариации вектора угловой скорости; a_{ch}, a_h, α_{ch}, α_h - амплитуды и фазы чандлеровской и годичной составляющих соответственно, подлежащие вычислению по данным наблюдений и измерений, публикуемых МСВЗ [72].

Покажем, что для модели стационарных колебаний с постоянными коэффициентами при варьировании соотношения амплитуд чандлеровской и годичной гармоник средняя частота $\dot{\psi}$ скачкообразно изменится с N на ν (если амплитуда чандлеровской составляющей стала меньше амплитуды годичной) или наоборот, мгновенно пройдя через их среднее значение $(\nu+N)/2$ при равенстве амплитуд. В случае нестационарных колебаний будут наблюдаться изменения в переходных процессах при смене частот (до и после изменения частоты), которые могут иметь различный характер.

Судя по данным наблюдений и измерений МСВЗ, переход протекает не мгновенно, но достаточно быстро. Изменения параметров основных компонент колебаний полюса (амплитуд и фаз) – относительно медленный процесс и на коротком интервале их можно считать квазипостоянными с малой скоростью изменения. Данное обстоятельство подтверждается и численным моделированием при прогнозировании движения земного полюса, например в работах [3, 28, 63, 64]. Поэтому некоторыми особенностями переходных процессов будем пренебрегать, рассматривая мгновенный переход между частотами как при "замороженном" времени в соотношении амплитуд гармоник.

Используя выражения (1.3.1), (1.2.6), определим мгновенную частоту $\dot{\psi}$ обращения полюса вокруг «средней» точки:

$$\dot{\psi} = \frac{Na_{ch}^2 + \left(N+\nu\right)a_{ch}a_h\cos\left((\nu-N)t+\alpha_h-\alpha_{ch}\right)+\nu a_h^2}{a_{ch}^2+2a_{ch}a_h\cos\left((\nu-N)t+\alpha_h-\alpha_{ch}\right)+a_h^2}. \tag{1.3.2}$$

Из (1.3.2) следует, что частота $\dot{\psi}$ - периодическая функция времени, которая зависит также от амплитуд основных гармоник колебательного процесса полюса и чувствительна к их отношению $k = a_h / a_{ch}$. Следовательно, функция, а значит $\dot{\psi}$ и первообразная ψ, будут существенно меняться при переходах между различными режимами колебаний, определяемых условиями $a_h > a_{ch}$, $a_h = a_{ch}$, $a_{ch} > a_h$. Действительно, проинтегрировав выражение (1.3.2), получим функцию полярного угла ψ на периоде модуляции чандлеровской и годичной гармоник (с точностью до постоянной, определяемой начальным условием):

$$\psi = \arctan\left(\frac{k-1}{k+1}\tan\left(\frac{(\nu-N)t+\alpha_h-\alpha_{ch}}{2}\right)\right)+\operatorname{sgn}(k-1)\pi n+\frac{N+\nu}{2}t, \quad n\in Z \tag{1.3.3}$$

Второе слагаемое в (1.3.3) обусловлено непрерывностью функции ψ, а n - целое число периодов, отсчитываемых от момента времени любого минимума амплитуды (так как в минимуме амплитуды первое слагаемое в (1.3.3) принимает значение $-\pi/2$). Обозначим сумму первых двух слагаемых в (1.3.3) через f и покажем, что f представимо в виде суммы линейной функции времени $h(t)$ и периодического слагаемого $\delta f(t)$ с периодом T. Для этого вычислим среднюю частоту $\dot{f}$ за период модуляции гармоник при условии $a_h \neq a_{ch}$. Как видно из (1.3.3), f содержит периодическую функцию с периодом $T=2\pi/(\nu-N)$, Поэтому

$$f(t+T)-f(t)=h(t+T)-h(t)=\mathrm{const} \tag{1.3.4}$$

Тогда, учитывая, что

$$\lim_{\varphi\to\pm\frac{\pi}{2}\mp 0}\arctan\left(\frac{k-1}{k+1}\tan\varphi\right)=\operatorname{sgn}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\lim_{\varphi\to\pm\frac{\pi}{2}\mp 0}\arctan(\tan\varphi)=\pm\operatorname{sgn}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\frac{\pi}{2}, \tag{1.3.5}$$

получим для линейной функции $h(t)$

$$h(t+T)-h(t)=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0+\pi n}\arctan\left(\frac{k-1}{k+1}\tan\varphi\right)-\lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{2}+0+\pi n}\arctan\left(\frac{k-1}{k+1}\tan\varphi\right)= \tag{1.3.6}$$

$$=\operatorname{sgn}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\pi.$$

Теперь определим среднюю частоту

$$\left\langle \dot{f}\right\rangle_T=\frac{f(t+T)-f(t)}{T}=\frac{\delta f(t+T)-\delta f(t)\pm\pi}{T}=\pm\frac{\nu-N}{2}, \tag{1.3.7}$$

где T – период модуляции чандлеровской и годичной гармоник.

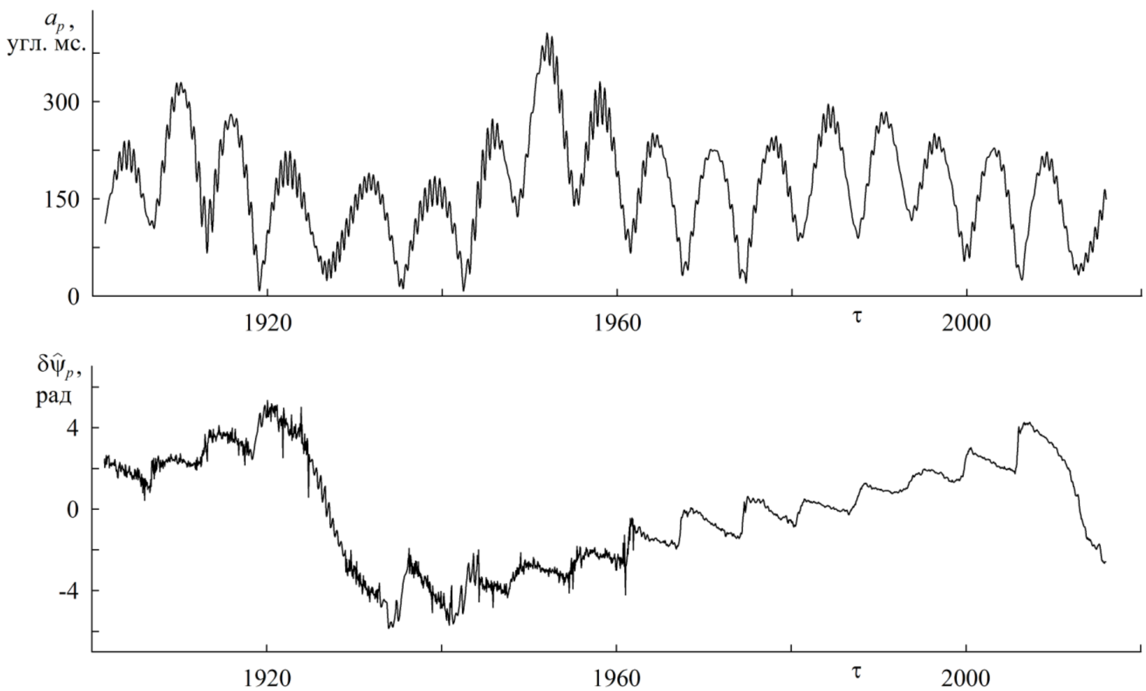

Рис. 1.1 Амплитуда a и вариация $\delta\psi$ полярного угла за вычетом средней линейной части

Причем знак в (1.3.7) может быть как плюс, так и минус – в зависимости от условий $a_h > a_{ch}$ или $a_{ch} > a_h$ соответственно. При $a_h = a_{ch}$ функция f, а значит и средняя частота $\left\langle \dot{f} \right\rangle_T$ будут равны нулю. Таким образом, различные условия на k в правой части формулы (1.3.7) приводят к изменению коэффициента линейного слагаемого ψ, т. е. к изменению средней частоты $\dot{\psi}$.

На рис.1.1 приводятся зависимости амплитуды a и вариации $\delta\psi = \psi - \left\langle \dot{\psi} \right\rangle_T t$ полярного угла за вычетом средней линейной части, построенные в результате обработки данных МСВЗ. На графике вариации угла хорошо видны различные режимы колебательного процесса полюса. В свою очередь изменение средней частоты не отражается на амплитуде результирующего модуляционного процесса полюса. Это видно из графика для амплитуды.

1.4 Кинематические свойства движения в окрестности изменения средней частоты

Рассмотрим основные предельные случаи при переходах между различными режимами колебательного процесса. Так, в пределе при $a_{ch} \to 0$ частота $\dot{\psi} \to \nu$, а при $a_h \to 0$ частота $\dot{\psi} \to \nu$. Как известно [74], в 1930-х годах чандлеровское колебание поменяло фазу, которое сопровождалось медленным уменьшением его амплитуды до малых значений. В этот период $\dot{\psi} \to \nu$, а периодические вариации угла ψ были затухающими. Спустя 10 лет амплитуда чандлеровского колебания восстановилась до прежних значений, больших амплитуды годичной компоненты.

Для практических целей представляет наибольший интерес исследование кинематических характеристик земного полюса в следующих двух случаях: амплитуда чандлеровской компоненты медленно стремится к амплитуде годичной компоненты $a_{ch} \to a_h$, но разность их не мала; значения амплитуд близки $a_h \approx a_{ch}$. Первый случай носит теоретических характер, а второй можно рассматривать как предельный в рамках точности обработки данных измерений.

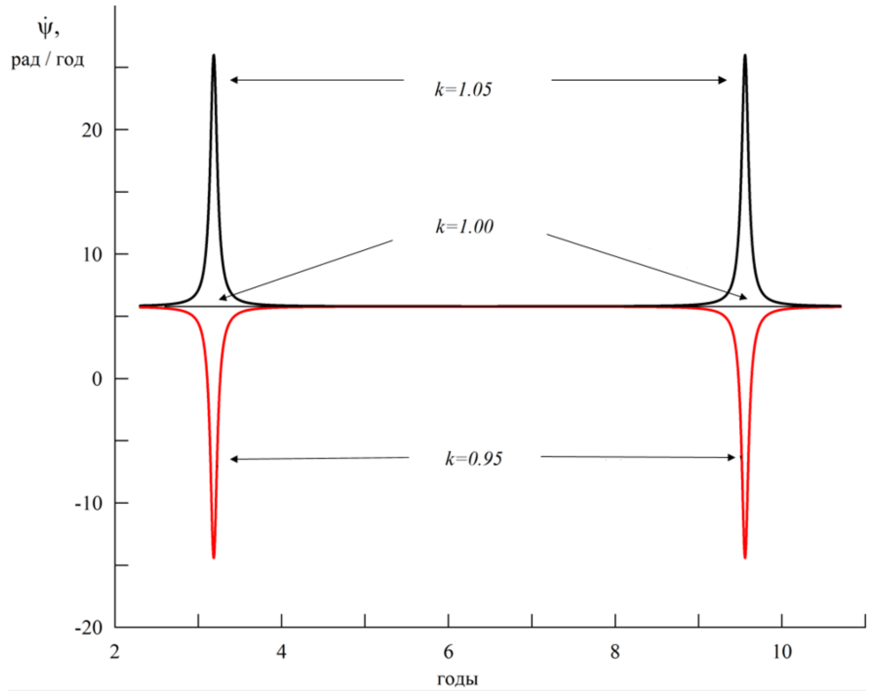

Рис. 1.2 Частота $\dot{\psi}$ для значений коэффициента k=1.05, k=1.00, k=0.95

Пусть колебательный процесс полюса достаточно далек от переходного. Функция $|\dot{\psi}|$ при $a_h \neq a_{ch}$, $a_h \neq 0$, $a_h \neq 0$ - (неравных и отличных от нуля амплитудах чандлеровской и годичной гармоник) на периоде их модуляции имеет локальный экстремум (максимум), который достигается при минимальном значении амплитуды результирующего колебательного процесса полюса и повторяется с периодом $2\pi/(\nu - N)$.

Экстремуму функции $|\dot{\psi}|$ соответствуют максимальное (при $a_h > a_{ch}$) и минимальное (при $a_{ch} > a_h$) значения функции $\dot{\psi}$, которые зависят от соотношения k:

$$|\dot{\psi}_{extr}| = \frac{\left|N - \left(N + \nu\right)k + \nu k^2\right|}{(\mathrm{k}-1)^2} \tag{1.4.1}$$

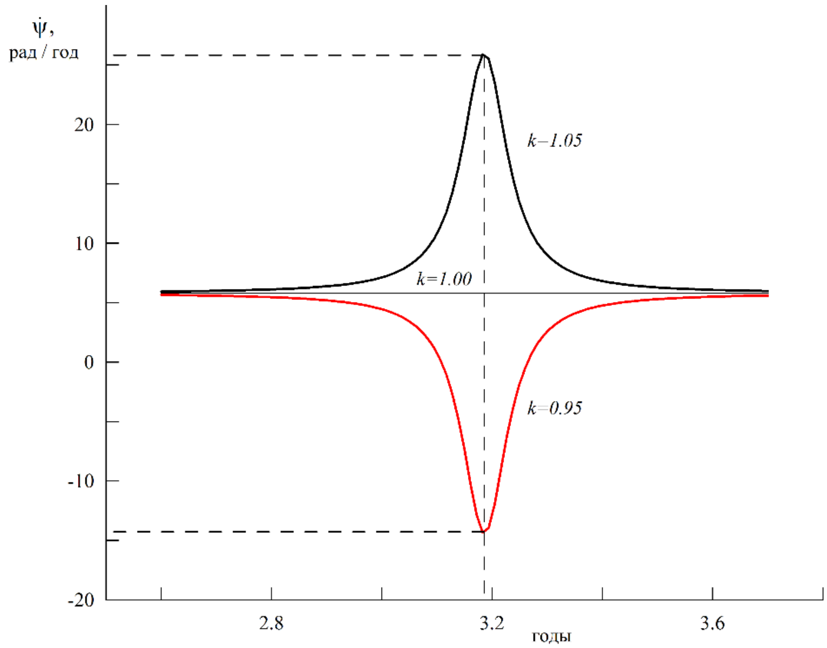

Рис. 1.3 Частота $\dot{\psi}$ для значений коэффициента k=1.05, k=1.00, k=0.95

Для графической иллюстрации здесь и далее будем рассматривать случай нулевых фаз чандлеровской и годичной компонент ($\alpha_h = \alpha_{ch} = 0$). На рис. 1.2, 1.3 построим графики функции $\dot{\psi}$ в зависимости от времени при двух различных значениях k близких к единице. На рис. 1.3 выделена область экстремума функции $\dot{\psi}$.

Выражение (1.4.1) стремится к $\pm\infty$ при $k \to 1$ слева и справа. Таким образом, модуль экстремального значения $\dot{\psi}$ стремится к бесконечности при $a_h \to a_{ch}$ (что соответствует $k \to 1$). Заметим, скачки в фазе ψ и средней частоте $\langle \dot{\psi} \rangle_T$:

$$\langle \dot{\psi} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{\psi} dt \tag{1.4.2}$$

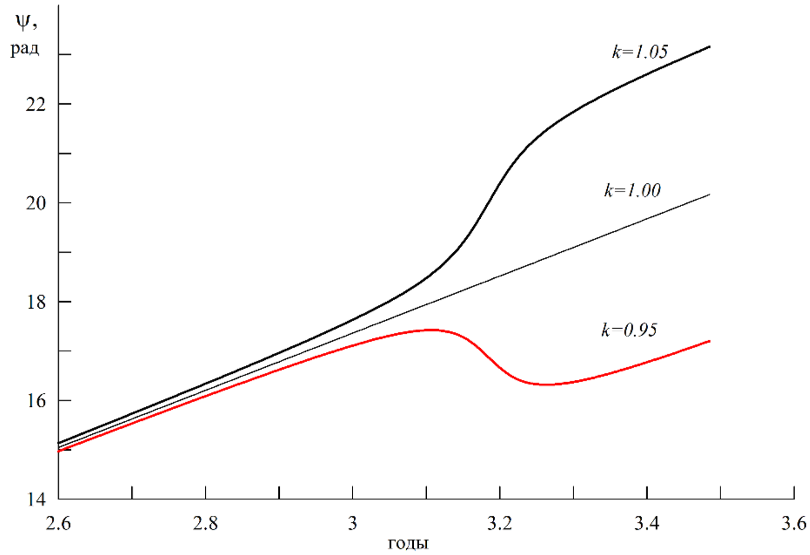

Рис. 1.4 Полярный угол ψ для значений коэффициента k=1.05, k=1.00, k=0.95

при переходе значения k через единицу равны π и $\nu - N$, соответственно. На рис. 1.4, 1.5 приводятся зависимости ψ, $\delta\psi = \psi - \langle\dot{\psi}\rangle_T t$ от времени для значений коэффициента k=1.05 и k=0.95 в случае нулевых фаз. Графики иллюстрируют изменения в фазе ψ в области экстремума мгновенной частоты $\dot{\psi}$.

Производной $\dot{\psi}$ при $a_{ch} \to a_h$ не существует, так как предел слева равен $+\infty$, а предел справа равен $-\infty$. При этом заметим, что амплитуда a будет положительной функцией времени при неравенстве амплитуд чандлеровской и годичной гармоник, в то время как при $a_h = a_{ch}$ амплитуда a может принимать и положительные и отрицательные значения, меняя знак, если траектория пройдет через точку среднего полюса (то есть положения мгновенного и среднего полюсов в некоторый момент времени совпадут).

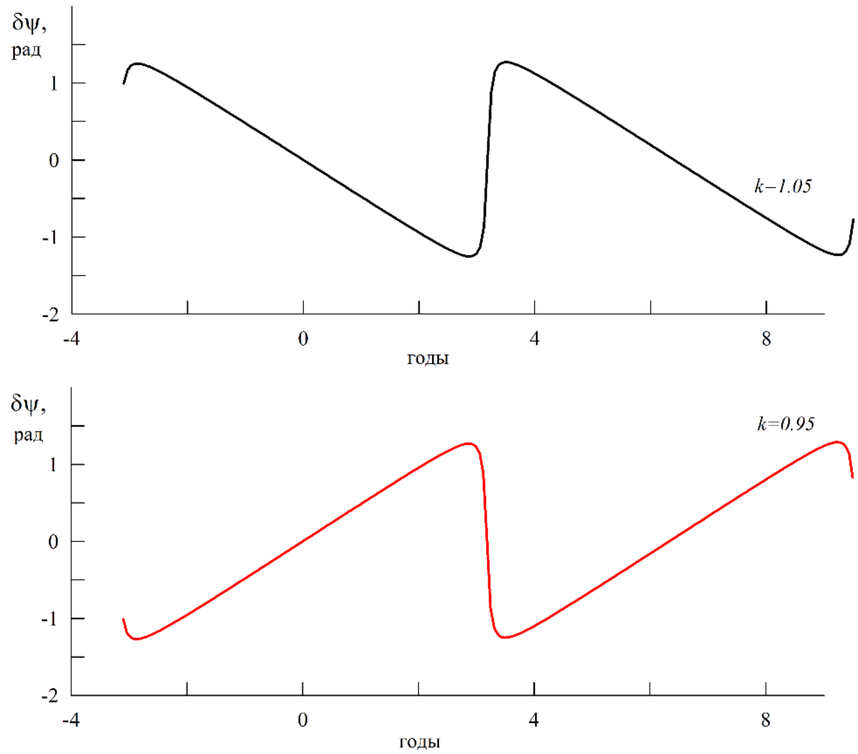

Рис. 1.5 Вариация полярного угла $\delta\psi$ для значений коэффициента k=1.05, k=1.00, k=0.95

Тогда при прохождении k через единицу в момент экстремума функции $\dot{\psi}$ функция a пройдет через ноль и поменяет знак. В этом случае, если амплитуду a принять за неотрицательную функцию, то производная $\dot{\psi}$ будет существовать, т.к. $\dot{\psi} \to \infty$ при условиях $k \to 1$ и $a \to 0$, а угол ψ, как это следует из (1.2.6), изменится на π. Следует отметить, что такая интерпретация приводит в свою очередь к отсутствию производной функции a при нулевом значении, а также к невозможности вычислить среднее значение $\dot{\psi}$ на периоде модуляции при $k \to 1$. Действительно, в этом случае в пределе при $k \to 1$ слева и справа среднее значение частоты $\dot{\psi}$ за период модуляции может иметь значения как ν, так и N (так как к фазе $\frac{N+\nu}{2}t$ добавляется сдвиг $\pm\pi$).

Осреднение $\dot{\psi}$ на периоде T модуляции чандлеровской и годичной гармоник получается из (1.3.4), (1.3.8) и приводит к выражению:

$$\langle\dot{\psi}\rangle_T = \mathrm{sgn}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\frac{\nu - N}{2} + \frac{\nu + N}{2}. \tag{1.4.3}$$

После осреднения частоты $\dot{\psi}$ на периоде $2\pi/(\nu - N)$ фаза $\langle\psi\rangle_T$ среднего квазиравномерного движения полюса вокруг центральной точки является линейной функцией времени для каждого из его колебательных режимов:

$$\langle\dot{\psi}\rangle_T t = \begin{cases} \nu t, & \text{если } a_{ch} < a_h \\ \dfrac{\nu + N}{2} t, & \text{если } a_{ch} = a_h \\ N t, & \text{если } a_{ch} > a_h \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Следует заметить, что значение $\langle\dot{\psi}\rangle_T$ в выражении (1.4.4) при $a_{ch} = a_h$ совпадает с мгновенной частотой, так как с точностью до постоянного слагаемого, верно $\langle\dot{\psi}\rangle_T t = \psi$. Однако в этом случае, как отмечалось выше предела $\dot{\psi}$ при $k \to 1$ не существует.

Теперь рассмотрим случай, когда амплитуды чандлеровской и годичной компонент имеют близкие значения. Тогда амплитуда a является величиной строго положительной, а минимальное её значение близко к нулю. Так, если a_h мало отличается от a_{ch} на величину ε, то минимальное значение амплитуды $a_{\min} = |a_h - a_{ch}| = |\varepsilon|$ и, соответственно, имеет порядок ε. Экстремум частоты $\dot{\psi}$, который достигается при минимальной величине амплитуды движения полюса $a_{\min}$, будет иметь значение $\dot{\psi} = \nu - (\nu - N)a_{ch}\varepsilon^{-1}$ и имеет порядок ε^{-1}. При этом, если $a_{ch} < a_h$, то $\varepsilon > 0$ и экстремум является локальным минимумом, в противном случае (если $a_{ch} < a_h$ и $\varepsilon > 0$), – максимумом.

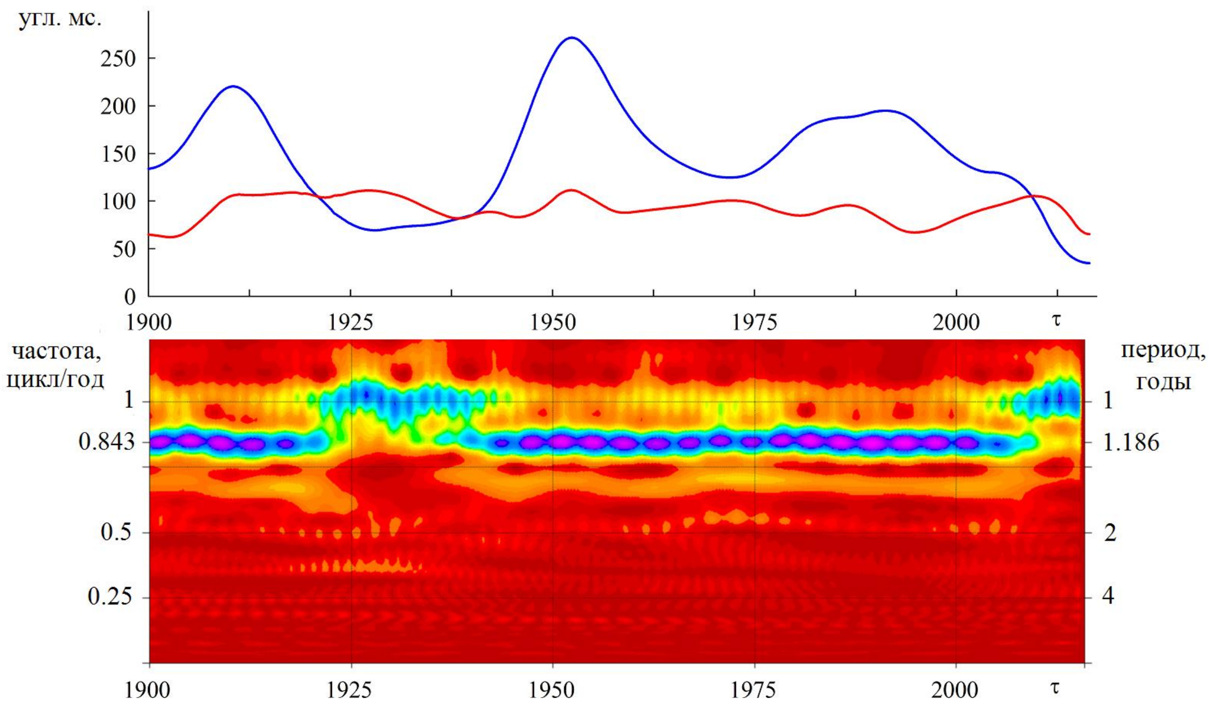

Рис. 1.6 Вариации амплитуд чандлеровской a_{ch} (синяя линия) и годичной a_h (красная линия) компонент – верхний график; вэйвлет-спектр функции $\cos(\psi)$ - нижний график.

Определить момент времени, когда $k \approx 1$ на практике можно только приближенно с помощью численной обработки астрометрических данных измерений о движении земного полюса. При $k \approx 1$ величина ε может оказаться меньше точности определения коэффициента k, что приведет к неопределенности идентификации колебательного режима. На периоде модуляции гармоник ключевым оказывается очень короткий временной интервал (если $k \approx 1$) в некоторой окрестности экстремума функции $\dot{\psi}$ (или, что то же самое, - в окрестности минимума функции a). Если в близи экстремума $k \approx 1$, то $\dot{\psi}$ может иметь как максимум (при $k < 1$), так и минимум (при $k<1$) порядка ε^{-1}. Однако, в этом случае в пределах точности определения коэффициента k - колебательный режим полюса можно считать соответствующим режиму, когда $a_{ch}=a_h$. И, как было замечено ранее, величина ψ изменится на величину близкую к π (при прохождении через максимум) или на величину близкую к $-\pi$ (при прохождении через минимум), что не изменит кинематического состояния полюса в пределах точности определения коэффициента k до тех пор, пока значение k останется близким к единице.

На рис. 1.6 построены графики амплитуд чандлеровской и годичной компонент и вэйвлет-спектр функции $\cos(\psi)$ (сиреневый цвет соответствует экстремуму, а красный – нулевому значению) [11]. Амплитуды были вычислены из обработки данных МСВЗ по движению земного полюса, используя анализ огибающих результирующей амплитуды a, рассмотренный ниже в главе 3. Пересечения графиков соответствуют изменению средней частоты обращения полюса, что видно из сравнения графиков амплитуд с вэйвлет-спектром $\cos(\psi)$. Когда амплитуда чандлеровской компоненты больше амплитуды годичной, средняя частота движения полюса соответствует частоте 0.843 цикл/год, и, наоборот, когда амплитуда годичной компоненты оказывается большей, то средняя частота равна годичной частоте. Значение средней частоты, полученное из обработки наблюдений, соответствует формуле (1.4.4).

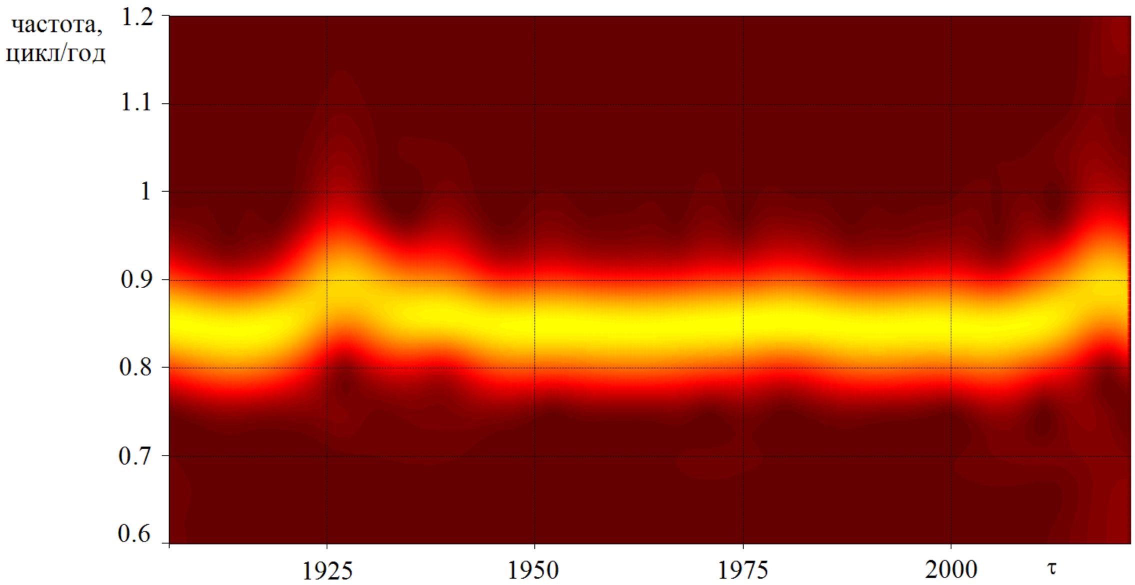

Рис. 1.7. Вэйвлет-спектр функции $\cos(\psi_{ch})$.

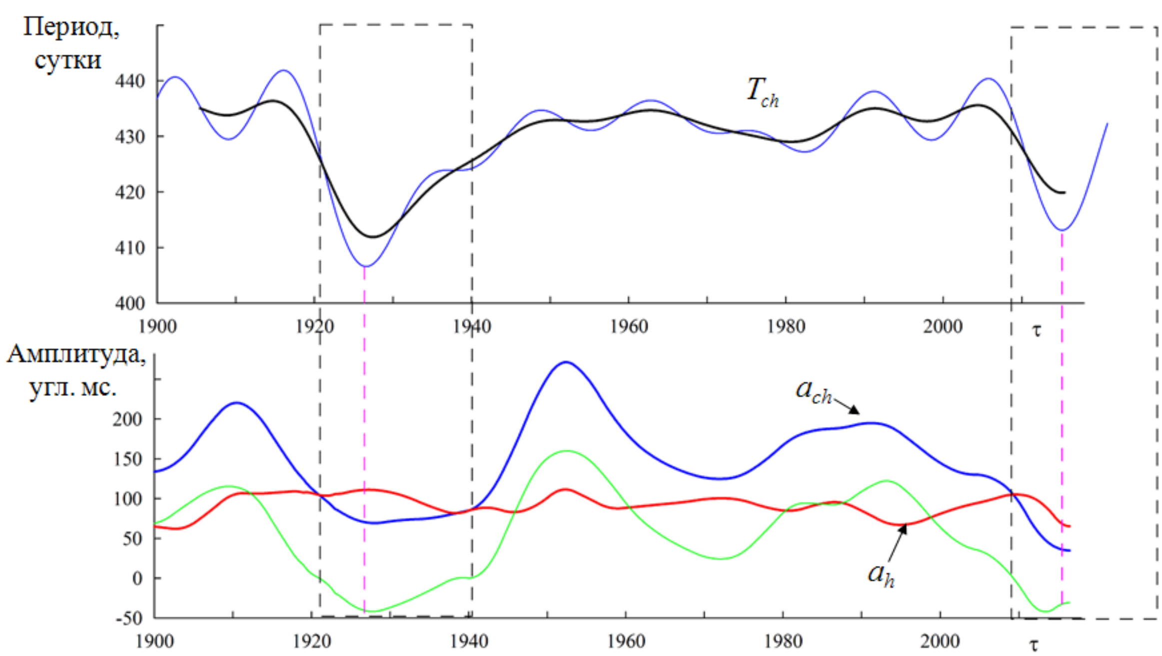

Рис. 1.8. Верхний рисунок: период чандлеровского колебания, полученный с помощью фильтрации высокочастотных гармоник – синяя линия, и сглаженный график - черная линия. Нижний рисунок: амплитуды чандлеровской и годичной составляющих (синяя и красная линии), а также их разность (зеленая линия).

Данный эффект определяется кинематикой движения полюса, если считать вариации амплитуд заданными. Однако эффект носит и динамический характер, так как при изменении средней частоты обращения полюса происходит изменение значения чандлеровской частоты.

На рис. 1.7 приведен вэйвлет-спектр функции $\cos(\psi_{ch})$, показывающий значение мгновенной чандлеровской частоты (представленная желтым цветом). На рис. 1.8 приведено сравнение сглаженного периода чандлеровского колебания с амплитудами чандлеровской и годичной составляющих. Из графика видно, что наряду с корреляцией периода и амплитуды чандлеровского колебания, наблюдается резкое уменьшение периода при изменении средней частоты обращения полюса. Причины такого поведения чандлеровского колебания полюса являются динамическими. Таким образом, наблюдается не только зависимость (1.4.3) средней частоты $\langle\dot{\psi}\rangle_T$ от коэффициента *k*, но и зависимость чандлеровской частоты $\dot{\psi}_{ch} = \dot{\psi}_{ch}(k)$ от *k* или от средней частоты $\langle\dot{\psi}\rangle_T$.

Вследствие этих эффектов колебания полюса можно разделить на два колебательных режима: ведущей компонентой является чандлеровская и ведущей становится годичная составляющая. В рамках каждого из колебательных режимов движение полюса оказывается существенно различным. Это в свою очередь влияет на прогнозирование его положения, особенно в окрестности перехода из одного режима колебаний в другой.

1.5 Выводы

Показано существование различных режимов колебательного процесса земного полюса [16, 27, 53, 55, 78]. Эффект смены колебательного режима, заключается в согласованном изменении средней частоты $\langle \dot{\psi} \rangle_T$ движения полюса вокруг полюса инерции и в изменении чандлеровской частоты.

Описаны кинематические эффекты в движении земного полюса, вызванные изменением соотношения амплитуд чандлеровской и годичной гармоник, когда колебательный процесс полюса переходит от одного режима с ведущей чандлеровской составляющей к режиму с более значимой годичной гармоникой, и наоборот [16, 27, 53, 55, 78]. Установлено, что изменение соотношения амплитуд основных составляющих колебания полюса приводит к изменению средних параметров его движения. Описан предельный переходный процесс между различными режимами колебаний полюса.

ГЛАВА 2. О СИНФАЗНОСТИ ВАРИАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА И ПРЕЦЕССИИ ОРБИТЫ ЛУНЫ

2.1. Преобразование координат земного полюса на длительном интервале времени

В работе [50] с помощью анализа и численной обработки астрометрических данных измерений положения земного полюса на временном интервале 1945-2016 гг. показана зависимость вариаций параметров его компонент от прецессионного движения орбиты Луны. А именно, в рамках совместного рассмотрения чандлеровской и годичной компонент (без разложения основного движения полюса на составляющие) найдено преобразование от исходной к новой системе координат, в которой движение полюса оказывается синхронизированным с прецессионным движением орбиты Луны. Это преобразование состоит из двух этапов. На первом этапе необходимо центрировать квазипериодическую траекторию полюса вычетом трендовой составляющей и исключить его среднее движение вокруг центральной точки. В результате полюс будет совершать циклическое квазипериодическое движение с шестилетним периодом, равным периоду амплитудной модуляции чандлеровской и годичной компонент. На втором этапе исключается полученная после первого преобразования шестилетняя цикличность аналогично первому этапу преобразования. В окончательной системе координаты земного полюса представляются как совокупность некомпенсированных после преобразования основных слагаемых (остаток от регулярных составляющих чандлеровской и годичной компонент с постоянными амплитудами и фазами) и колебательного процесса, в котором выделяется колебание с частотой, близкой к частоте прецессии лунной орбиты. При этом наблюдается совпадение фаз найденного колебания и колебания параметров ориентации плоскости лунной орбиты к экватору Земли. Если применить обратное преобразование за вычетом некомпенсированной части, то получим гармоники в дополнении к регулярным составляющим колебаний полюса с чандлеровской и годичной частотами. Эти дополнительные слагаемые будут модулированы гармоникой с частотой, близкой к частоте прецессии орбиты Луны. Однако, основная частота полученных слагаемых может принимать значения частоты либо чандлеровской компоненты, либо годичной и зависит от преобразования (точнее от того, амплитуда какой компоненты оказывается наибольшей).

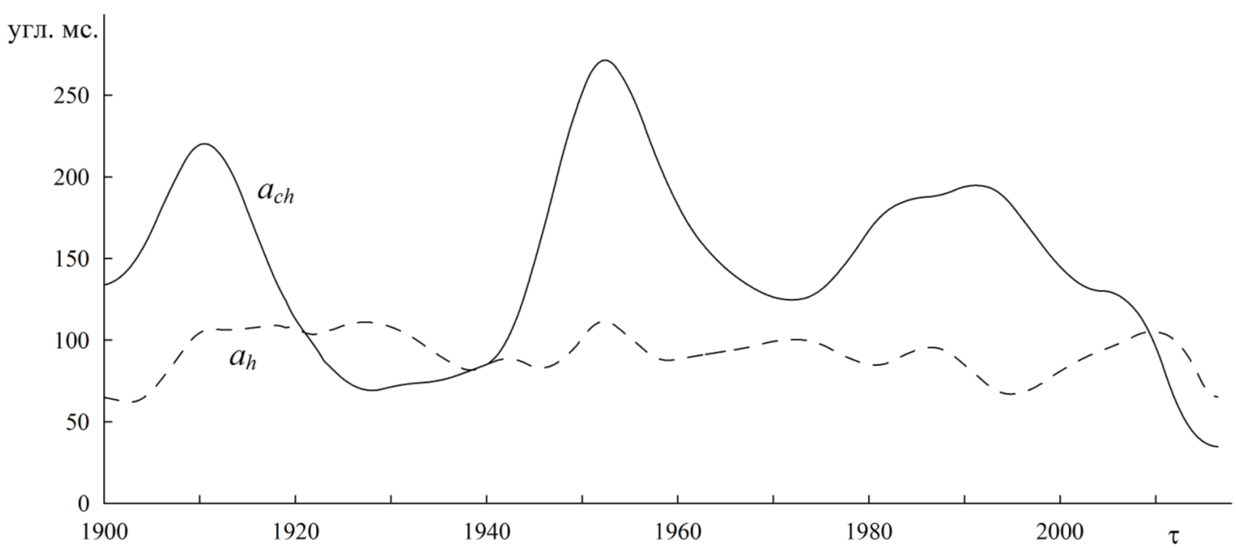

Рис.2.1 Зависимость от времени амплитуд a_{ch}, a_h - чандлеровской и годичной компонент соответственно, построенная в результате обработки данных наблюдений ряда С01 с помощью Фурье-преобразования.

Действительно, на временном интервале 1945-2006 гг. чандлеровская компонента была доминирующей по амплитуде (рис.2.1) и, значит, средняя частота обращения полюса вокруг центральной точки была близка к чандлеровской частоте. В течение последующих шести лет (2006-2012 гг.) амплитуды чандлеровской и годичной компонент были близки, а после их равенства в окрестности 2011 года произошла смена доминирующей гармоники. Это в свою очередь повлияло на рассмотренное преобразование, так как при изменении амплитудного соотношения изменится и средняя частота обращения полюса вокруг центральной точки. Как отмечалось в работе [50], на временном интервале с 2011 года (в окрестности которого произошло изменение колебательного режима полюса) до 2016 года выделить гармоники обработкой данных наблюдений было проблематичным ввиду слишком короткого для разделения гармоник с близкими частотами временного интервала.

Рассмотрим теперь этот вопрос более полно, воспользовавшись данными ряда C01, предоставляемого Международной службой вращения Земли [72]. Предложенное ранее преобразование исходной системы координат (x, y) можно представить в матричном виде [50]:

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi\left(w_2 - w_1\right)\left[\Pi\left(w_1\right)\begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{2.1.1}$$

$$w_2 = \begin{cases} w_h, \text{если} \;\; a_h < a_{ch} \\ w_{ch}, \text{если} \;\; a_h > a_{ch} \end{cases}$$

$$w_1 = \begin{cases} w_{ch}, \text{если} \;\; a_h < a_{ch} \\ w_h, \text{если} \;\; a_h > a_{ch} \end{cases}$$

$$\dot{w}_{ch} = N\omega_*, \dot{w}_h = \nu\omega_*, \dot{h} = \frac{\omega_*}{18.61}.$$

Здесь $\Pi(\alpha)$ – матрица плоского поворота на угол α; a_0 – среднее значение амплитуды колебаний полюса при его движении вокруг "средней точки" (без трендовой составляющей); c_x, c_y задают положение "средней точки" полюса и содержат константы, вековые слагаемые и вариации с периодами более шести лет; a_{ch}, a_h – амплитуды чандлеровской и годичной гармоник с фазами w_{ch}, w_h, соответственно; $N \cong 0.843$, $\nu = 1$ – чандлеровская и годичная частоты, измеряемые в циклах/год; ω_* – среднее движение барицентра системы Земля-Луна по орбите вокруг Солнца; $\dot{w}_2 - \dot{w}_1 = \pm \nu_T \omega_*$ – частота шестилетней цикличности движения полюса.

Из выражения (2.1.1) видно, что смена доминирующей гармоники отразится как на первом этапе преобразования, так и на втором. На первом этапе поворот исходной системы координат выполняется в сторону движения полюса на угол w_1, соответствующий либо фазе чандлеровского колебания, либо фазе годичного колебания. На втором этапе - направление поворота может быть как прямым, так и обратным и зависит от доминирующей гармоники, а абсолютная величина угла $|w_2 - w_1|$, на который выполняется поворот, оказывается инвариантной к выбору доминирующей гармоники.

Необходимые повороты удобно выполнить в полярных координатах. Например, для первого поворота перейдем от декартовых координат x, y к полярным – амплитуде a и фазе (полярному углу) ψ_p с помощью выражений $x = c_x + a_p \cos\psi_p$, $y = c_y + a_p \sin\psi_p$. Тогда первому повороту будет соответствовать преобразование полярных координат, при котором амплитуда a_p не меняется, а из полярного угла ψ_p вычитается линейная часть. Вариацию полярного угла после первого поворота обозначим через $\delta\psi_p$. Величины a_p и $\delta\psi_p$ являются полярными координатами полюса после первого этапа преобразования.

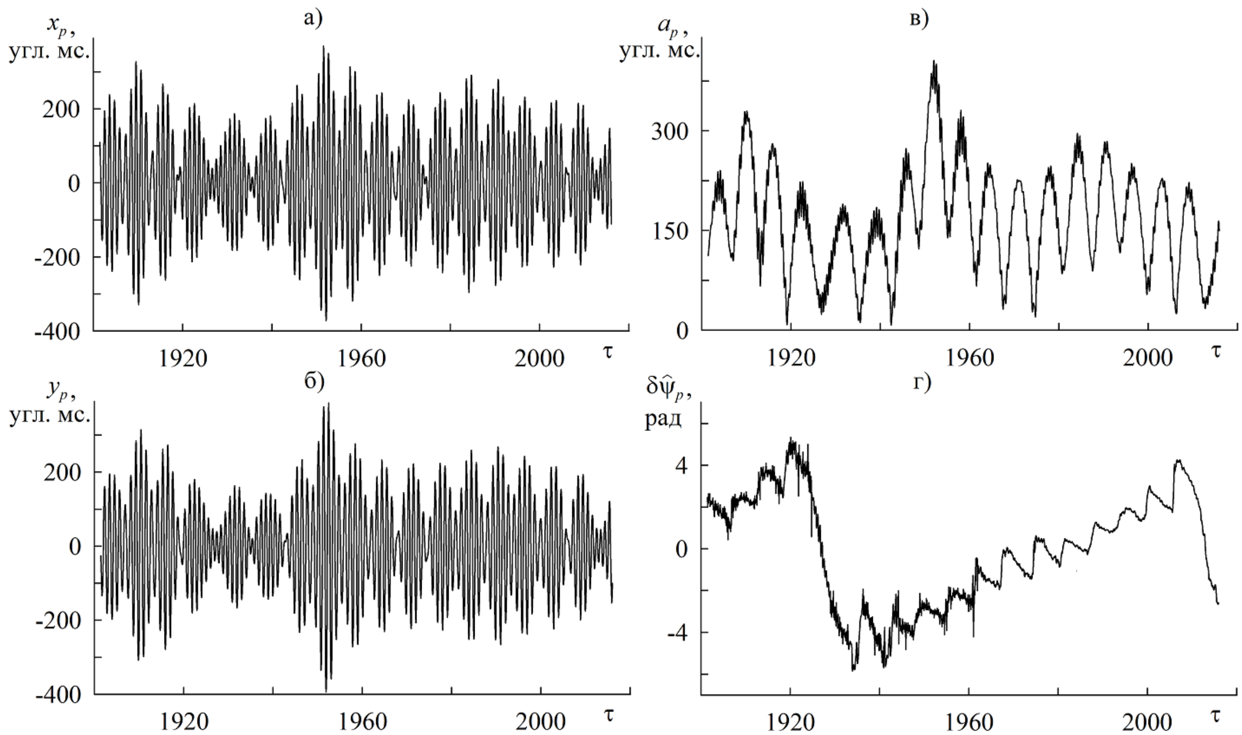

Рис. 2.2а-б. Колебания координат земного полюса $x_p = x - c_x, y_p = x - c_y$ за вычетом трендовой составляющей; 2.2в-г. Амплитуда a и вариация полярного угла $\delta\hat{\psi}_p$ земного полюса.

На рис. 2.2 приводятся декартовы координаты полюса $x_p = x - c_x, y_p = y - c_y$, построенные согласно данным ряда C01 МСВЗ за вычетом трендовой составляющей, а также вычисленные амплитуда a_p и вариация полярного угла $\delta\hat{\psi}_p$.

График $\delta\hat{\psi}_p$ получен вычетом линейной части из вычисленного ряда ψ_p на временном интервале 1900-2020гг. На этот интервал приходится несколько эпизодов смены доминирующей гармоники. Поэтому средняя частота за весь рассматриваемый интервал не совпадает ни с чандлеровской частотой, ни с годичной, а имеет значение между 0.843 и 1 циклов в год.

На графике $\delta\hat{\psi}_p$ визуально хорошо выделяются интервалы с доминирующей чандлеровской (с возрастающей линейной частью) и годичной (с убывающей линейной частью) компонентами. Этим интервалам соответствуют разные значения средней частоты $\langle\dot{\psi}\rangle_T$ (средней за шестилетний период модуляции), которая равна либо 0.843 циклов в год, либо 1 цикл в год.

2.2. Использование кинематических свойств в преобразовании координат

Согласно (2.1.1) в момент изменения средней частоты $\dot{\psi}_p$ рассмотренное преобразование может иметь особенность, так как на первом этапе значение w_1 скачкообразно меняется (значения w_{ch} и w_h в произвольный момент времени не равны), а на втором этапе меняется направление поворота. Это создает определенные неудобства, однако их нетрудно устранить.

Для этого рассмотрим сумму чандлеровской и годичной составляющих колебаний полюса. Его координаты (x_p, y_p) приближенно можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x_p &\cong a_{ch}\cos w_{ch} + a_h \cos w_h \\ y_p &\cong a_{ch}\sin w_{ch} + a_h \sin w_h. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Примем во внимание, что амплитуды a_{ch}, a_h подвержены медленным изменениям и содержат долгопериодические вариации с периодами более шести лет, а также, что на более коротких интервалах времени их можно считать квазипостоянными величинами. Тем самым, будем пренебрегать скоростью их изменения. Тогда при этих предположениях получим выражения для частоты $\dot{\psi}_p$:

$$\dot{\psi}_p = \frac{Na_{ch}^2 + \left(N+\nu\right)a_{ch}a_h\cos\left(w_{ch}-w_h\right)+\nu a_h^2}{a_{ch}^2+2a_{ch}a_h\cos\left(w_{ch}-w_h\right)+a_h^2}\omega_*. \quad (2.2.2)$$

Как показано выше средняя частота $\left\langle\dot{\psi}_p\right\rangle_T$ за период T модуляции чандлеровской и годичной гармоник при постоянстве их частот $N = const,\ \nu = const$ и неравенстве амплитуд $(a_{ch} \neq a_h)$ принимает одно из значений $N\omega_*$ или $\nu\omega_*$.

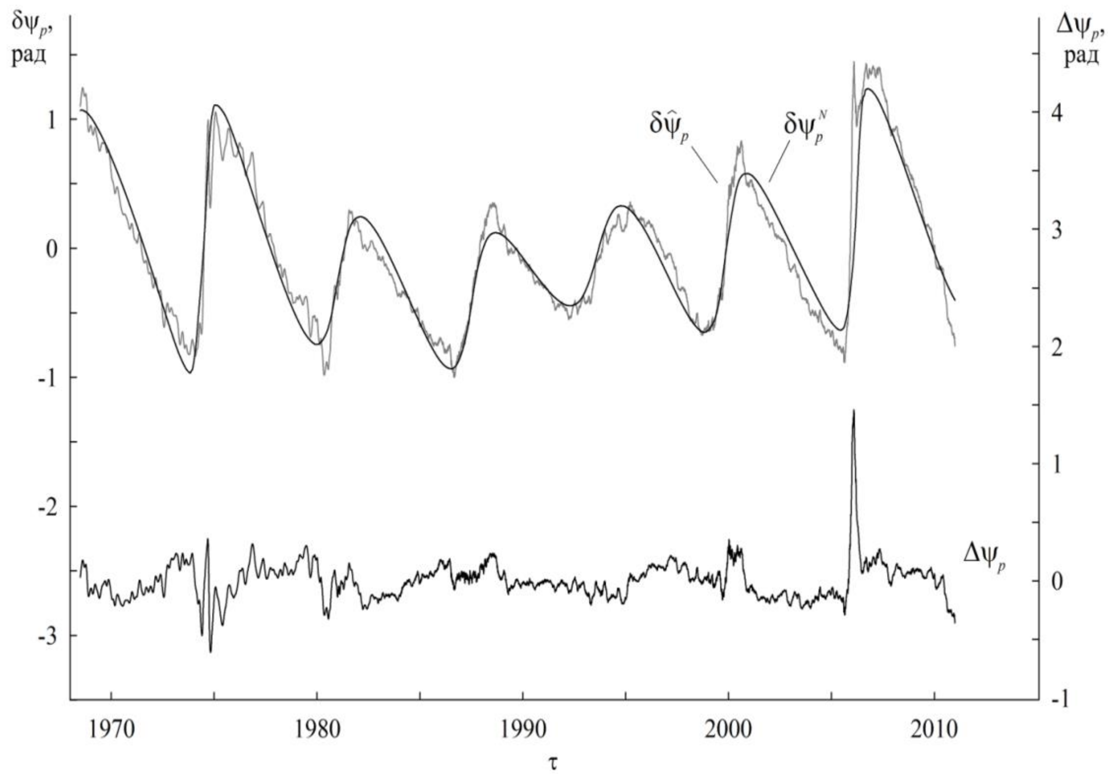

Рис. 2.3. Сравнение вариаций $\delta\hat{\psi}_p$ и $\delta\psi_p^N$ вычисленной двумя способами и их невязка $\Delta\psi_p$

Отсюда следует, что вариацию частоты $\delta\dot{\psi}_p$ можно ввести различными способами - в зависимости от колебательного режима (от того какая гармоника является доминирующей). Так, если доминирующей является чандлеровская компонента, то вариация частоты (в рамках принятых упрощений) определяется выражением:

$$\delta\dot{\psi}_p^N\left(a_{ch},a_h\right)=\frac{a_p^2+a_{ch}^2-a_h^2}{2a_p^2}(N-\nu)\omega_*, \tag{2.2.3}$$

которое получается вычетом из $\delta\dot{\psi}_p$ частоты $N\omega_*$. Оно достаточно точно описывает наблюдаемые вариации. На рис. 2.3 для интервала с доминирующей чандлеровской компонентой (без изменения колебательного режима) приводится сравнение вариации $\delta\psi_p$, вычисленной двумя способами. Первым способом вариация $\delta\hat{\psi}_p$ вычислена вычетом непосредственно из функции полярного угла его линейной части. Второй способ заключается в вычислении $\delta\dot{\psi}_p^N$ по формуле (2.2.3) с последующим ее интегрированием. Для применения (2.2.3) предварительно были найдены зависимости $a_{ch}(t)$, $a_h(t)$ с помощью метода, описанного в главе 3. Также на графике дается невязка двух графиков $\Delta\psi_p=\delta\hat{\psi}_p-\delta\psi_p^N$. Так как вариация $\delta\psi_p$ не является гармонической, то аккуратно сгладить и отфильтровать высокочастотные колебания из $\delta\psi_p$ с помощью амплитудно-частотного анализа оказывается проблематичным. И если требуется получить сглаженную функцию $\delta\psi_p$, то применение (2.2.3) оказывается предпочтительным.

Из сравнения графиков видно, что интеграл от выражения (2.2.3) адекватно описывает сглаженные колебания $\delta\psi_p$. Это в свою очередь показывает, что скорости изменения амплитуд основных гармоник колебаний полюса достаточно малы и для вычисления вариации полярного угла $\delta\psi_p$ можно пренебречь.

Теперь, если амплитуда годичной компоненты окажется больше амплитуды чандлеровской, то вариация частоты примет вид:

$$\delta\dot{\psi}_p^{\nu}(a_{ch},a_h)=\frac{a_p^2+a_h^2-a_{ch}^2}{2a_p^2}\left(\nu-N\right)\omega_*, \tag{2.2.4}$$

и получается из (2.2.2) вычетом частоты $\nu\omega_*$.

Однако, если на рассматриваемый интервал приходится смена доминирующей гармоники, то вариация, определяемая выражениями (2.2.3), (2.2.4) будет содержать разрыв. Из (2.2.3) и (2.2.4) видно, что значения вариаций частоты $\delta\dot{\psi}_p^{\nu}$ и $\delta\dot{\psi}_p^{N}$ не равны при равенстве амплитуд $a_{ch}=a_h$ (в том числе и при $a_p=0$, так как их пределы при $a_p\to 0$ не равны). Значит, при $a_{ch}=a_h$ будет разрывной и вариация полярного угла $\delta\psi_p$, если только при интегрировании уравнений (2.2.3) и (2.2.4) не добавить фазу, устраняющую разрыв. Чтобы избежать особенности в точке перехода вариацию $\delta\dot{\psi}_p$ можно определить более удобным образом:

$$\delta\dot{\psi}_p(a_{ch},a_h)=\frac{\nu-N}{2}\frac{a_h^2-a_{ch}^2}{a_p^2}\omega_*. \tag{2.2.5}$$

Действительно, вычитая из (2.2.3) или прибавляя к (2.2.4) полуразности частот чандлеровской и годичной гармоник, получим одно и то же выражение, записанное в (2.2.5). Оно получается сразу и из (2.2.2) вычетом полусуммы чандлеровской и годичной частот. Вариации $\delta\dot{\psi}_p$ и $\delta\psi_p$, определенные таким образом, не будут содержать разрывов при равенстве амплитуд $a_{ch}=a_h$.

Заметим, что среднее значение вариации частоты (2.2.5) (за время, в которое укладывается целое число периодов модуляции) может быть равно нулю только если время наблюдения обоих колебательных режимов (когда $a_{ch} > a_h$ и $a_h > a_{ch}$) одинаковое. При произвольном выборе интервала среднее значение окажется не нулевым, что качественно никак не повлияет на дальнейшее преобразование. Однако, вариация частоты, определенная выражением (2.2.5), будет уже непрерывной и, следовательно, будет непрерывной вариация полярного угла $\delta\psi_p$.

Из выражения (2.2.5) для $\delta\dot{\psi}_p$ найдем функцию полярного угла $\delta\psi_p$ в пределах одного колебательного режима:

$$\psi_p(t) = \arctan\left(\frac{a_h - a_{ch}}{a_h + a_{ch}}\tan\left(\frac{w_h - w_{ch}}{2}\right)\right) + \pi n + \frac{(N+\nu)}{2}\omega_* t + \psi_p(t_0), \qquad (2.2.6)$$

$$n = \left[\frac{\nu_T \omega_* t - 2\pi n_0 + \pi}{2\pi}\right],\ n_0 = \left[\frac{\nu_T \omega_* t_0 + \pi}{2\pi}\right],$$

где [...] - обозначает целую часть. Первые два слагаемых в выражении (2.2.6) представляют собой вариацию полярного угла $\delta\psi_p$. Она содержит помимо периодической части и линейную часть, равную либо $(\nu - N)t/2$ при $a_{ch} > a_h$ либо $-(\nu - N)t/2$ при $a_h > a_{ch}$. При равенстве амплитуд $a_{ch} = a_h$ вариация $\delta\psi_p$ отсутствует.

Как показано выше в первой главе экстремумы мгновенной частоты $\delta\dot{\psi}_p$, которые достигаются при минимумах амплитуды a_p, изменят знак после смены доминирующей гармоники, а вариации полярного угла $\delta\psi_p$ изменят фазу на противоположную (то есть произойдет зеркальное отражение графика вариации полярного угла $\delta\psi_p$ относительно оси абсцисс при условии одинаковых постоянных соотношениях a_{ch}/a_h, a_h/a_{ch} до и после изменения колебательного режима). Тогда для устранения особенности преобразования при изменении средней частоты можно изменить знак вариации $\delta\psi_p$ (отразив тем самым ее график относительно оси абсцисс), величина которой и является полярным углом после первого этапа преобразования. Это следует непосредственно из того, что

$$\left\langle \delta\dot{\psi}_p \right\rangle_T = \operatorname{sgn}\left(\frac{a_{ch}-a_h}{a_{ch}+a_h}\right)\frac{\nu-N}{2}\omega_* + \frac{\nu+N}{2}\omega_*, \tag{2.2.7}$$

где $T=1/(\nu-N)$, и из выражений (2.2.5) и (2.2.6) для $\delta\dot{\psi}_p$, $\delta\psi_p$ Действительно, из (2.2.7) следует, что средняя частота $\left\langle \delta\dot{\psi}_p \right\rangle_T$ равна либо $N\omega_*$ либо $\nu\omega_*$, средняя частота $\left\langle \delta\dot{\psi}_p \right\rangle_T$ в пределах каждого из колебательных режимов равна $\pm(\nu-N)\omega_*/2$ и меняет знак при смене доминирующей гармоники, а из (2.2.5) и (2.2.6) следует, что при смене доминирующей гармоники изменят знаки функция $\delta\dot{\psi}_p$ и с точностью до постоянной фазы функция $\delta\psi_p$ (в пределах одного колебательного режима $\delta\dot{\psi}_p$ и $\delta\psi_p$ знак не меняют). При этом $\delta\dot{\psi}_p$ пройдет через ноль при $a_{ch}=a_h$. В частности при одинаковых соотношениях амплитуд a_{ch}/a_h и a_h/a_{ch} до и после изменения средней частоты выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\psi}_p^N(a_{ch},a_h) &= -\delta\dot{\psi}_p^\nu(a_h,a_{ch}), \\ \delta\dot{\psi}^N(a_{ch},a_h) &= -\delta\psi_p^\nu(a_h,a_{ch}) + const. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Теперь, если при смене доминирующей гармоники для $\delta\psi_p$ выполнить инверсию (под которой здесь и далее будем понимать зеркальное отражение относительно оси абсцисс), то полученная в результате вариация $\delta\psi_p^{inv}$ фазу менять не будет. Значит и полюс не будет менять направление своего движения после первого этапа преобразования с учетом выполненной инверсии.

Пусть известен момент смены доминирующей гармоники, когда $a_{ch} \approx a_h$ и требуется выполнить инверсию вариации полярного угла. К вариации полярного угла $\delta\psi_p$ инверсию допустимо применить и не точно в момент равенства амплитуд a_{ch} и a_h, а позднее - до момента прохождения локального экстремума (включительно) функции $\delta\psi_p$. Сдвиг начала инверсии при таком подходе имеет смысл, так как ее выполнение в произвольный момент времени (когда окажется, что $a_{ch} = a_h$) технически менее удобно, чем в момент прохождения локального экстремума функцией $\delta\psi_p$, а искажение результата будет мало. Это связано с тем, что в любой момент времени, когда $a_p \neq 0$ при $a_{ch} \to a_h$ выполняется равенство:

$$\lim_{a_{ch}\to a_h+0} \dot{\psi}_p = \lim_{a_{ch}\to a_h+0} \dot{\psi}_p = \frac{\nu + N}{2}\omega_*. \tag{2.2.9}$$

Следовательно, при $a_{ch} = a_h$ функция $\dot{\psi}_p$ будет постоянной всюду за исключением точек, когда $a_p = 0$. При $a_p = 0$ полярный угол ψ_p оказывается неопределен (при прохождении a_p через ноль его фаза скачкообразно изменится на π), а вариация частоты $\dot{\psi}_p$ обращается в $\pm\infty$. То есть предела у $\dot{\psi}_p$ при $a_p \to 0$ и $a_{ch} \to a_h$ не существует. Но в этот момент (когда $a_p \to 0$ и $a_{ch} \to a_h \pm 0$) изменение фазы полярного угла можно учесть в знаке амплитуды a_p. Тогда приняв $a_p \in (-\infty, \infty)$, пределы справа и слева окажутся равны и равенство (2.2.9) будет выполнено всюду (то есть предельный случай совпадет с простейшим, когда $a_{ch} = a_h = const$).

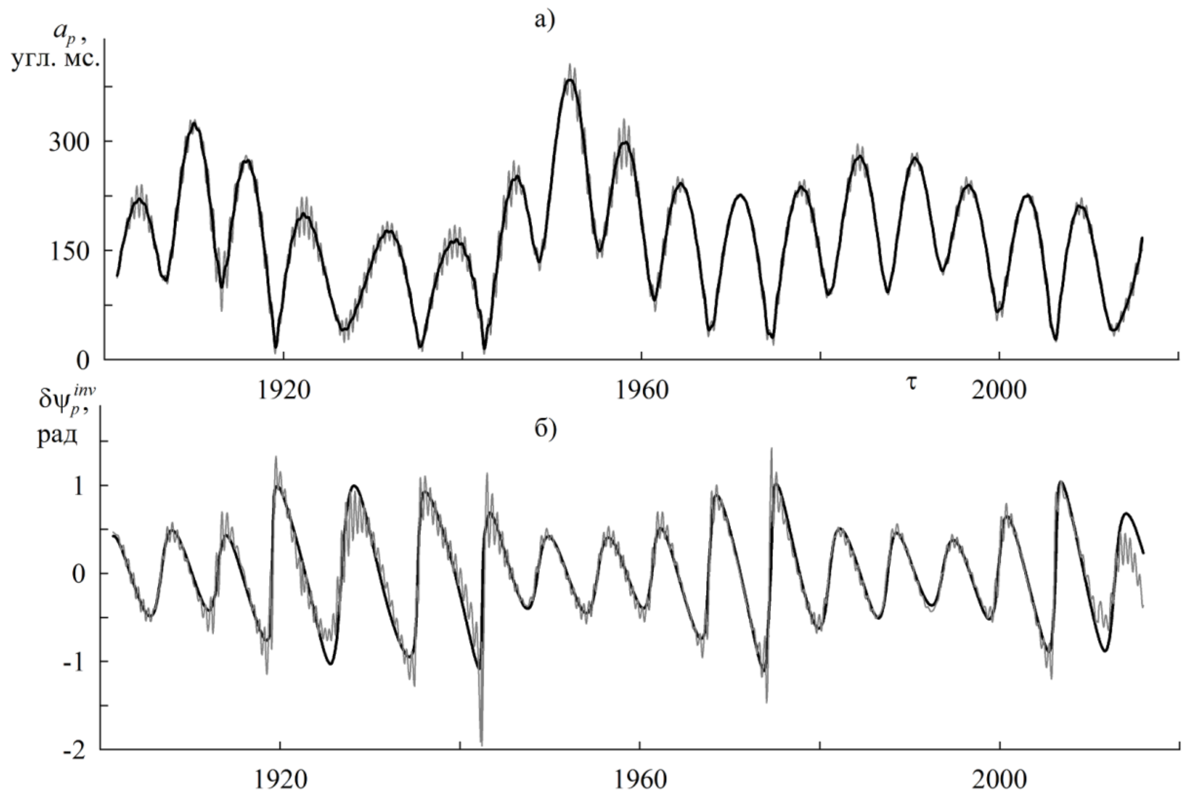

Рис. 2.4а. Исходная и сглаженная амплитуда a_p; 2.4б) сравнение $\delta\psi_p^{inv}$, найденной двумя способами: первым способом - негладкая линия, вторым способом- сглаженная кривая.

Таким образом, при близких значениях амплитуд a_{ch} и a_h графики функции $\dot{\psi}_p$ для случаев с $a_{ch} > a_h$, $k = a_{ch} / a_h$ и $a_h > a_{ch}$, $k = a_h / a_{ch}$ будут близки друг к другу всюду за исключением окрестностей минимумов амплитуды a_p. И чем больше будут различаться значения амплитуд a_{ch} и a_h, тем большим будет значение минимума амплитуды a_p и шире окажутся эти окрестности.

Границы этих окрестностей определяются соседними локальными экстремумами вариации $\delta\psi_p$ с наименьшим расстоянием между локальными минимумом и максимумом (или наоборот), в середине которого положительная амплитуда a_p достигает минимума (а при $a_{ch} = a_h$ амплитуда a_p обращается в ноль). В момент прохождения локального экстремума функцией $\delta\psi_p^N$ (или $\delta\psi_p^\nu$) выполняется условие $\delta\dot{\psi}_p^N = 0$ (или $\delta\dot{\psi}_p^\nu = 0$), а момент смены доминирующей гармоники определяется условием $\delta\dot{\psi}_p = 0$.

Остается заметить, что идентификация рассматриваемого 18-летнего колебательного процесса слабо чувствительна к ошибке определения момента смены доминирующей гармоники (хотя на временной шкале она может достигать и нескольких лет). Это связано с тем, что на периоде 18 лет такие ошибки качественно не отличимы от квазидвухлетних флуктуаций. Таким образом, малой оказывается ошибка и от указанного сдвига начала инверсии для вариации $\delta\psi_p$ и от погрешности определения момента равенства амплитуд чандлеровской и годичной гармоник.

Нужно заметить, что в отличие от вариации полярного угла $\delta\psi_p$ амплитуда a_p не требует каких-либо особенных преобразований, а ее сглаженный график легко получить с помощью Фурье-преобразования. Так, на рис. 2.4а приводятся исходная и сглаженная амплитуды.

Рассмотренный способ выполнения инверсии $\delta\psi_p$ достаточно наглядный, но не является самым простым в реализации и может приводить к некоторым погрешностям вблизи момента смены доминирующей гармоники (хотя и к несущественным для качественного анализа). Можно предложить и более простой способ построения инверсии сглаженной вариации $\delta\psi_p$, который показывает корректность выполненной инверсии первым способом.

Второй способ основан на приближенной зависимости (2.2.5) вариации частоты от амплитуд чандлеровской и годичной гармоник. Как легко видеть, инверсия вариации частоты $\delta\dot{\psi}_p$ получается естественным образом из (2.2.5):

$$\delta\dot{\psi}_p^{inv}(a_{ch}, a_h) = \frac{\nu - N}{2} \frac{\left|a_h^2(t) - a_{ch}^2(t)\right|}{a_p(t)^2} \omega_*. \qquad (2.2.10)$$

Тогда, после интегрирования выражения (2.2.10) получим вариацию полярного угла с учетом инверсии, выполненной столько раз, сколько было переходов от одной доминирующей гармоники к другой:

$$\delta\psi_p^{inv}(a_{ch}, a_h) = \frac{\nu - N}{2} \int_{t^0}^{t} \frac{\left|a_h(t)^2 - a_{ch}(t)^2\right|}{a_p^2(t)} \omega_* dt - \frac{\nu - N}{2} \omega_* t. \qquad (2.2.11)$$

На рис. 2.4б приводится сравнение величины $\delta\psi_p^{inv}$, найденной двумя способами: негладкая кривая получена первым способом, а гладкая кривая - вторым способом. Недостатком второго способа является необходимость определения зависимостей амплитуд $a_{ch}(t)$ и $a_h(t)$ от времени, что требует предварительного разделения колебания земного полюса на компоненты. Последнее не может быть выполнено абсолютно точно, поэтому результат будет зависеть от определения чандлеровской и годичной гармоник (от того, какие вариации отнесены к той или иной гармонике). Этот фактор вносит больше неопределенности, чем ошибка от неучета производных амплитуд в формуле (2.2.11). Однако, второй способ вычисления вариации $\delta\psi_p^{inv}$ с учетом инверсии более простой в описании.

2.3. Вариации параметров движения земного полюса в период с 1900 года

Вносимые ошибки в результате выполняемой инверсии согласно двум, рассмотренным выше способам, кардинально различны по сути. Поэтому качественное и хорошее количественное совпадения результатов получения $\delta\psi_p^{inv}$ позволяет заключить о корректности проведенных преобразований. Особенно важно совпадение результатов в окрестностях изменения доминирующей гармоники.

Но поскольку неопределенность в амплитудах $a_{ch}(t)$ и $a_h(t)$ носит более глобальный характер и может влиять на результат преобразования на всем рассматриваемом интервале, то далее предпочтительней использовать $\delta\psi_p^{inv}$, полученную первым способом.

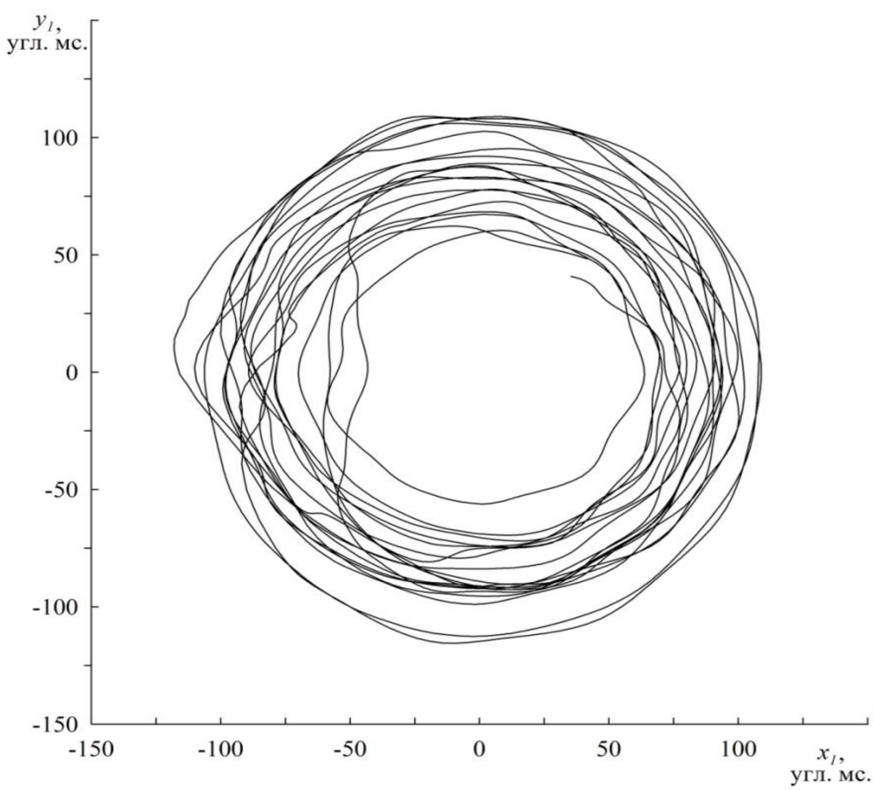

Рис. 2.5. Траектория движения земного полюса в системе координат (x_1, y_1)

На рис. 2.5 приводится траектория движения полюса после первого этапа преобразования с учетом выполненной инверсии. Положение полюса в полученной системе задается координатами: $x_1 = a_p \cos\delta\psi_p^{inv}$, $y_1 = a_p \sin\delta\psi_p^{inv}$. Из рисунка видно, что полюс направления своего движения в системе (x_1, y_1) не меняет. Период обращения полюса в этой системе равен 6-летнему периоду модуляции чандлеровской и годичной гармоник, который подвержен небольшим изменениям. Полученное колебание содержит одну основную частоту, поэтому на втором этапе преобразование осуществляется простейшим образом в полярной системе, аналогично первому этапу. Для этого координаты полюса представим в виде $x_1 = c_x^1 + b\cos\varphi^{inv}$, $y_1 = c_y^1 + $ $+ b\sin\varphi^{inv}$. Тогда центрировав 6-летнюю периодическую траекторию вычетом трендовой составляющей c_x^1, c_y^1, определим величину b и вариацию полярного угла $\delta\varphi^{inv}$. В отличие от первого этапа вариацию $\delta\varphi^{inv}$ определить легко, так как после первого этапа с учетом выполненной инверсии не происходят ни смена доминирующей гармоники, изменения направления движения полюса.

Далее, на интервалах инверсий первого этапа преобразования следует выполнить обратную инверсию вариации полярного угла $\delta\varphi^{inv}$, так как направление движения полюса было изменено. В результате получим вариацию $\delta\varphi$, состоящую из вариаций полярных углов на участках с различными доминирующими гармониками. Обратная инверсия выполняется так, чтобы график был непрерывным и не содержал скачков. Такая процедура носит отчасти формальный характер, так как может изменить тренд составной вариации $\delta\varphi$, но позволяет построить непрерывный график функции $\delta\varphi$ для нескольких колебательных режимов. Тренд долгопериодического (с периодами вдвое большими 18-летнего периода) и векового характера в данном случае на результат не оказывает влияния, так как подлежит удалению.

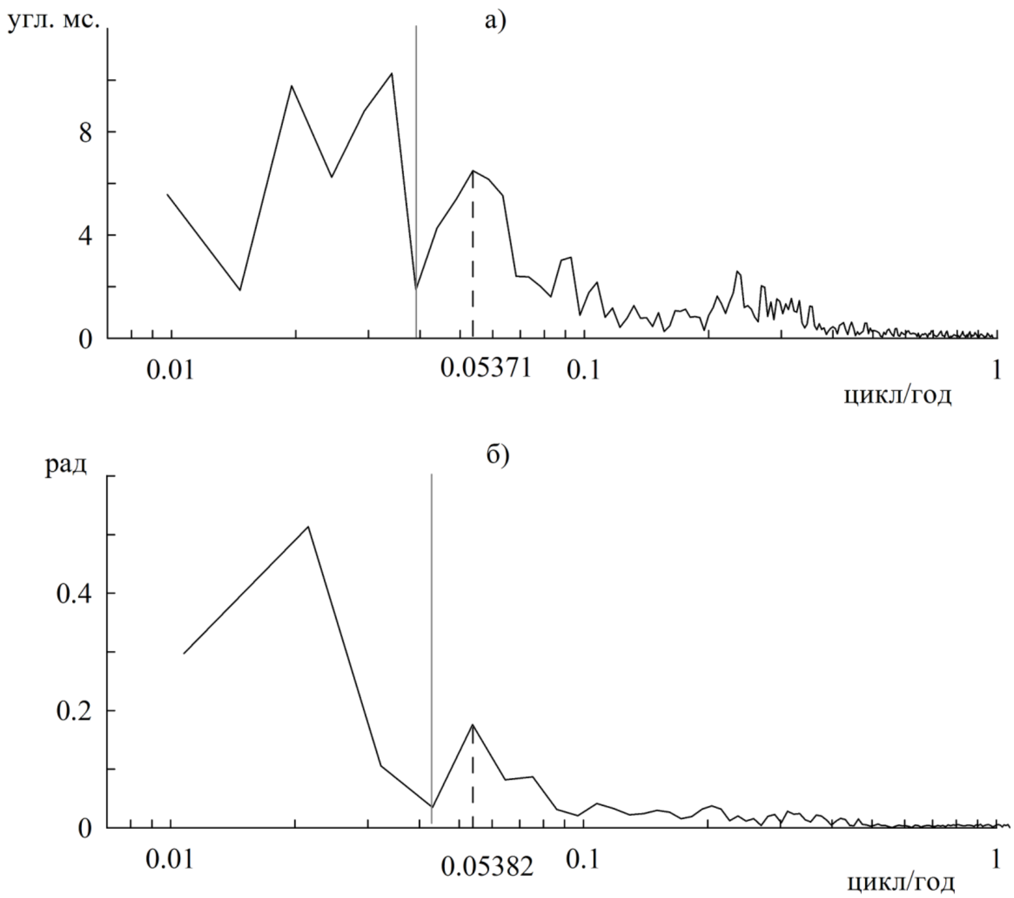

Рис. 2.6а. Амплитудный спектр построенного ряда b; 2.6б. Амплитудный спектр ряда $\delta\varphi$

Составную вариацию $\delta\varphi$ можно получить и непосредственно рассматривая колебательные режимы по отдельности, если их длительности для этого достаточны. Но короткие интервалы с доминирующей годичной гармоникой уверенно (без дополнительных пояснений) этого сделать не позволяют. Поэтому в работе была выбрана стратегия преобразования не частей ряда с различными режимами колебаний, а целого ряда. Хотя, рассмотренный способ инверсии, основанный на выражении (2.2.11), позволяет заключить, что преобразование ряда можно выполнить частями, так как это будет эквивалентно первому способу инверсии.

На рис. 2.6 даны амплитудные спектры построенных рядов $b, \delta\varphi$. Из спектров можно заключить о наличие колебаний с частотой, близкой к частоте прецессии орбиты Луны в исследуемых параметрах. Изменение границ интервала данных приводит к небольшой вариации этой частоты (около 0.053-0.055 циклов в год) в амплитудном спектре. Однако, если временной интервал данных выбрать кратным периоду 18.6 лет (например, сдвинув конец интервала на 5 лет), то, как показано на рис. 2.6, частота этого пика в амплитудном спектре совпадет с частотой прецессии лунной орбиты.

Как показано далее, фаза колебаний в параметре b отличается на $\pi / 2$ от фазы соответствующих колебаний в полярном угле $\delta\varphi$. Можно заметить, что аналогично и фаза колебаний угла I наклона лунной орбиты к экватору Земли отличается на $\pi / 2$ от фазы угла θ отклонения вдоль экватора точки пересечения лунной орбиты с экватором.

Следствием прецессии орбиты Луны и связанного с ней циклического изменения долготы восходящего узла с периодом 18.61 лет является изменение наклонения плоскости орбиты к экватору Земли [55]. Наклон орбиты Луны к земному экватору изменяется в пределах от 18.3° до 28.58°. При этом точка пересечения круга лунной орбиты с экватором совершает колебания вдоль экватора около среднего ее положения, совпадающего с точкой весеннего равноденствия. В отличии от узла (точки пересечения кругов лунной орбиты и эклиптики на небесной сфере), который совершает полный оборот, точка пересечения орбиты и экватора совершает колебания в пределах от -13.2° и до 13.2°. Для сравнения полученных величин $b, \delta\varphi$ с параметрами I, θ ориентации орбиты Луны по отношению к экватору Земли в них были отфильтрованы колебания из низкочастотных спектральных областей (расположенных левее вертикальных сплошных линий, отмеченных на рис. 2.6).

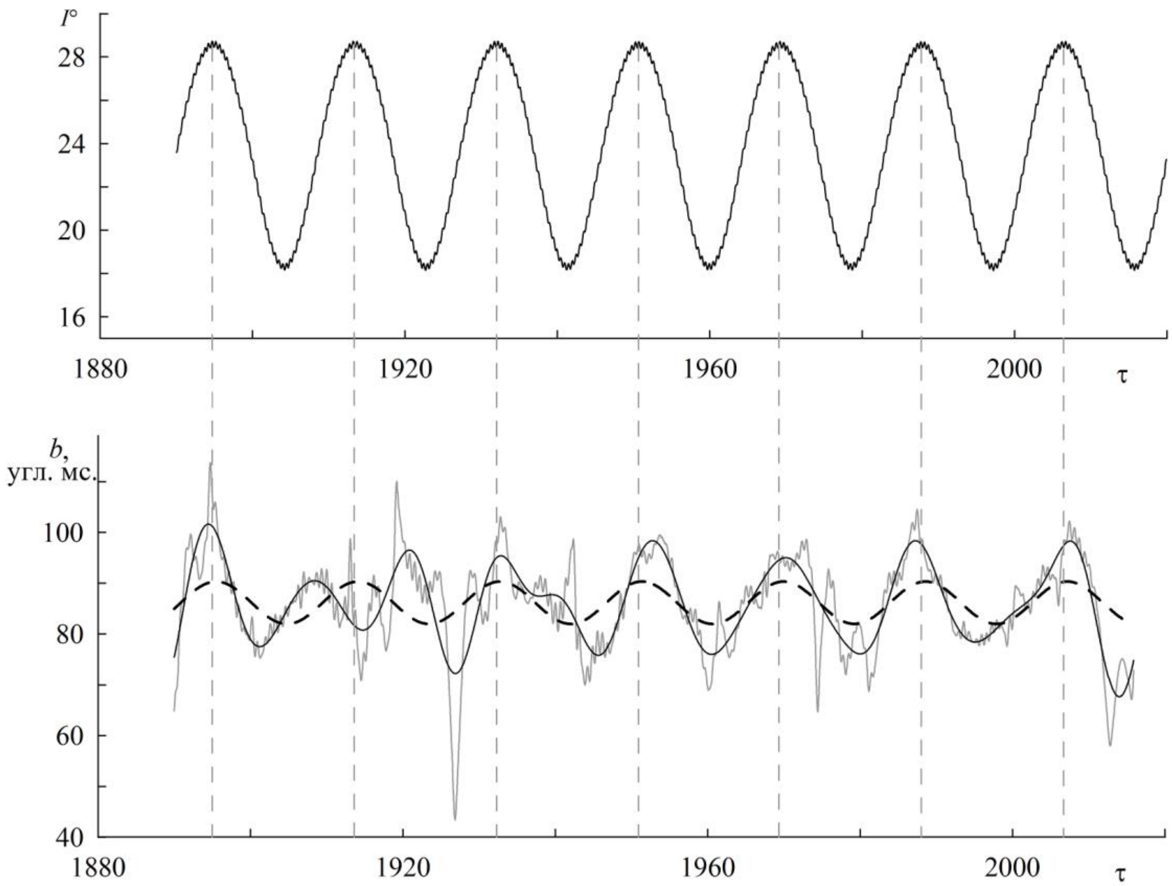

Рис. 2.7. Вверху - колебания угла наклона орбиты Луны к экватору; внизу - вариации амплитуды b, выделенные из данных наблюдений (серая зигазагообразная линия) в сравнении с ее сглаженными значениями (плавная линия) и со средней стационарной гармоникой, выделенной из ряда b (пунктирная линия).

Сравнение колебаний амплитуды b после фильтрации и сглаживания с колебаниями угла наклона I плоскости лунной орбиты к экватору показано на рис.2.7. Одновременно с амплитудой b на графике приводится сглаженное ее значение, а также построена стационарная гармоника с частотой 0.05371 циклов в год, выделенная из амплитудного спектра построенного ряда b. Колебание угла I было вычислено, используя лунные эфемериды [86]. Пунктирные вертикальные линии, проведенные между двумя графиками, показывают совпадение экстремумов колебаний b и I - в особенности хорошее совпадение фаз стационарной гармоники, выделенной из спектра b и колебаний угла I.

Вариации угла $\delta\varphi$ также содержат значимые вариации с частотой, близкой к частоте прецессии орбиты Луны. На рис. 2.8 приводится сравнение вариаций $\delta\varphi$ и колебаний угла θ вдоль земного экватора точки пересечения экватора с лунной орбитой. Также на графике приводится сглаженное значение $\delta\varphi$.

Для наглядной иллюстрации применимости рассмотренного преобразования к различным доступным рядам координат полюса ряд $\delta\varphi$ построен, используя составной ряд координат полюса. Он состоит из трех интервалов с данными измерений различной точности (1890-1945; 1945-1962; 1962-2016). Сглаживание применялось только к первому интервалу, то есть для ряда C01 до 1945 года. Границы интервалов, соответствующих разным рядам, хорошо различимы на графике. В частности, высокий уровень "шума" в средней части графика $\delta\varphi$ обусловлен сильной зашумленностью данных координат земного полюса на данном интервале времени. Однако, он не создает препятствий ни выполнению преобразования, ни выделению рассматриваемого колебания. В первой половине графика $\delta\varphi$ (левее зашумленной его части) ряд строился, используя сглаженные данные C01 координат полюса, аналогично построению ряда амплитуды b. На втором и третьем временных интервалах использовались несглаженные данные рядов C01 и C04 соответственно.

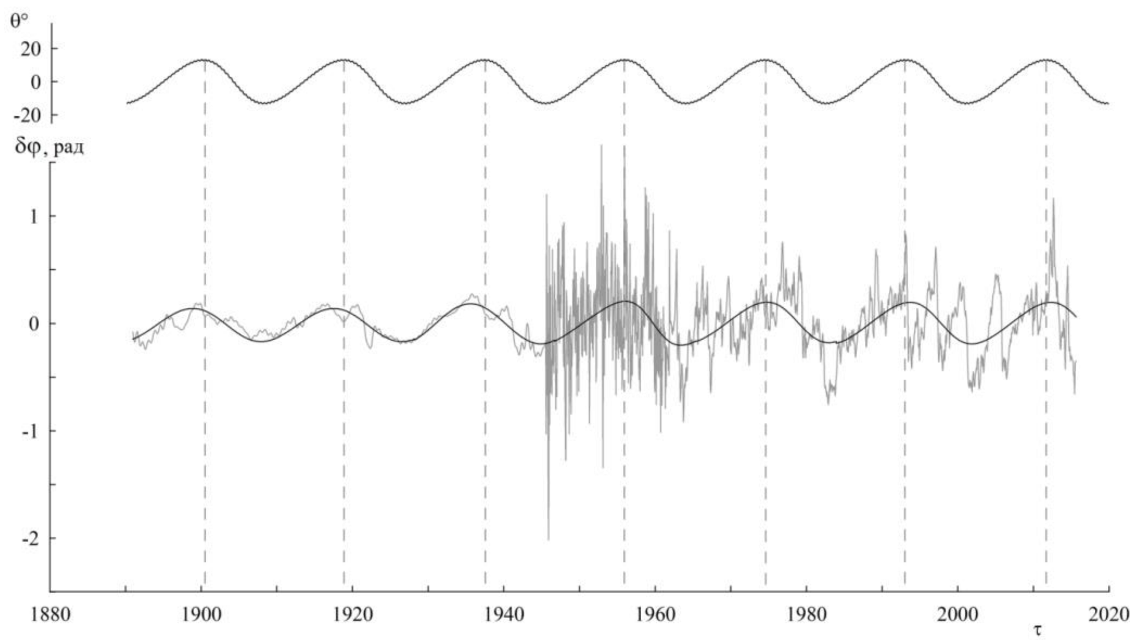

Рис. 2.8. Вариации полярного угла $\delta\varphi$ земного полюса во вращающейся относительно исходной системе, полученные в результате обработки данных наблюдений и измерений МСВЗ (внизу) в сравнении с колебаниями угла θ отклонения вдоль экватора точки пересечения экватора с лунной орбитой.

Рис. 2.8 показывает, что найденное колебание удается выделить из различных рядов о движении полюса - как сглаженных, так и несглаженных. Это позволяет говорить о наличие колебательного процесса земного полюса, синхронизированного с прецессионным движением орбиты Луны, иными словами - о наличие долгопериодического лунного возмущения, влияющего на колебания земного полюса.

2.4 Вклад геофизических возмущений в колебания полюса с частотой прецессии лунной орбиты

Найденные вариации параметров колебаний полюса требует более детального анализа и исследования причин возникновения таких колебаний. В частности представляет интерес установление вклада в эти колебания геофизических (атмосферных и океанических) возмущений.

Для этого необходимо определить колебания земного полюса, проинтегрировав дифференциальные уравнения его движения с учетом геофизических возмущений [91]. Дифференциальные уравнения колебаний земного полюса могут быть получены из уравнений Эйлера-Лиувилля вращательного движения деформируемой Земли [7, 41, 63, 64]:

$$\begin{gathered} J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} - \dot{J}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = (p,q,r)^T, \quad J = J + \delta J, \quad J = \mathrm{const}, \\ J = \mathrm{diag}(A,B,C), \quad \delta J = \delta J(t), \quad \| \delta J \| << \| J \|, \\ \mathbf{M} = \mathbf{M}^S + \mathbf{M}^L - \dot{\mathbf{h}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}. \end{gathered} \tag{2.4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости в связанной с Землей системе координат. Оси выбранной системы координат приближенно совпадают с главными центральными осями инерции J^* "замороженной" фигуры Земли с учетом "экваториального выступа". Считается, что малые вариации тензора инерции δJ включают в себя различные гармонические составляющие, которые обусловлены регулярным возмущающим воздействием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны и, возможно, других, например, годичных, месячных и т.п. $\mathbf{M}^S$ и $\mathbf{M}^L$ - возмущающие моменты от Солнца и Луны соответственно, а $\mathbf{h}$ - вектор суммарного кинетического момента подвижных сред (атмосферы и океана) [91].

Вследствие малости p, q ($p,q<<r$) в первом приближении по p, q система дифференциальных уравнений для определения p, q примет вид [63]:

$$\dot{p} + N_p q = j_{qr}^0 + \mu_p, \quad p(t_0) = p_0,$$
$$\dot{q} - N_q p = -j_{pr}^0 + \mu_q, \quad q(t_0) = q_0, \tag{2.4.2}$$
$$\delta\dot{r} = \mu_r, \quad r(t_0) = r_0,$$
$$N_p = \frac{C^* - B^*}{A^*} r_0, \quad N_q = \frac{C^* - A^*}{B^*} r_o, \quad r_0 = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с},$$

где $N = \sqrt{N_p N_q} \cong 0.84 \div 0.85$ циклов в год – средняя чандлеровская частота, а, $j_{pr}^0 = \left\langle J_{pr} r_0^2 \right\rangle_\varphi$, $j_{qr}^0 = \left\langle J_{qr} r_0^2 \right\rangle_\varphi$ - усредненные по суточному вращению приливные "выступы", включающие в себя диссипативные слагаемые вследствие полюсного прилива. Величины μ_p, μ_q имеют смысл удельных моментов сил и характеризуют суммарные возмущения, приводящие к наблюдаемому движению земного полюса.

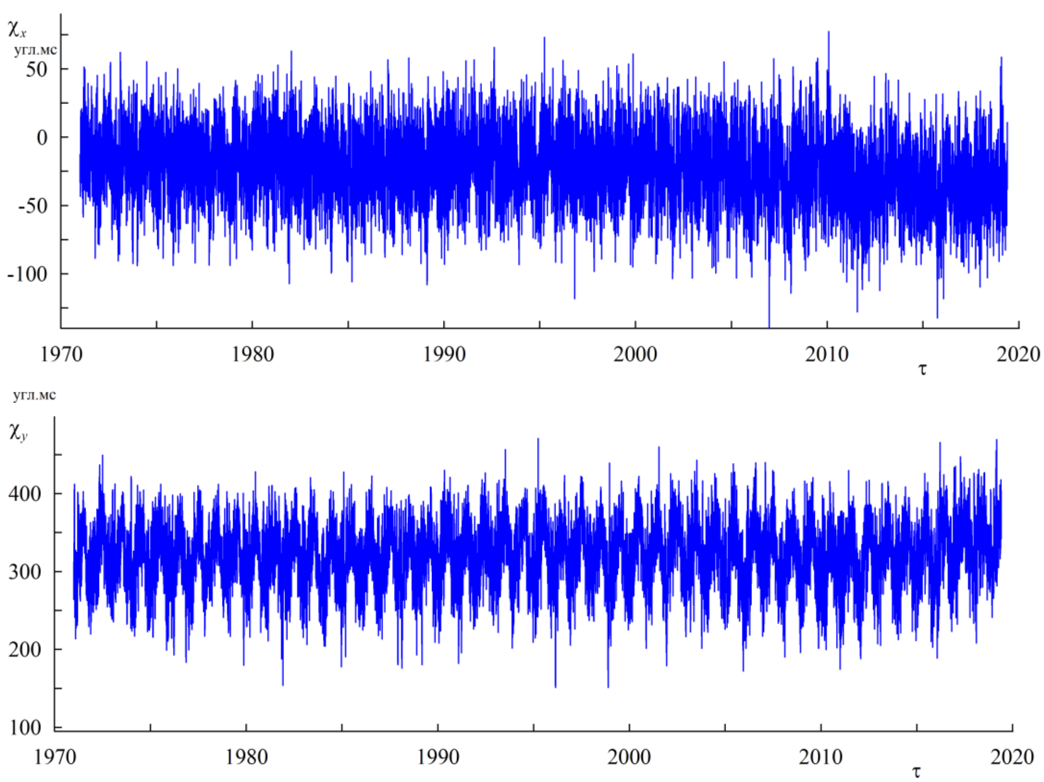

Рис. 2.9 Возмущения χ_x, χ_y от атмосферы

Они выражаются через геофизические возмущения χ_x, χ_y, публикуемые МСВЗ. Для определения вклада геофизических возмущений в исследуемый колебательный процесс система дифференциальных уравнений движения земного полюса записывается в стандартной форме с возмущающими функциями χ_x, χ_y [2, 72, 80].

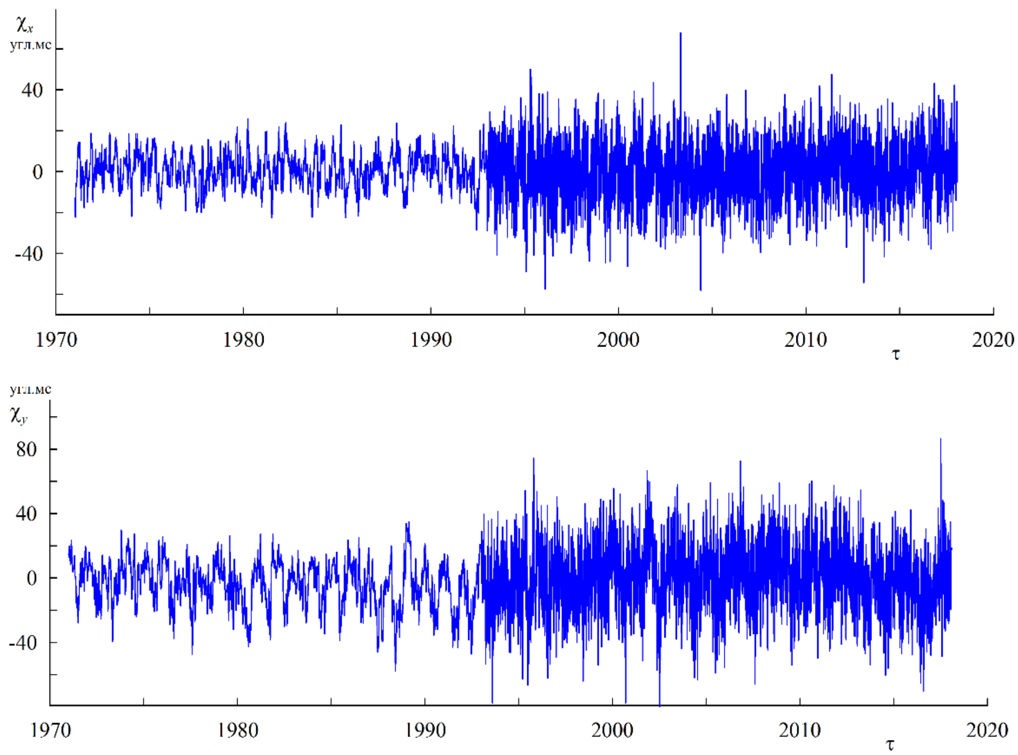

Рис. 2.10 Возмущения χ_x, χ_y от океана

Для численного интегрирования совместно учитывались атмосферные и океанические возмущения. Интегрирование проводилось методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

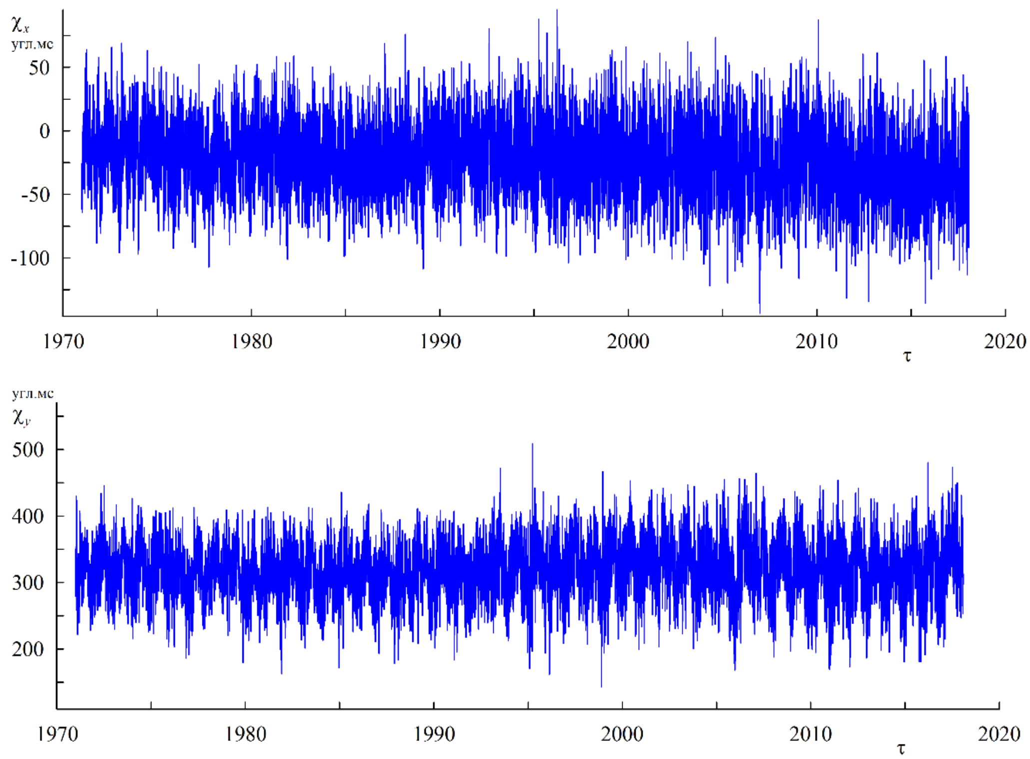

Рис. 2.11 Совместные возмущения χ_x, χ_y от атмосферы и океана

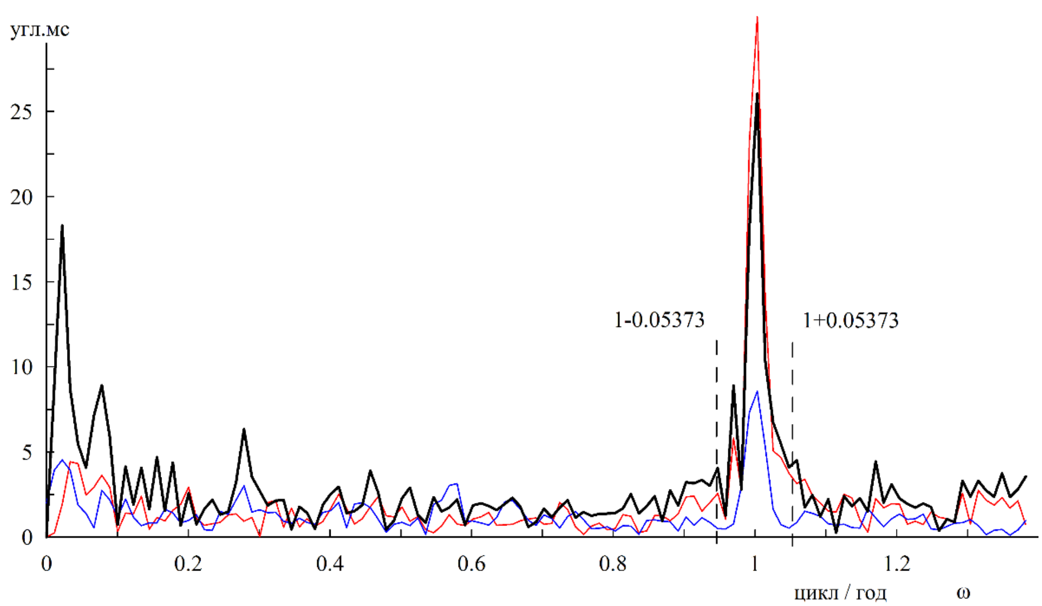

Рис. 2.12 Сравнение амплитудных спектров геодезического возмущения χ_x и возмущений χ_y от атмосферы (красная линия) и океана (синяя линия)

На рис. 2.9-2.10 приводятся графики, учитываемых возмущений χ_x, χ_y, от атмосферы и океана. На рис. 2.11 показаны совместные атмосферно-океанические возмущения.

Для предварительной оценки вклада геофизических возмущений в формирование колебательного процесса, синфазного с прецессионным движением орбиты Луны на рис. 2.12 приводятся сравнения амплитудных спектров геодезического, атмосферного и океанического возмущений χ_y.

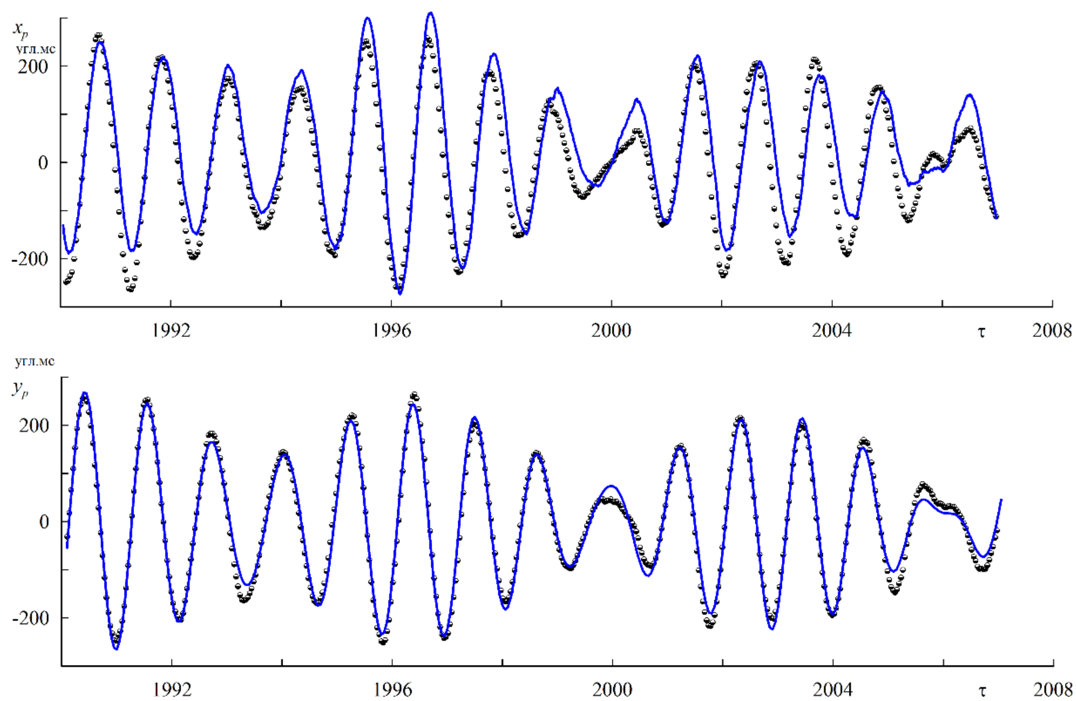

Рис. 2.13 Колебания земного полюса согласно данным наблюдений и измерений МСВЗ (дискретные данные) в сравнении с рассчитанными колебаниями, вызванными возмущением атмосферы и океана

Из графика видно, что рассматриваемый колебательный процесс с комбинационными частотами 1 ± 0.05373 цикл/год атмосферные и океанические возмущения полностью не определяют. Различия между суммами этих гармоник, выделенных из расчетной и наблюдаемой траекторий полюса будут как в амплитуде, так и в сдвиге фазы амплитудной модуляции. Такие же выводы справедливы и для возмущения χ_X. Его график менее читаемый вследствие наложения друг на друга пиков спектров и поэтому он не приводится.

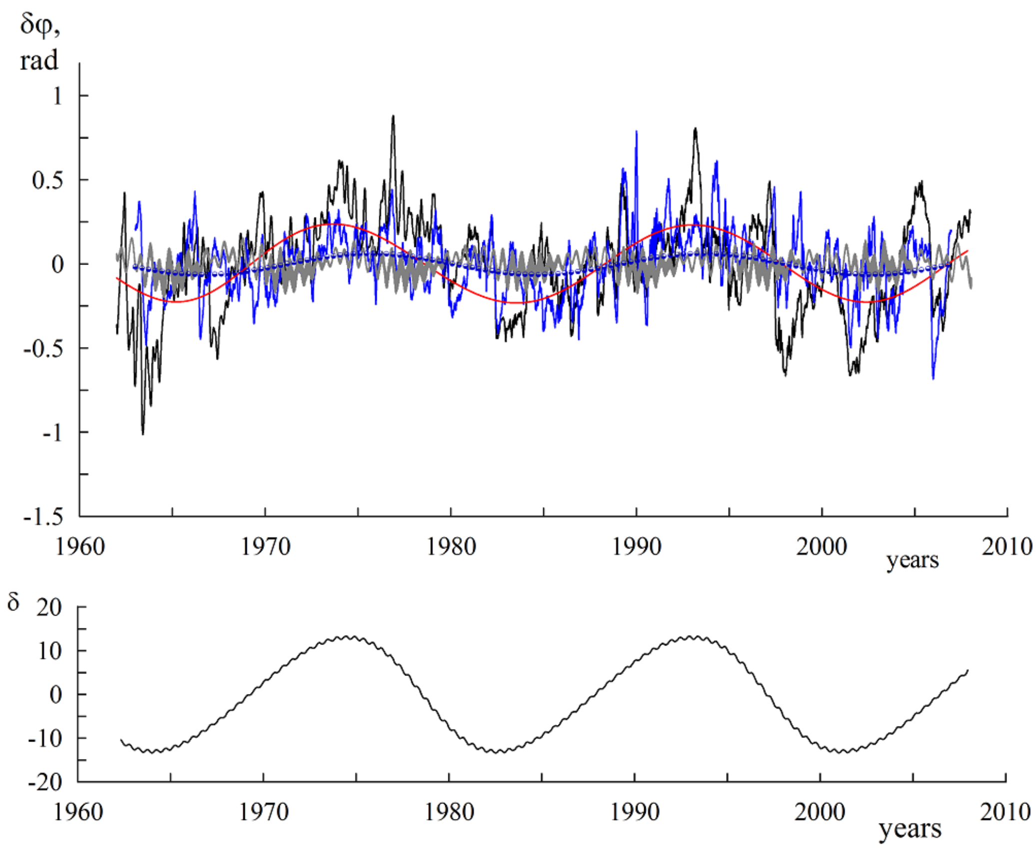

Рис. 2.14. Вариации полярного угла $\delta\varphi$, полученные в результате обработки данных наблюдений и измерений МСВЗ (черная зигзагообразная линия) и в результате преобразования рассчитанного движения полюса с учетом атмосферы и океана (синяя зигзагообразная линия), а также их стационарные гармоники (плавные красная и синяя линии, соответственно) в сравнении с колебаниями угла θ отклонения вдоль экватора точки пересечения экватора с лунной орбитой (внизу).

В результате численного решения дифференциальных уравнений движения земного полюса получена траектория полюса. Возмущающие функции были заданы таблично, согласно публикуемым данным МСВЗ.

На рис. 2.13 приводятся колебания расчетного движения земного полюса с учетом совместных возмущений от атмосферы и океана в сравнении с колебаниями его наблюдаемого движения.

На рис. 2.14 приводится сравнение рассматриваемых колебаний вариаций $\delta\varphi$, выделенных из наблюдаемой и рассчитанной (с учетом атмосферных и океанических возмущений) траекторий земного полюса. Выделить рассматриваемые колебания в амплитуде b не удается. Полученный результат подтверждает сделанные предварительные выводы по спектральному анализу. Процесс получился с меньшей амплитудой и со смещенной фазой модуляции, что указывает на возможно более сложную физическую природу этих колебаний и говорит о неполноте учитываемых возмущений.

2.5. Выводы

В результате обработки данных наблюдений и измерений ряда С01 МСВЗ с помощью предложенного в работе [50] подхода установлено наличие 18-летней цикличности в движении земного полюса на 120-летнем интервале времени. Используя основные кинематические свойства движения полюса рассмотрена модификация преобразования, которая может применяться на длительном интервале времени с учетом смены доминирующей гармоники. Выполненное преобразование зависит только от средних параметров движения земного полюса и не зависит явно от времени.

Показана синфазность 18-летних колебаний координат полюса и колебаний параметров ориентации плоскости лунной орбиты [12, 13, 52, 54]. Найденный квазистационарный колебательный процесс обладает стабильными частотой и фазой, которые совпадают с частотой и фазой колебаний угла наклона плоскости лунной орбиты к экватору Земли. А именно, в результате преобразования полярный радиус полюса совершает колебания синфазные с колебаниями угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору, а колебания его полярного угла происходят синфазно с отклонением вдоль экватора точки пересечения лунной орбиты с экватором.

Расширенность пиков, соответствующих найденной 18-летней цикличности в амплитудном спектре исследуемых параметров, указывает на вовлеченность в механизм возбуждения этих колебаний геофизических сред. Таким образом, можно предположить, что найденный колебательный процесс обусловлен астрономическими и геофизическими факторами в совокупности. Однако, как показал анализ геофизических возмущений на интервале 1963-2007 гг., найденные гармоники только частично могут быть обусловлены колебаниями подвижных сред атмосферы и океана [17].

ГЛАВА 3. ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЮСА ОТ ПРЕЦЕССИИ ЛУННОЙ ОРБИТЫ

3.1 Определение амплитуды модуляции

В предыдущей главе было использовано преобразование координат земного полюса, позволяющее установить синфазность вариаций в его движении и прецессии лунной орбиты на интервале времени начиная с 1900 года. Данное преобразование выполняется в несколько этапов. Параметры преобразования зависят только от средних параметров колебаний полюса и не зависит явно от времени. Но его применение оказывается достаточно громоздким в реализации и обладает рядом неудобств, обусловленных мгновенным изменением средней частоты движения полюса при изменении колебательного режима. В данной главе рассмотрен более простой способ построения преобразования, для которого алгоритм основан на кинематических свойствах движения земного полюса и имеет малую алгоритмическую сложность. Этот алгоритм может быть использован как для уточнения модели движения земного полюса, так и для идентификации геофизических процессов в атмосфере и океане, приводящих к найденным 18-летним колебаниям.

Переход от исходной земной системы координат (x, y) к новой системе (ξ_p, η_p), в которой полюс совершает колебания, синфазные с прецессионным движением лунной орбиты, в матричной записи задаётся выражением:

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi(w_2 - w_1)\left[\Pi(w_1)\begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \tag{3.1.1}$$

$$w_2 = \begin{cases} w_h, & \text{если} \quad a_h < a_{ch} \\ w_{ch}, & \text{если} \quad a_{ch} < a_h \end{cases},$$

$$w_1 = \begin{cases} w_{ch}, & \text{если} \quad a_h < a_{ch} \\ w_h, & \text{если} \quad a_{ch} < a_h \end{cases},$$

$$\dot{w}_h = \nu\omega_*, \quad \dot{w}_{ch} = N\omega_*$$

Как показано в главе 2, полярный радиус (амплитуда) b в системе (ξ_p, η_p) совершает колебания, синфазные с колебанием угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору. Однако, определение амплитуды b непосредственно из преобразования (3.1.1) оказывается достаточно громоздким.

Как и ранее, через a_p, ψ_p и $x_p = x - c_x$, $y_p = y - c_y$ обозначим, соответственно, полярные и декартовы координаты полюса, задающие его положение относительно полюса инерции. Переменная фаза полюса будет определяться выражением:

$$\mathrm{tg}\psi_p = \frac{y_p}{x_p} \tag{3.1.2}$$

Отбросив менее значимые гармоники, разделим колебательный процесс земного полюса на чандлеровское и годичное колебание с квазипостоянными амплитудами и линейными фазами:

$$\begin{aligned} x_p &= a_{ch}\cos w_{ch} + a_h \cos w_h, \\ y_p &= a_{ch}\sin w_{ch} + a_h \sin w_h \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Тогда с учётом (3.1.3) выражение для ψ_p приводится к виду (2.2.6). Как показано в главе 1 первое слагаемое в (2.2.6) – монотонно возрастающая функция при $a_h > a_{ch}$, а при $a_h < a_{ch}$ – монотонно убывающая и представима в виде суммы линейной функции и периодического слагаемого. Вследствие этого средняя частота

$$\left\langle \dot{\psi}_p \right\rangle_T = \frac{\psi_p(t+T) - \psi_p(t)}{T} = \int_t^{t+T} \dot{\psi}_p dt \qquad (3.1.4)$$

за период $T = \dfrac{2\pi}{(\nu - N)\omega_*}$ модуляции гармоник, является кусочно-постоянной функцией и принимает значения годичной (при $a_h > a_{ch}$), чандлеровской (при $a_h < a_{ch}$) частот или их полусуммы (при $a_h = a_{ch}$).

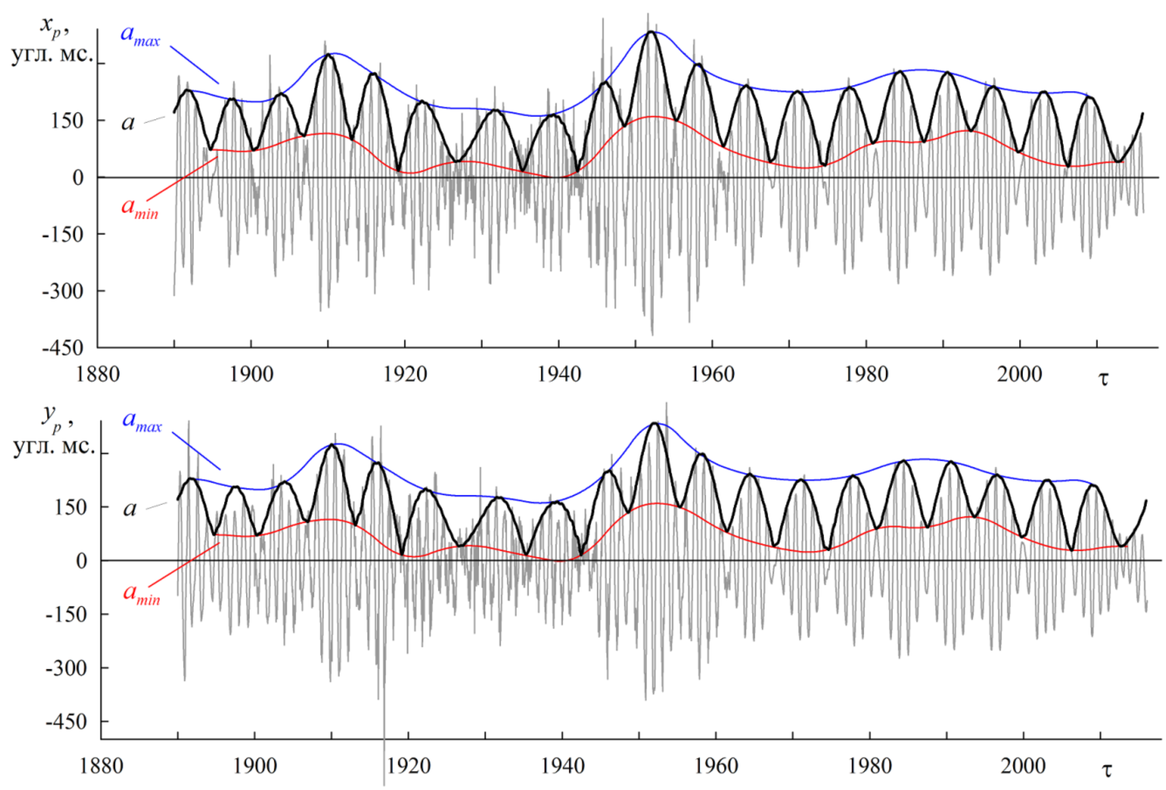

Рис. 3.1. Колебания координат x_p, y_p земного полюса без трендовой компоненты (серая линия); амплитуда a_p колебаний полюса (черная линия) и две её огибающие – верхняя $a_{\max}$ (синяя линия) и нижняя $a_{\min}$ (красная линия).

Таким образом, преобразование (3.1.1) в момент изменения средней частоты движения полюса может иметь особенность, что и создает определенные неудобства для его реализации. Эти неудобства можно достаточно легко устранить.

Для определения амплитуды b перейдем к полярным координатам в исходной и окончательной системах координат:

$$
\begin{gathered}
x_p = x - c_x = a\cos\psi_p, \quad y_p = y - c_y = a\sin\psi_p \\
\xi_p = b\cos\delta\varphi, \quad \eta_p = b\sin\delta\varphi
\end{gathered}
\tag{3.1.5}
$$

Тогда из (3.1.1) можно записать:

$$
\begin{pmatrix} b\cos\varphi \\ b\sin\varphi \end{pmatrix} = \Pi^{-1}(w_2 - w_1)\begin{pmatrix} b\cos\delta\varphi \\ b\sin\delta\varphi \end{pmatrix} = \Pi(w_1)\begin{pmatrix} a_p\cos\psi_p \\ a_p\sin\psi_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}
\tag{3.1.6}
$$

Теперь из (3.1.6) следует, что амплитуду b движения полюса в системе (ξ_p, η_p) можно вычислить, используя полярные координаты полюса (a_p, ψ_p):

$$
b^2 = a_p^2 + a_0^2 - 2a_p a_0 \cos\left(\psi_p - w_1\right)
\tag{3.1.7}
$$

Угол $\delta\psi_p = \psi_p - w_1$, амплитуду a_p и ее среднее a_0 можно вычислить как численно, так и численно-аналитически.

Амплитуду a_p можно найти численно из (3.1.5), используя данные координат полюса (x, y) (предварительно, с помощью обработки данных наблюдений, определив тренд – смещение “среднего” полюса). На рис. 3.1 построены графики колебаний координат x_p, y_p земного полюса без трендовой составляющей, а также сглаженная амплитуда a_p. Для найденной амплитуды легко определить её огибающие, которые обозначим $a_{\max}$, $a_{\min}$. Они приведены на рис.3.1. Огибающие проходят через локальные экстремумы и построены при помощи сплайнов на трехточечном шаблоне.

Из (3.1.3) и (3.1.5) следует, что амплитуда a_p движения полюса определяется выражением:

$$a_p = \left(a_{ch}^2 + a_h^2 + 2a_{ch}a_h\cos\left(w_{ch} - w_h\right)\right)^{1/2} \qquad (3.1.8)$$

Далее, из (3.1.8) легко устанавливается зависимость огибающих амплитуды от амплитуд чандлеровской и годичной гармоник. Используя эту зависимость, амплитуду a_p выразим через ее огибающие и разность фаз $w_{ch} - w_h$:

$$a_p = \frac{1}{2}\left(a_{\max}^2 + a_{\min}^2 + \left(a_{\max}^2 - a_{\min}^2\right)\cos\left(w_{ch} - w_h\right)\right)^{1/2} \qquad (3.1.9)$$

Выражение (3.1.9) позволяет исключить необходимость разделения колебания полюса на чандлеровскую и годичную составляющие в дальнейших вычислениях.

Теперь, используя (2.2.11), можно выразить зависимость модуля вариации угла $\delta\psi_p^{\nu/N} = \psi_p - w_1$ от огибающих амплитуды a_p:

$$\left|\delta\psi_p^{\nu/N}\right| = \left|\delta\psi_p^{inv}\right| = \frac{\nu - N}{4}\int_{t_0}^{t}\frac{a_{\max}^2(t) - a_{\min}^2(t)}{a_p^2(t)}\omega_* dt - \frac{\nu - N}{2}\omega_* t, \qquad (3.1.10)$$

где $a_{\max}$, $a_{\min}$ – верхняя и нижняя огибающие амплитуды a_p.

Среднее значение амплитуды также выражается через её огибающие:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} a_p(t)dt = \frac{2a_{\max}}{\pi}E\left(\frac{\sqrt{a_{\max}^2 - a_{\min}^2}}{a_{\max}}\right), \qquad (3.1.11)$$

где E – полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Можно показать, что стационарная гармоника с частотой прецессии лунной орбиты, определённая по огибающим с помощью полученных выражений, будет в точности совпадать с соответствующей гармоникой полуразности огибающих $\left(a_{\max} - a_{\min}\right)/2$. Для этого в (3.1.6) необходимо подставить выражения (3.1.3), используя (3.1.5). Выразив (3.1.6) через огибающие амплитуды, получим:

$$\begin{pmatrix} b\cos\varphi \\ b\sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{\max} + a_{\min} + (a_{\max} - a_{\min})\cos(w_h - w_{ch}) \\ \pm(a_{\max} - a_{\min})\sin(w_h - w_{ch}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.12}$$

При изменении колебательного режима (когда меняется доминирующая гармоника) проекция на одну из осей промежуточной системы координат (в которой координаты полюса ($b\cos\varphi$, $b\sin\varphi$)) меняет знак вследствие изменения направления движения полюса в этой системе. Во второй строке (3.1.12) знак «+» соответствует случаю, когда $a_{ch} > a_h$, а знак «-» случаю – $a_{ch} < a_h$. Из (3.1.12) следует, что в качестве a_0 вместо среднего значения амплитуды, удобнее выбрать среднее арифметическое огибающих $\bar{a}_p = (a_{\max} + a_{\min})/2$. Это в свою очередь приведет к окончательному выражению амплитуды b:

$$b^* = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} \tag{3.1.13}$$

Следует заметить, что формула (3.1.13) выполняется точно при условии линейности фаз чандлеровской и годичной гармоник и выполняется приближенно в случае их небольших вариаций.

3.2 18-летние вариации амплитуды

Теперь построим ряд амплитуды b, используя как численный подход, так и численно-аналитический, с учетом полученных выше формул. Затем выделим из построенного ряда b квазистационарную гармонику с частотой прецессии лунной орбиты и оценим различия в результатах, полученных разными способами.

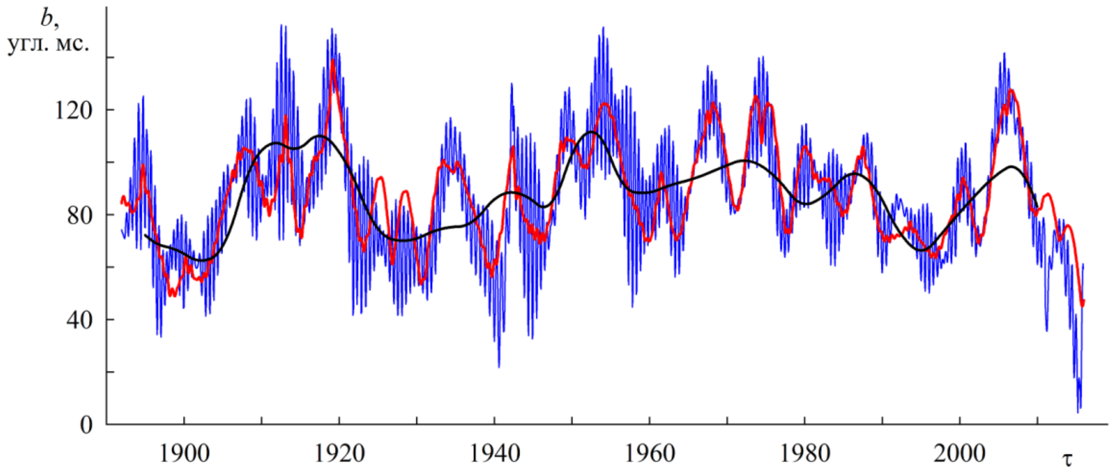

Рис. 3.2. Колебания амплитуды b, вычисленной тремя способами: численно с помощью формулы (3.1.7) – синяя линия; численно-аналитически с помощью формул (3.1.7), (3.1.10) – красная линия; численно, используя огибающие амплитуды, согласно формуле (3.1.13).

На рис. 3.2 приводятся графики амплитуды b, полученные тремя способами. Амплитуду b можно вычислить из уравнения (3.1.7), предварительно построив с помощью численной обработки данных наблюдений амплитуду a_p, её среднее a_0 и угол $\psi_p - w_1$ (полярный угол в промежуточной системе координат). При этом, как видно из рисунка, результат будет содержать высокочастотные колебания. Исключить их можно подставив в (3.1.7) сглаженные амплитуду a_p, её среднее a_0 и полярный угол $\delta\psi_p = \psi_p - w_1$, выраженные через огибающие, согласно (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11), соответственно. Однако, как было показано выше, амплитуду b можно найти и из уравнения (3.1.13), которая в силу метода определения огибающих будет содержать только долгопериодические колебания.

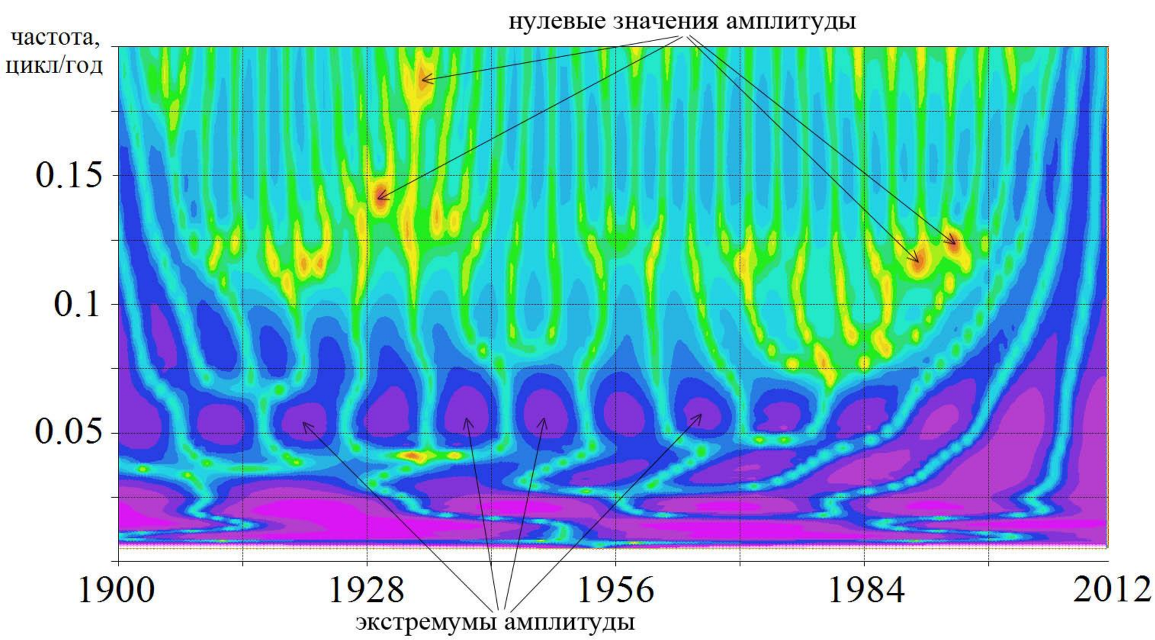

Рис. 3.3. Вэйвлет-спектр амплитуды b, вычисленной вторым способом.

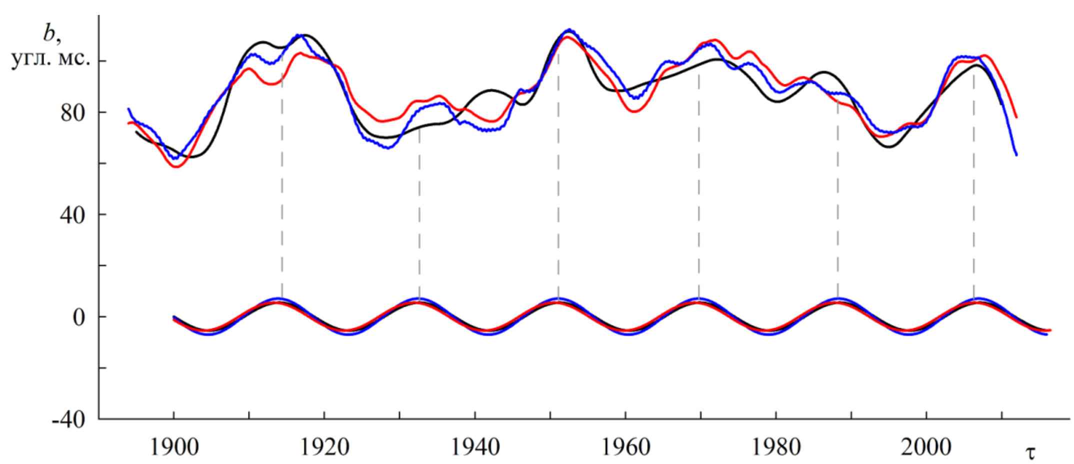

Рис. 3.4. Вверху: сглаженные графики амплитуды b, вычисленной первыми двумя способами (синяя и красная линии), а также амплитуда b^* (черная линия). Внизу: 18-летние стационарные гармоники с частотой прецессии орбиты Луны, выделенные из амплитуды b, построенной тремя способами.

На рис. 3.3 показан вэйвлет-спектр амплитуды b, вычисленной вторым способом. Сиреневый цвет соответствует экстремумам амплитуды, а красный – нулевым значениям. Из спектра хорошо выделяется достаточно стабильная гармоника со средним периодом 18.6 лет, что соответствует частоте 0.05373 цикла в год долготы восходящего узла лунной орбиты.

Для более наглядного сравнения результатов определения b усредним на 8-летнем интервале времени амплитуду b, вычисленную первыми двумя способами. На рис. 3.4 приведено сравнение усреднённых графиков b и графика b^*, а также построены стационарные гармоники с частотой прецессии лунной орбиты, выделенные из графиков амплитуды. Из рис. 3.4 видно, что хотя определение амплитуды b с помощью выражения (3.1.13) является наиболее простым, оно является и наименее точным по сравнению с нахождением b по формуле (3.1.7). Можно заметить, что наибольшие расхождения наблюдаются на интервале с 1930 по 1945 гг., когда амплитуда чандлеровских колебаний полюса была мала. Однако, как видно из рис.3.4, погрешность определения амплитуды практически не отразилась на выделенной из неё стационарной гармоники.

Заметим, что если a_0 в (3.1.7) определяется выражением (3.1.11), то исследуемая гармоника в b окажется немного большей амплитуды, чем в b^*.

Действительно, обозначив $\Delta = a_0 - \overline{a}_p > 0$, из (3,1,7) можно записать:

$$b^2 + 2\Delta a_h \cos\left(w_h - w_{ch}\right) = a_h^2 + \Delta^2 \qquad (3.2.1)$$

После усреднения на периоде модуляции при условии, что все коэффициенты являются квазипостоянными величинами, получим:

$$b^2 = \frac{\left(a_h^2 + \Delta^2\right)\pi^2}{4E^2\left(\lambda\right)} - 2a_h\Delta, \quad \lambda = \frac{4a_h\Delta}{\left(a_h + \Delta\right)^2} \qquad (3.2.2)$$

Из обработки данных наблюдений о движении полюса выполняется соотношение средних амплитуд чандлеровской и годичной компонент $\bar{a}_{ch} \cong 1.5\bar{a}_h$. Подставив это соотношение в (3.2.2), найдем, что $b \approx 1.2b^*$.

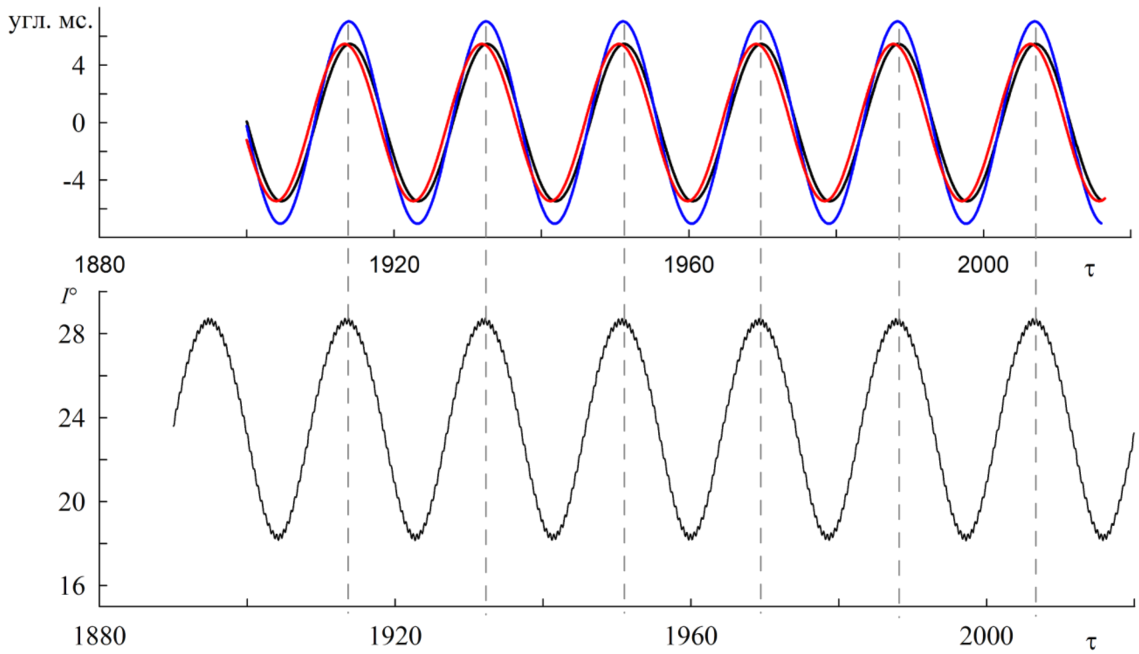

Рис. 3.5. Верхний график: 18-летняя стационарная гармоника в движении полюса, выделенная из b (синяя и черная линии) и b^* (красная линия); Нижний график: колебание угла наклона лунной орбиты к земному экватору.

На верхнем графике рис. 3.5 приведены стационарные гармоники с частотой прецессии лунной орбиты, выделенные из амплитуды b. Как было отмечено выше, амплитуда b вычислялась следующими способами: полностью численно, согласно (3.1.7), – синяя линия, численно-аналитически, согласно (3.1.7), с использованием выражений (3.1.9), (3.1.10) и заменой a_0 на $\bar{a}_p$ – черная линия, а также, согласно выражению (3.1.13), – красная линия. На нижнем рисунке приводится вычисленный из лунных эфемерид угол наклона плоскости орбиты Луны к экватору Земли, который изменяется в пределах от 18.30° до 28.58° с периодом, равным периоду прецессии лунной орбиты. Из установленной синфазности колебаний можно сделать вывод о влиянии прецессионного движения орбиты Луны на вариацию амплитуды колебаний полюса. Причём, влияние идёт как на амплитуду b, так и на амплитуду a_p, с учётом их зависимости, согласно равенству (3.1.13).

Таким образом, с помощью определения огибающих амплитуды можно легко выделить исследуемое колебание с частотой прецессии лунной орбиты. Как показано аналитически, результаты применения формулы (3.1.13) и формулы (3.1.7) при указанных выше условиях совпадают и подтверждаются численными расчётами. Из рис. 3.5 видно, что если в (3.1.7) величина a_0 является средним значением амплитуды (за период модуляции) $\bar{a}_p$, а не ее огибающих, то амплитуда рассматриваемого колебания в b будет увеличена примерно в 1.2 раза. Это связано с тем, что b зависит от a_0 (в отличие от b^*, которое не зависит от среднего значения амплитуды), а в средних a_0 и $\bar{a}_p$ также присутствуют колебания с частотой прецессии лунной орбиты.

3.3 Зависимость фазы движения земного полюса от прецессии орбиты Луны

Как показано в главе 2 18-летние вариации испытывет и полярный угол $\delta\varphi$ в системе (ξ_p, η_p). Для его определения из преобразования (2.1.1) требуется выполнение ряда дополнительных преобразований (инверсия на первом этапе преобразования и обратная инверсия после второго этапа преобразования), которые существенно усложняют вычислительный процесс. Рассмотрим другой способ получения вариаций полярного угла $\delta\varphi$.

Если фазы w_h, w_{ch} являются линейными функциями времени $\nu t+\alpha_h$ и $Nt+\alpha_{ch}$, соответственно, то $\delta\varphi=0$. Действительно, из (3.1.12) следует, что амплитуда b в точности равна полуразности огибающих амплитуды a_p, если в качестве a_0 - среднего значения амплитуды a_p, выбрать среднее арифметическое огибающих $\bar{a}=\left(a_{\max}+a_{\min}\right)/2$. Тогда из (3.1.12) получим: $\varphi=\left[\operatorname{sgn}\left(a_{ch}-a_h\right)\right]\left(w_h-w_{ch}\right)=\pm\left(w_h-w_{ch}\right)=\pm\left(\nu-N\right)t\pm\left(\alpha_h-\alpha_{ch}\right)$. А т.к. на втором этапе преобразования поворот осуществляется на угол $\pm(\nu-N)t$ $\pm(\alpha_h-\alpha_{ch})$ в зависимости от колебательного режима в сторону движения полюса в промежуточной системе, то $\delta\varphi=0$.

Пусть теперь фазы чандлеровского и годичного колебаний представляются в виде суммы линейной части и вариаций $\delta\psi_{ch}$, $\delta\psi_h$: $\psi_{ch}=w_{ch}+\delta\psi_{ch}$, $\psi_h=w_h+\delta\psi_h$. Найдем координаты полюса после поворота земной системы на угол w_1, соответствующий среднему движению полюса. Если годичная компонента является доминирующей ($a_h>a_{ch}$), то $w_1=w_h$ и

$$\Pi(w_1)\begin{pmatrix}x_p\\ y_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_p\cos\left(\psi-\nu t\right)\\ a_p\sin\left(\psi-\nu t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_h\cos\delta\psi_h+a_{ch}\cos\left((\nu-N)t+\Delta\alpha-\delta\psi_{ch}\right)\\ a_h\sin\delta\psi_h-a_{ch}\sin\left((\nu-N)t+\Delta\alpha-\delta\psi_{ch}\right)\end{pmatrix},\qquad (3.3.1)$$

$$\Delta\alpha=\alpha_h-\alpha_{ch}.$$

Если доминирующая – чандлеровская компонента ($a_h<a_{ch}$), то $w_1=w_{ch}$ и

$$\Pi(w_1)\begin{pmatrix}x_p\\ y_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_p\cos\left(\psi-Nt\right)\\ a_p\sin\left(\psi-Nt\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{ch}\cos\delta\psi_{ch}+a_h\cos\left((\nu-N)t+\Delta\alpha+\delta\psi_h\right)\\ a_{ch}\sin\delta\psi_{ch}+a_h\sin\left((\nu-N)t+\Delta\alpha+\delta\psi_h\right)\end{pmatrix}.\qquad (3.3.2)$$

Выражения (3.3.1) и (3.3.2) можно объединить при $w_1=w_{h/ch}$ и выразить их через огибающие амплитуды a_p:

$$\Pi(w_1)\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \tag{3.3.3}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a_{\max}+a_{\min})\cos\delta\psi_{h/ch} + (a_{\max}-a_{\min})\cos((\nu-N)t+\Delta\alpha \mp \delta\psi_{ch/h}) \\ (a_{\max}+a_{\min})\sin\delta\psi_{h/ch} \mp (a_{\max}-a_{\min})\sin((\nu-N)t+\Delta\alpha \mp \delta\psi_{ch/h}) \end{pmatrix}.$$

Теперь преобразование (3.1.1) представим в виде:

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi(w_2)\begin{pmatrix} x-c_x \\ y-c_y \end{pmatrix} - \Pi(w_2-w_1)\begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.4}$$

где $a_0 = \overline{a} = (a_{\max}+a_{\min})/2$.

Первое слагаемое в правой части (3.3.4) можно получить из (3.3.3) поменяв местами сумму и разность огибающих амплитуды, а также поменяв местами $\delta\psi_{h/ch}$ и $\delta\psi_{ch/h}$:

$$\Pi(w_2)\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \tag{3.3.5}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a_{\max}-a_{\min})\cos\delta\psi_{ch/h} + (a_{\max}+a_{\min})\cos((\nu-N)t+\Delta\alpha \pm \delta\psi_{h/ch}) \\ (a_{\max}-a_{\min})\sin\delta\psi_{ch/h} \pm (a_{\max}+a_{\min})\sin((\nu-N)t+\Delta\alpha \pm \delta\psi_{h/ch}) \end{pmatrix}.$$

Второе слагаемое правой части в (3.3.4) записано для линейных фаз w_h, w_{ch}. Вектор с компонентами (a_0, 0) представляет собой координаты средней точки преобразованной траектории полюса после первого поворота. Согласно последовательности применения преобразования (3.1.1), изложенной в главе 2, тренд после первого поворота исключается с помощью фильтрации долгопериодических колебаний на основе Фурье-преобразования. Поэтому в случае нелинейных фаз чандлеровской и годичной компонент его следует заменить вектором:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a_{\max}+a_{\min})\cos\delta\psi_{h/ch} \\ (a_{\max}+a_{\min})\sin\delta\psi_{h/ch} \end{pmatrix}. \tag{3.3.6}$$

Тогда из (3.3.4), получим:

$$\begin{pmatrix}\xi_p\\ \eta_p\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(a_{\max}-a_{\min})\cos\delta\psi_{ch/h}+(a_{\max}+a_{\min})\cos((\nu-N)t+\Delta\alpha\pm\delta\psi_{h/ch})\\ (a_{\max}-a_{\min})\sin\delta\psi_{ch/h}\pm(a_{\max}+a_{\min})\sin((\nu-N)t+\Delta\alpha\pm\delta\psi_{h/ch})\end{pmatrix}-$$
$$-\begin{pmatrix}(a_{\max}+a_{\min})\cos((\nu-N)t+\Delta\alpha\pm\delta\psi_{h/ch})\\ \pm(a_{\max}+a_{\min})\sin((\nu-N)t+\Delta\alpha\pm\delta\psi_{h/ch})\end{pmatrix}. \tag{3.3.7}$$

В (3.3.7) шестилетняя и близкая к ней цикличности будут исключены:

$$\begin{pmatrix}\xi_p\\ \eta_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\cos\delta\varphi\\ b\sin\delta\varphi\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(a_{\max}-a_{\min})\cos\delta\psi_{ch/h}\\ (a_{\max}-a_{\min})\sin\delta\psi_{ch/h}\end{pmatrix}, \tag{3.3.8}$$

Откуда окончательно найдем:

$$b=\frac{a_{\max}-a_{\min}}{2},$$
$$\delta\varphi=\begin{cases}\delta\psi_h, если \quad a_{ch}>a_h\\ \delta\psi_{ch}, если \quad a_h>a_{ch}\end{cases} \tag{3.3.9}$$

Как показано выше в главе 2 преобразование (3.1.1) не требует разделения движения полюса на чандлеровскую и годичную компоненты. Более того, если преобразование выполняется в полярных координатах, то не обязательно знать значения частот основных компонент – они определяются численно в ходе преобразования с помощью линейной аппроксимации на основе метода наименьших квадратов.

Для рассмотренного в пп. 3.1, 3.2 упрощенного способа вычисления амплитуды b с помощью формул (3.1.13) или (3.1.7) при условии линейности фаз чандлеровской и годичной компонент достаточно построить сглаженную амплитуду a_p и определить ее огибающие. Разделения движения на две составляющие и использование значений их частот при этом не требуется. Как видно из (3.3.9) ничего не меняется и при учете нелинейности фаз основных компонент. Отсюда в частности следует, что на колебание амплитуды b не оказывают влияния вариации фаз.

Аналогично покажем, что вариация $\delta\varphi$ может быть вычислена (или определена) более просто – с помощью аналитического выражения, также не требующего разделения движения полюса на чандлеровскую и годичную компоненты. Из выражения полярного угла (2.2.6) при учете вариаций $\delta\psi_{ch}$, $\delta\psi_h$ можно записать:

$$\delta\psi_h = \psi_p - \nu t - \alpha_h - \delta\psi_p^{\nu} - C(t_{2k+1}), \text{ если } a_h > a_{ch}. \qquad (3.3.10)$$

Для случая $a_{ch} > a_h$, получим вариацию $\delta\psi_{ch}$:

$$\delta\psi_{ch} = \psi_p - Nt - \alpha_{ch} - \delta\psi_p^{N} - C(t_{2k}). \qquad (3.3.11)$$

В (3.3.10), (3.3.11) $C(t_{2k+1})$, $C(t_{2k})$ - постоянные, обусловленные непрерывностью функции ψ_p в моменты смены доминирующей компоненты с чандлеровской на годичную и обратно, соответственно ($k \in \mathrm{N}$ - номер пары переходов).

Вариации $\delta\psi_p^{\nu}$ и $\delta\psi_p^{N}$ можно выразить через вариацию $\delta\psi_p^{inv}$ (с учетом инверсии случая при $a_h > a_{ch}$ - как описано в главе 2). При этом $\delta\psi_p^{inv}$ определяется только через амплитуду a_p и ее огибающие согласно (3.1.10). Формула (3.1.10) приближенно описывает вариации, т.к. записана для линейных фаз чандлеровской и годичной компонент. Для более точного описания можно использовать или аналогичную формулу с учетом $\delta\psi_{ch}$, $\delta\psi_h$:

$$\delta\psi_p^{inv}(a_{ch}, a_h, \psi_h, \psi_{ch}) = \frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} \frac{\left|a_{\max}^2(t) - a_{\min}^2(t)\right|}{a_p^2(t)} d(\psi_h - \psi_{ch}) - \frac{\psi_h - \psi_{ch}}{2}, \qquad (3.3.12)$$

или численный ряд $\delta\psi_p^{inv}$, построенный на графике 2.4б. Если применяется формула (3.3.12), то разность $\psi_h - \psi_{ch}$ необходимо определить из выражения

(3.1.9). Из выражения (3.1.9) видно, что разность $\psi_h - \psi_{ch}$ определяется только амплитудой движения полюса. Таким образом, для вычисления $\delta\psi_p^{inv}$ с учетом нелинейных фаз также не требуется разделения движения полюса на основные компоненты.

Формулы (3.3.10), (3.3.11) можно объединить в одну:

$$\delta\psi_{h/ch} = \psi_p - \left\langle \dot{\psi}_p \right\rangle_T t - \alpha_{h/ch} - \delta\psi_p^{\nu/N} - C(t), \qquad (3.3.13)$$

где $C(t)$ - ступенчатая функция, состоящая из констант $C(t_k)$, $C(t_{2k})$.

Для непрерывности функции $\delta\psi_{h/ch}$ к ней необходимо добавить ступенчатую функцию. Используя (2.2.7), (2.2.8) и (3.1.10) (константа интегрирования в (2.2.8) выбирается из условия непрерывности $\delta\psi_p$) представим $\delta\psi_{h/ch}$ следующим образом:

$$\delta\psi_{h/ch} - D(t) = \qquad (3.3.14)$$

$$= \psi_p - \frac{\nu + N}{2} t - \operatorname{sgn}\left(a_h - a_{ch}\right)\left(\frac{\nu - N}{2} t - \delta\psi_p^{inv}\right) - D(t) - C(t) - \alpha_{h/ch},$$

где $D(t)$ находится из условия непрерывности функции $\delta\psi_p$:

$$\operatorname{sgn}\left(a_h - a_{ch}\right)\left(\frac{\nu - N}{2} t - \delta\psi_p^{inv}\right) - D(t) = \qquad (3.3.15)$$

$$= \arctan\left(\frac{a_h - a_{ch}}{a_h + a_{ch}} \tan\left(\frac{w_h - w_{ch}}{2}\right)\right) + \pi n = \delta\psi_p,$$

Если $\delta\psi_p^{inv}$ определяется более точной формулой (3.3.12), то $D(t)$ находится из непрерывности функции:

$$\operatorname{sgn}\left(a_h - a_{ch}\right)\left(\frac{\nu - N}{2}t - \delta\psi_p^{inv}\right) - \tilde{D}(t) = \tag{3.3.16}$$

$$= \arctan\left(\frac{a_h - a_{ch}}{a_h + a_{ch}}\tan\left(\frac{\psi_h - \psi_{ch}}{2}\right)\right) + \pi n - \operatorname{sgn}\left(a_h - a_{ch}\right)\left(\frac{\delta\psi_h - \delta\psi_{ch}}{2}\right) - \tilde{D}(t) =$$

$$= \delta\tilde{\psi}_p - \operatorname{sgn}\left(a_h - a_{ch}\right)\left(\frac{\delta\psi_h - \delta\psi_{ch}}{2}\right) - \tilde{D}_1(t),$$

где n - целое число периодов изменения $\psi_h - \psi_{ch}$ на 2π, а $\tilde{D}(t)$ отличается от $D(t)$ не только значениями констант, но и моментами переходов. В связи с тем, что неопределенность момента перехода колебаний полюса из одного режима в другой достаточно большая (около 2 лет) и вариации $\delta\psi_h - \delta\psi_{ch}$ по амплитуде малы, то можно считать, что функции $\delta\tilde{\psi}_p$ и $\delta\psi_p$ близки, а $\tilde{D}_1(t)$ мало.

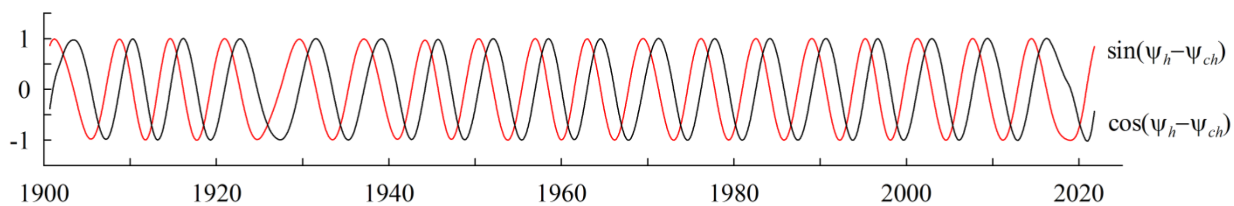

Рис. 3.6 Грмоники $\cos\left(\psi_h - \psi_{ch}\right)$, $\sin\left(\psi_h - \psi_{ch}\right)$.

Непрерывность функции $\delta\psi_p$ (или $\delta\tilde{\psi}_p$) означает непрерывность функции $\delta\psi_{h/ch} - D(t) + C(t) + \alpha_{h/ch}$ (или $\delta\tilde{\psi}_{h/ch} - \tilde{D}(t) + C(t) + \alpha_{h/ch}$). Тем самым будет устранен разрыв функции $\delta\psi_{h/ch} + C(t) + \Psi(t)$ при переходе из одного режима колебаний в другой, где $\Psi(t) \equiv \alpha_{h/ch} - D(t)$. Обозначим:

$$\delta\overline{\varphi} = \begin{cases} \delta\psi_h, \textit{если} \quad a_h > a_{ch} \\ \delta\psi_{ch}, \textit{если} \quad a_{ch} > a_h \end{cases} \tag{3.3.17}$$

Тогда

$$\delta\overline{\varphi} = \psi_p - \operatorname{sgn}\left(a_h - a_{ch}\right)\left(\frac{\nu - N}{2}t - \delta\psi_p^{inv}\right) - \frac{\nu + N}{2} + \Psi(t). \qquad (3.3.18)$$

Далее, воспользуемся равенством

$$\psi_{ch/h} = \psi_p \mp \left(\psi_h - \psi_{ch}\right) - \alpha_{h/ch} - \delta\psi_p^{\nu/N} + C(t). \qquad (3.3.19)$$

Тогда из (3.3.13) можно записать:

$$\delta\psi_{ch/h} = \psi_p + w_1 - w_2 - \alpha_{h/ch} \mp \left(\psi_h - \psi_{ch}\right) - \delta\psi_p^{\nu/N} + C(t), \qquad (3.3.20)$$

где

$$w_1 = \begin{cases} w_{ch}, если\ a_h < a_{ch} \\ w_h, если\ a_h > a_{ch} \end{cases} \qquad w_2 = \begin{cases} w_h, если\ a_h < a_{ch} \\ w_{ch}, если\ a_h > a_{ch} \end{cases} \qquad (3.3.21)$$

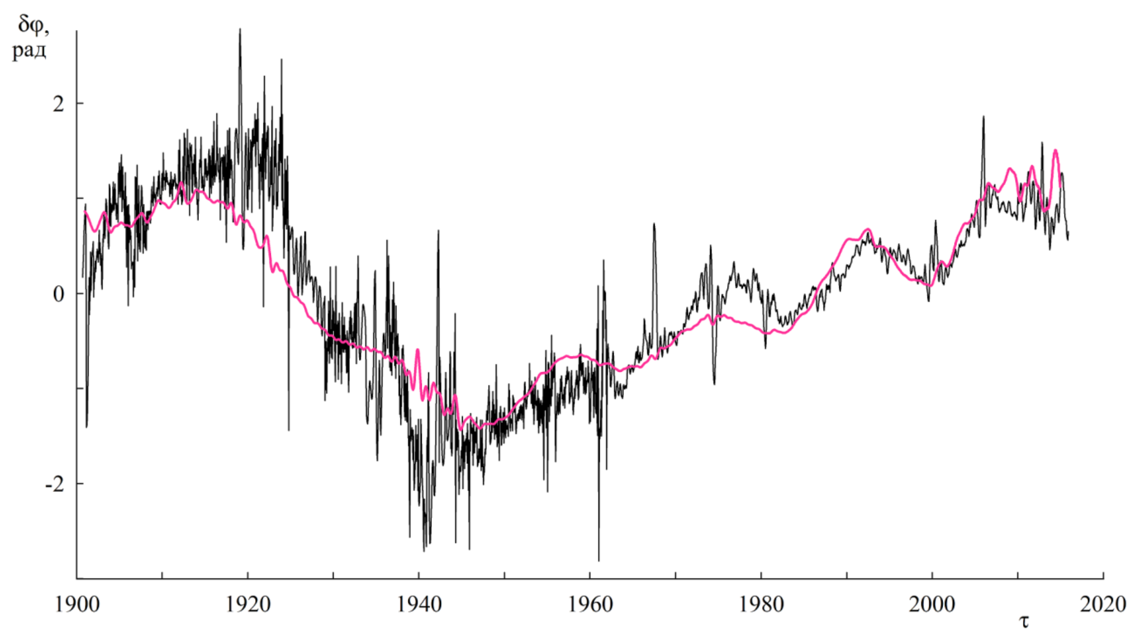

Рис. 3.7 Ряд $\delta\varphi$, построенный согласно (2.1.1) – цветная сглаженная линия и согласно модифицированному способу – черая негладкая линия.

Используя (2.2.7), (2.2.8) и (3.1.10), и принимая во внимание (3.3.9), окончательно получим

$$\delta\varphi = \psi_p + \operatorname{sgn}\left(a_h - a_{ch}\right)\left(\frac{\nu - N}{2}t + \delta\psi_p^{inv} + \psi_h - \psi_{ch}\right) - \frac{\nu + N}{2} - \Psi(t). \tag{3.3.22}$$

Вариация полярного угла $\delta\varphi$ вычисляется без разделения основного движения на чандлеровскую и годичную компоненты. Полярный угол ψ_p может быть вычислен из данных наблюдений, вариация $\delta\psi_p^{inv}$ определяется выражением (3.3.12), разность фаз $\psi_h - \psi_{ch}$ определяется из формулы (3.1.9), в которой разность $w_h - w_{ch}$ следует заменить разностью $\psi_h - \psi_{ch}$:

$$a_p = \frac{1}{2}\left(a_{\max}^2 + a_{\min}^2 + \left(a_{\max}^2 - a_{\min}^2\right)\cos\left(\psi_{ch} - \psi_h\right)\right)^{1/2} \tag{3.3.23}$$

Теперь если сложить (3.3.17) со второй формулой (3.3.9), получим:

$$\delta\varphi + \delta\overline{\varphi} = \delta\psi_{ch/h} + \delta\psi_{h/ch} = \delta\psi_h + \delta\psi_{ch}. \tag{3.3.24}$$

Тогда из (3.3.18) и (3.3.22) найдем сумму вариаций:

$$\delta\psi_h + \delta\psi_{ch} = 2\left(\psi_p - \delta\psi_p - \frac{\nu + N}{2}t\right). \tag{3.3.25}$$

Как видноиз (3.3.25) разрывные слагаемые сокращаются. Этот же результат получается из представления ψ_p суммой слагаемых:

$$\psi_p = \frac{\psi_h + \psi_{ch}}{2} - \delta\psi_p. \tag{3.3.26}$$

Чтобы найти функцию $\delta\varphi$, используя формулу (3.3.22) необходимо найти разность фаз чандлеровской и годичной компонент из уравнения (3.1.23). Разность фаз зависит только от амплитуды и ее огибающих. Они были определены ранее. На рис. 3.6 приводятся функции $\cos\left(\psi_h - \psi_{ch}\right)$, $\sin\left(\psi_h - \psi_{ch}\right)$. Из рисунка хорошо видно, что при изменении средней частоты меняется частота, построенных гармоник.

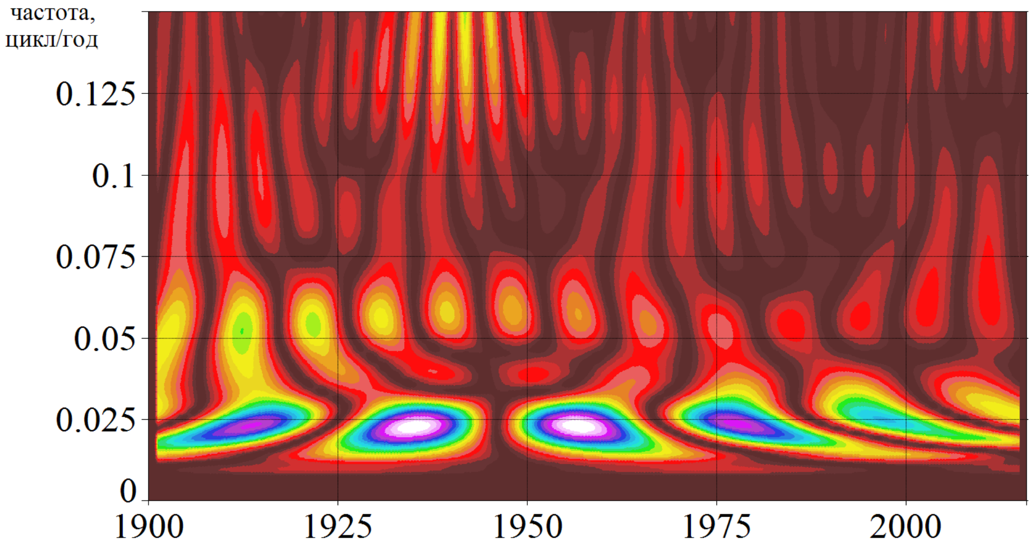

Рис. 3.8 Вэйвлет спектр ряда $\delta\varphi$ за вычетом кусочно-линейной части

Это связано с тем, что чандлеровская частота становится выше, а значит ближе к годичной частоте. Тогда частота, $\dot{\psi}_h - \dot{\psi}_{ch}$ амплитудной модуляции оказывается ниже.

Теперь построим ряд $\delta\varphi$, используя ряды ψ_p, $\delta\psi_p^{inv}$, $\psi_h - \psi_{ch}$, а также линейные и ступенчатые функции, согласно (3.3.22). На рис. 3.7 приведено сравнение вычисленного ряда $\delta\varphi$ в главе 2 на основе преобразования (2.1.1) и с помощью формулы (3.3.22).

На рис. 3.8 приводится вэйвлет-спектрограмма построенного ряда $\delta\varphi$. Предварительно из ряда была удалена кусочно-линейная часть. На спектре выделяется гармоника с частотой, близкой к частоте прецессии орбиты Луны 0.05373 циклов/год.

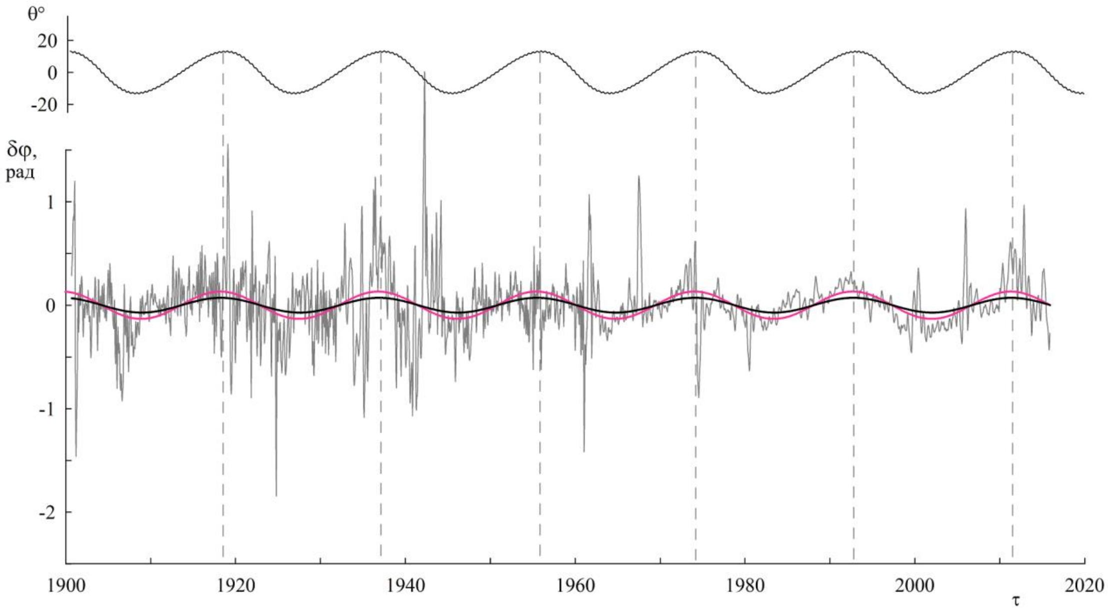

Рис. 3.9. Вариация полярного угла $\delta\varphi$ - серая линия; её стационарная гармоника – черная линия; стационарная гармоника, полученная первым способом в главе 2 – красная линия в сравнении с колебаниями угла θ отклонения вдоль экватора точки пересечения экватора с лунной орбитой.

Сравним колебания $\delta\varphi$ после фильтрации низкочастотной составляющей (частоты ниже 0.5 циклов/год) с колебанием угла θ отклонения вдоль экватора точки пересечения экватора с лунной орбитой. На рис. 3.9 приводятся колебания θ, измеряемые в градусах, построенный ряд $\delta\varphi$, выделенная из него стационарная гармоника, а также стационарная гармоника аналогичного ряда $\delta\varphi$, полученного в главе 2. Из проведенных вычислений можно сделать вывод о наличии в построенных рядах $\delta\varphi$ гармоники, связанной с прецессионным движением орбиты Луны.

3.4 Вариации чандлеровской и годичной компонент с 18-летним периодом

Как показано выше 18-летние вариации содержатся в амплитуде b и в вариации угла $\delta\varphi$, которые определяются выражениями (3.3.9), (3.3.22). Но аналогичные вариации содержатся и в других параметрах. Покажем это.

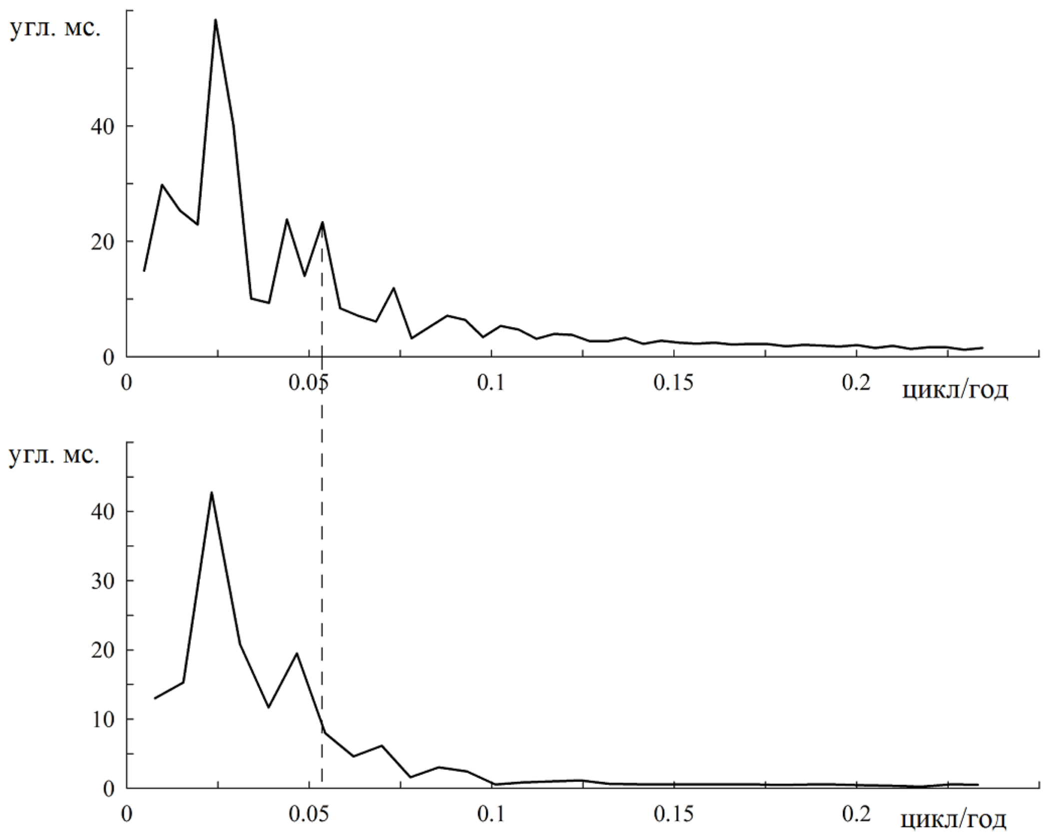

Рис. 3.10 Амплитудные спектры $a_{\max}$ (верхний график), $a_{\min}$ (нижний график)

Из формулы (3.3.9) для амплитуды b видно, что наличие 18-летней цикличности обусловлено огибающими амплитуды a_p. Тогда 18-летняя гармоника должна содержаться или в обеих огибающих или в одной из них. На рис. 3. 10 приводятся амплитудные спектры огибающих $a_{\max}$, $a_{\min}$. Таким образом уверенно обнаружить данную гармонику удается только в $a_{\max}$. Следовательно, данная гармоника должна присутствовать без сдвига фазы и в полусумме огибающих. Но огибающие можно выразить через амплитуды чандлеровской и годичной компонент:

$$\bar{a}_0 = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \begin{cases} a_{ch}, если \quad a_{ch} > a_h \\ a_h, если \quad a_h > a_{ch} \end{cases}, \qquad (3.4.1)$$
$$b = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = \begin{cases} a_h, если \quad a_{ch} > a_h \\ a_{ch}, если \quad a_h > a_{ch} \end{cases}$$

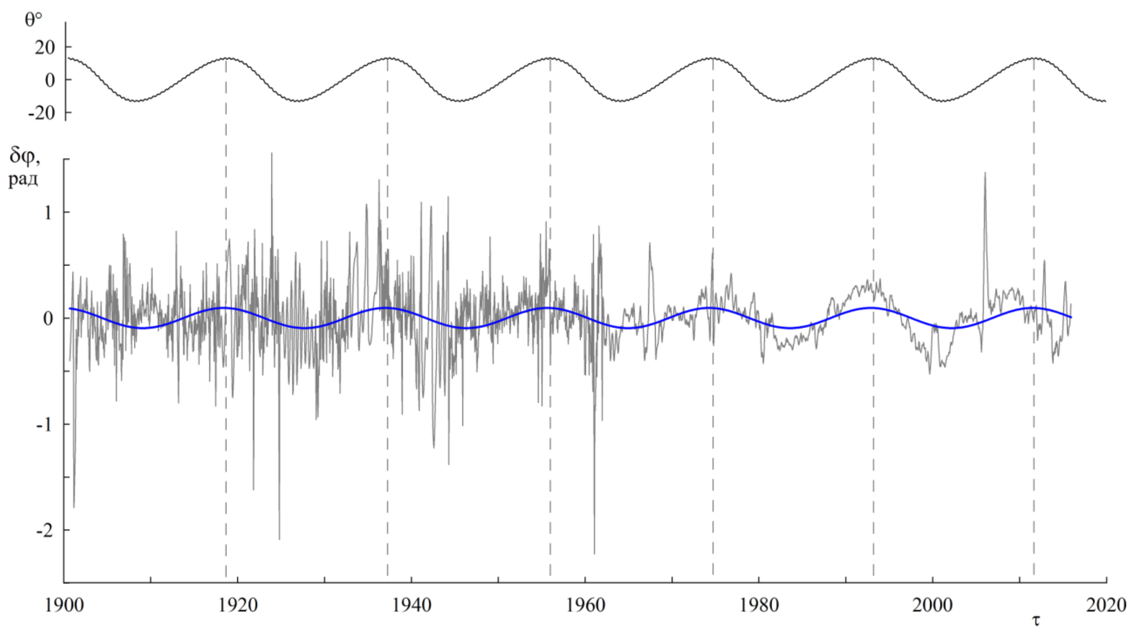

Рис. 3.11. Вариация полярного угла $\delta\varphi$ - серая линия; её стационарная гармоника – синяя линия; в сравнении с колебаниями угла θ отклонения вдоль экватора точки пересечения экватора с лунной орбитой.

Таким образом, из (3.4.1) следует наличие 18-летней цикличности в амплитудах чандлеровской и годичной компонент независимо от колебательного режима полюса.

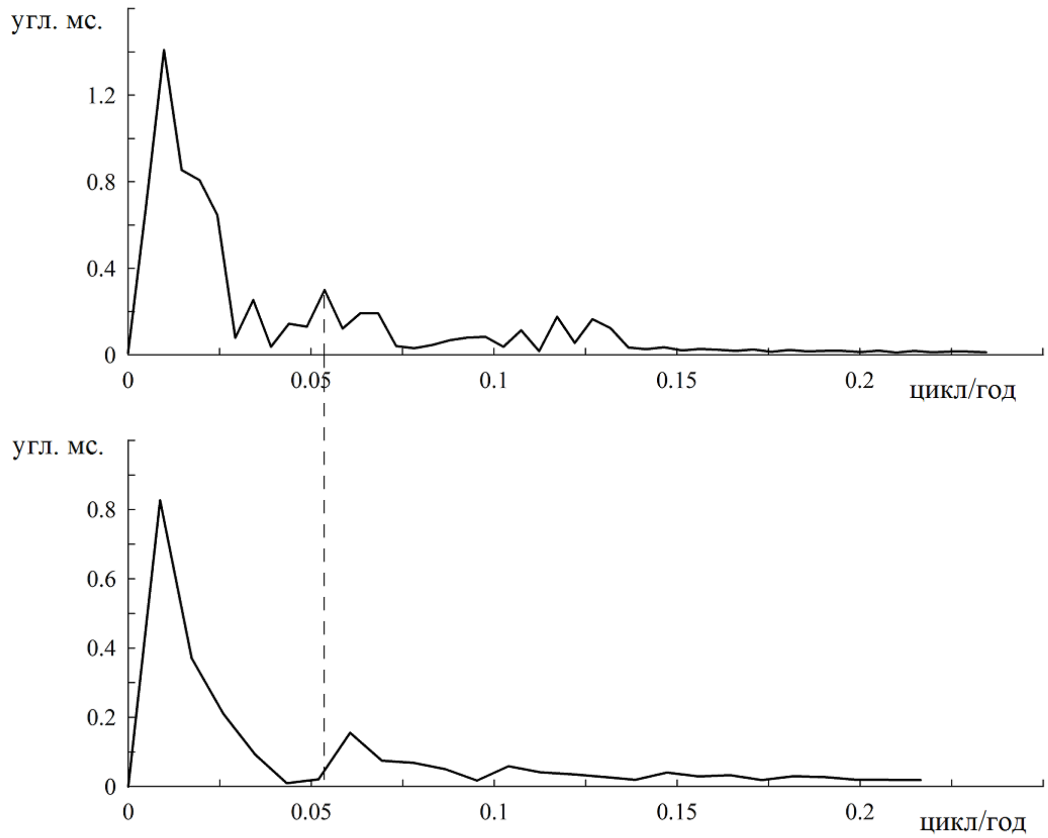

Рис. 3.12 Амплитудные спектры $\Delta\psi^{+} = \delta\varphi + \delta\overline{\varphi}$ (верхний график), $\Delta\psi^{-} = \delta\psi_h - \delta\psi_{ch}$ (нижний график)

Аналогичные рассуждения можно провести и для вариации фазы. Действительно, если вычислить ряд $\delta\overline{\varphi}$ согласно (3.3.18), то окажется, что и этот ряд содержит 18-летнюю гармонику. На рис. 3.11 приводятся колебания $\delta\overline{\varphi}$ за вычетом низкочастотной составляющей в сравнении с колебаниями угла θ.

Теперь, согласно (3.3.24) можно вычислить сумму вариаций чандлеровской и годичной компонент

$$\Delta\psi^{+} = \delta\psi_h + \delta\psi_{ch} = \delta\varphi + \delta\overline{\varphi}. \tag{3.4.2}$$

Разность вариаций запишем следующим образом:

$$\Delta\psi^{-} = \delta\psi_h - \delta\psi_{ch} = \psi_h - \psi_{ch} - \left(w_h - w_{ch}\right). \qquad (3.4.3)$$

Но разность фаз $\psi_h - \psi_{ch}$ уже найдена выше из формулы для амплитуды:

$$a_p = \frac{1}{2}\left(a_{\max}^2 + a_{\min}^2 + \left(a_{\max}^2 - a_{\min}^2\right)\cos\left(\psi_{ch} - \psi_h\right)\right)^{1/2}. \qquad (3.4.4)$$

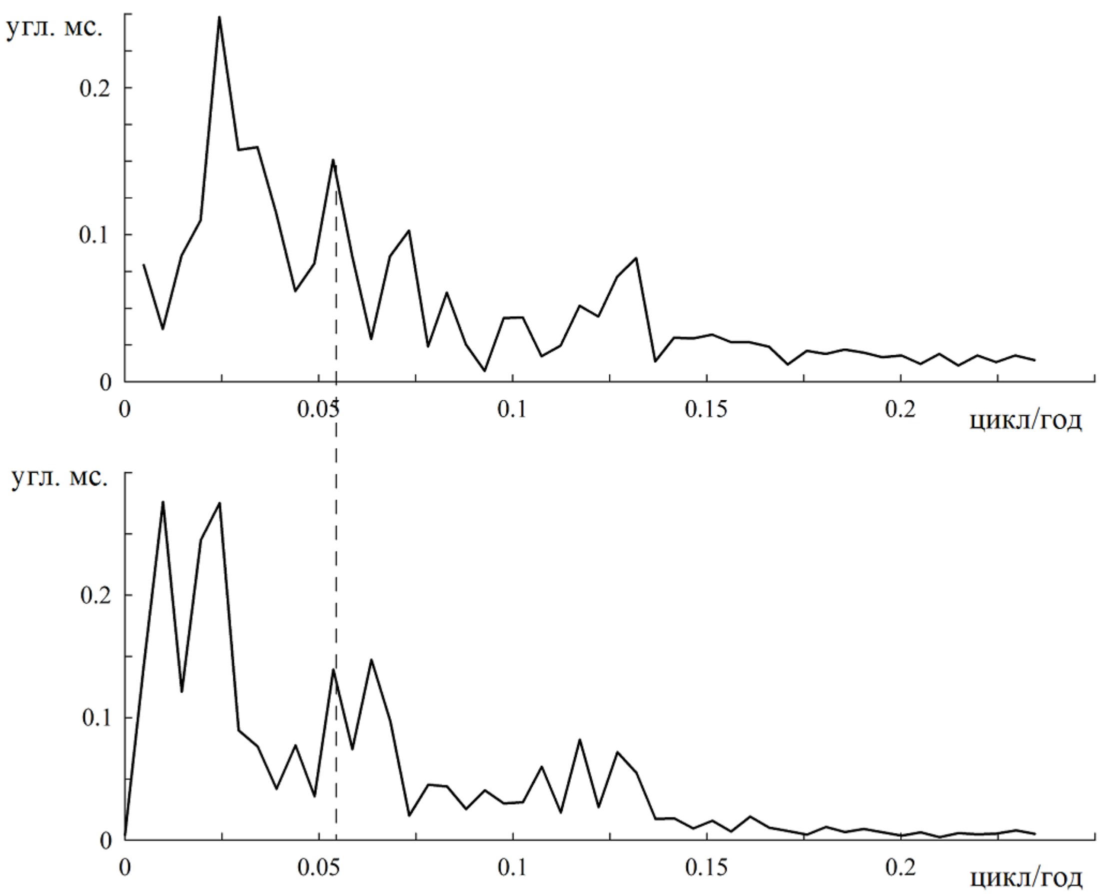

Рис. 3.13 Амплитудные спектры $\delta\psi_{ch}$ (верхний график), $\delta\psi_h$ (нижний график)

Таким образом, из (3.4.2) и (3.4.3) можно получить:

$$\delta\psi_{ch} = \frac{\Delta\psi^{+} - \Delta\psi^{-}}{2} = \frac{1}{2}\left(\delta\varphi + \delta\overline{\varphi} - \left(\psi_h - \psi_{ch}\right) + w_h - w_{ch}\right),$$
$$\delta\psi_{h} = \frac{\Delta\psi^{+} + \Delta\psi^{-}}{2} = \frac{1}{2}\left(\delta\varphi + \delta\overline{\varphi} + \psi_h - \psi_{ch} + \left(w_h - w_{ch}\right)\right). \qquad (3.4.5)$$

Определив спектры $\Delta\psi^{+}$, $\Delta\psi^{-}$, обнаруживаем, что 18-летняя цикличность уверенно выделяется в сумме вариаций $\Delta\psi^{+}$. Отсюда следует, что данное колебание присутствует в полуразности $\Delta\psi^{+}$, $\Delta\psi^{-}$ и в их полусумме с приблизительно близкими по значению амплитудами, а значит и в $\delta\psi_{ch}$ и $\delta\psi_{h}$ (согласно (3..4.5)).

На рис. 3.13 построены амплитудные спектры вариаций $\delta\psi_{ch}$ и $\delta\psi_{h}$. Из них видно, что исследуемая гармоника выделяется в $\delta\psi_{ch}$ и $\delta\psi_{h}$, и имеет приблизительно равные амплитуды.

Из проделанных рассуждений следует, что с 18-летним периодом изменяются разные параметры основного движения полюса. Это является следствием того, что колебание, согласованное с прецессией лунной орбиты содержат как чандлеровская, так и годичная компоненты.

3.4 Выводы

Если на рассматриваемый интервал времени приходится смена колебательного режима земного полюса, то для реализации преобразования (3.1.1) в виде алгоритма потребуется не только многократное применение Фурье-преобразования для определения средних параметров движения земного полюса, но и предварительная идентификация времени смены доминирующей гармоники. Рассмотренная модификация преобразования на основе аналитического представления амплитуды и вариации полярного угла позволяет упростить идентификацию 18-летних колебаний в движении земного полюса [54, 78]. Для реализации алгоритма на основе выражения (3.1.13) необходимо последовательно исключить тренд из координат полюса, определить амплитуду его колебаний, провести сглаживание найденной амплитуды и, используя сглаженные значения амплитуды, определить ее огибающие. При этом идентификация момента смены колебательного режима не требуется. Такое преобразование может быть легко реализовано и без применения спектрального анализа.

Определение угла $\delta\varphi$ оказывается более громоздким. Это связано с изменением средней частоты обращения полюса и с изменением направления его движения после превого этапа преобразования. Тем не менее для $\delta\varphi$ можно получить аналитическое выражение, которое зависит только от полярного угла ψ_p, амплитуды a_p и ее огибающих $a_{\max}$, $a_{\min}$. То есть вариация $\delta\varphi$ может быть найдена без разделения движения полюса на чандлеровскую и годичную компоненты. Следует заметить, что момент смены ведущей гармоники, который требуется знать для нахождения вариации $\delta\varphi$, также может быть приближенно найден из угла ψ_p. Для этого потребуется оценивать его линейную часть, то есть производную, а для уточнения – вторую производную, т.к. при смене ведущей гармоники меняется не только средняя частота, но и знак кривизны вариации $\delta\psi_p$.

Колебания с 18-летним периодом можно обнаружить не только в параметрах b и $\delta\varphi$, но и в параметрах $\overline{a}_0$ и $\delta\overline{\varphi}$, которые определяются формулами (3.4.1) и (3.3.18). Отсюда следует, что колебание, согласованное с прецессией лунной орбиты должны принадлежать как чандлеровской, так и годичной компоненте.

ГЛАВА 4. УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА С УЧЕТОМ ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛУННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

4.1 18-летние вариации параметров чандлеровского и годичного колебаний в период с 1900 года

В главах 2, 3 с помощью преобразования траектории движения земного полюса выделены колебания, синфазные с прецессионным движением орбиты Луны. Для выполнения преобразования не требуется предварительного разделения траектории полюса на чандлеровскую и годичную компоненты. Обратное преобразование найденных 18-летних колебаний, к исходной системе (x, y) приводит к гармоникам с основной частотой, равной либо чандлеровской частоте, либо годичной частоте (в зависимости от колебательного режима). Как показано выше, при изменении доминирующей гармоники (с чандлеровской на годичноую или наоборот) изменится и средняя частота движения полюса (средняя за период модуляции), что и повлияет на основную частоту дополнительных гармоник. Дополнительные гармоники приводят к 18-летней амплитудной модуляции основных компонент движения полюса (чандлеровской и годичной), то есть к вариациям амплитуд чандлеровской и годичной компонент. Эти вариации в параметрах чандлеровской и годичной компонент должны быть синфазными. Иначе 18-летнее колебание в системе (ξ_p, η_p) изменяло бы фазу в момент смены доминирующей гармоники. Тогда средняя фаза 18-летнего колебания на всем интервале не совпала бы с фазой параметров ориентации плоскости орбиты Луны по отношению к экватору. Так как этого не наблюдается, то фазы 18-летних вариаций параметров чандлеровской и годичной компонент должны быть одинаковыми. Чтобы это установить, необходимо выделить исследуемый колебательный процесс в каждой из основных составляющих движения полюса.

Разделим спектр колебаний земного полюса на области. В спектре чандлеровской компоненты по каждой из координат оставим окрестность частоты 0.843 циклов в год с границами $0.843 \pm 0.157/2$ циклов в год. Аналогично, к спектру годичной компоненты отнесем окрестность частоты 1 цикл в год с границами $1 \pm 0.157/2$ циклов в год. Совокупность чандлеровской и годичной компонент будут содержать все колебания из спектрального интервала $0.765 \div 1.0785$ циклов в год. Такое разделение хотя и носит формальный характер, здесь оно оправдано тем, что дополнительные гармоники, приводящие к 18-летней модуляции основных компонент с частотой прецессии орбиты Луны попадают в соответствующие области.

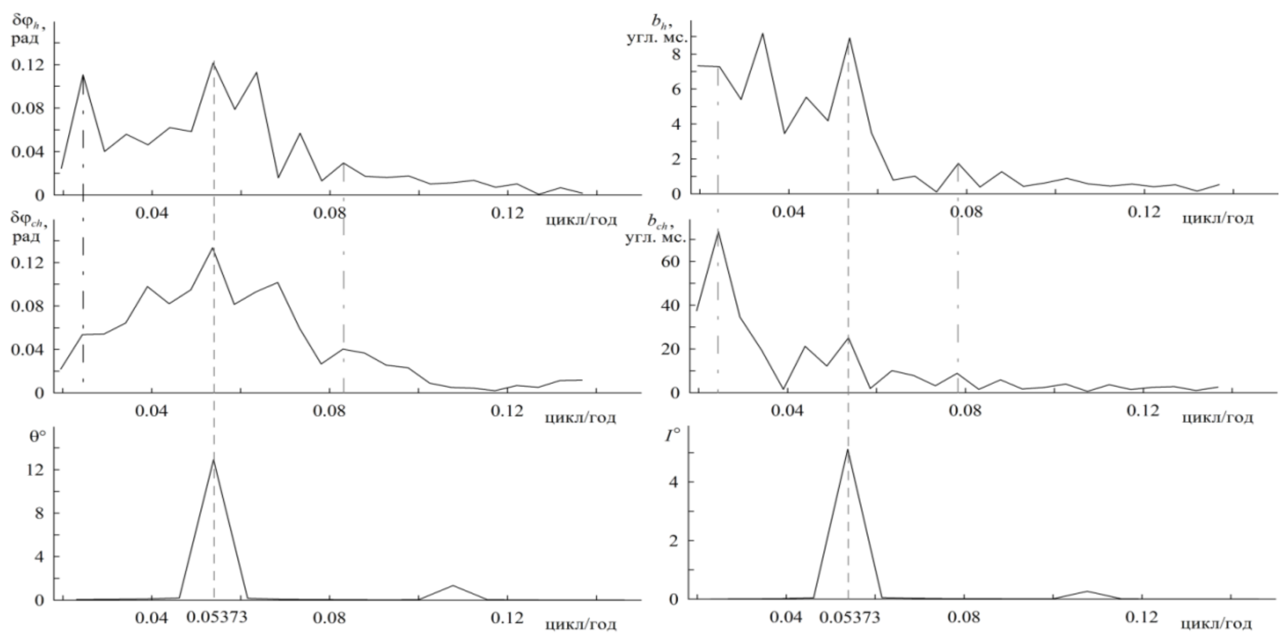

Рис. 4.1. Амплитудные спектры рядов величин $\varphi_h, b_h, \varphi_{ch}, b_{ch}, \theta, I$.

Для каждой из выделенной компоненты применим преобразование, аналогичное, рассмотренному выше. Совершив поворот исходной системы на переменный угол, соответствующий средней чандлеровской или годичной частотам, получим чандлеровское или годичное колебания в преобразованных системах, которые обозначим (ξ_{ch},η_{ch}) и (ξ_h,η_h) соответственно:

$$\begin{pmatrix}\xi_{ch/h}\\ \eta_{ch/h}\end{pmatrix}=\Pi\left(w_{h/ch}\right)\begin{pmatrix}x_{ch/h}\\ y_{ch/h}\end{pmatrix}. \tag{4.1.1}$$

После выполненных преобразований спектры модулирующих гармоник, близких к чандлеровской и годичной частотам, перейдут в низкочастотную область.

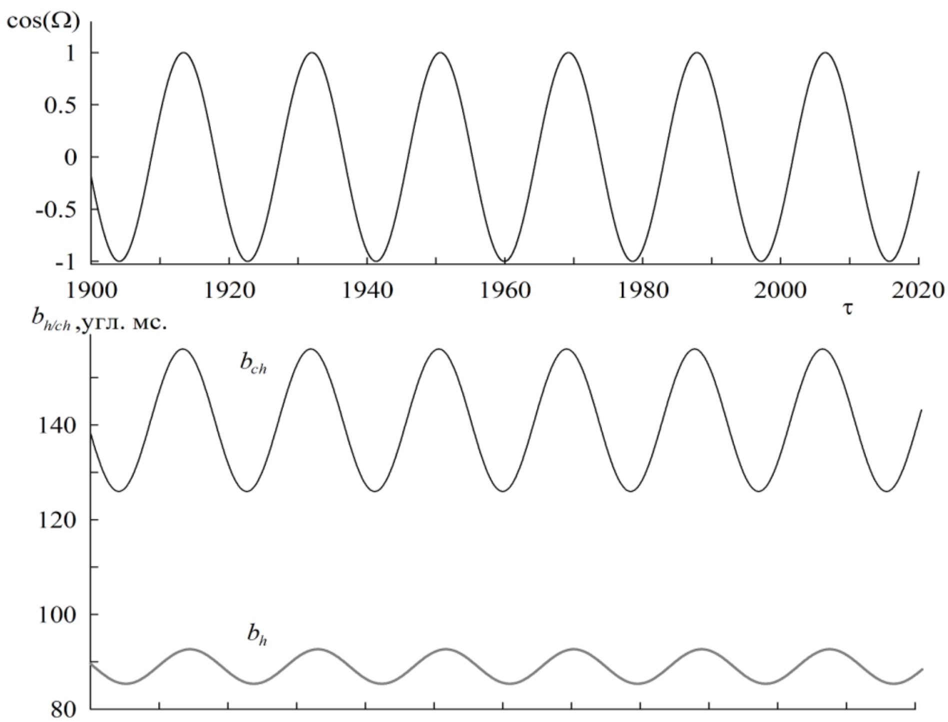

Рис. 4.2. Стационарные гармоники с частотой прецессии орбиты Луны, выделенные из рядов b_h, b_{ch} в сравнении с гармоникой $\cos\Omega$.

Теперь, для описания низкочастотных вариаций в полученных системах (ξ_{ch}, η_{ch}) и (ξ_h, η_h) перейдем к полярным координатам (b_{ch}, φ_{ch}) и (b_h, φ_h). На рис. 4.1 приводятся спектры вариаций полярных параметров b_{ch}, φ_{ch}, b_h, φ_h а также спектры колебаний угла I наклона лунной орбиты к экватору Земли и угла θ отклонения вдоль экватора точки пересечения лунной орбиты с экватором. Из сравнения спектров можно заключить о наличие колебаний с частотой, близкой к частоте прецессии орбиты Луны во всех отмеченных параметрах. Как показано далее, фазы этих колебаний в полярных углах φ_{ch}, φ_h, а также в угле θ отличаются на $\pi/2$ от фаз соответствующих колебаний в параметрах b_{ch}, b_h и I.

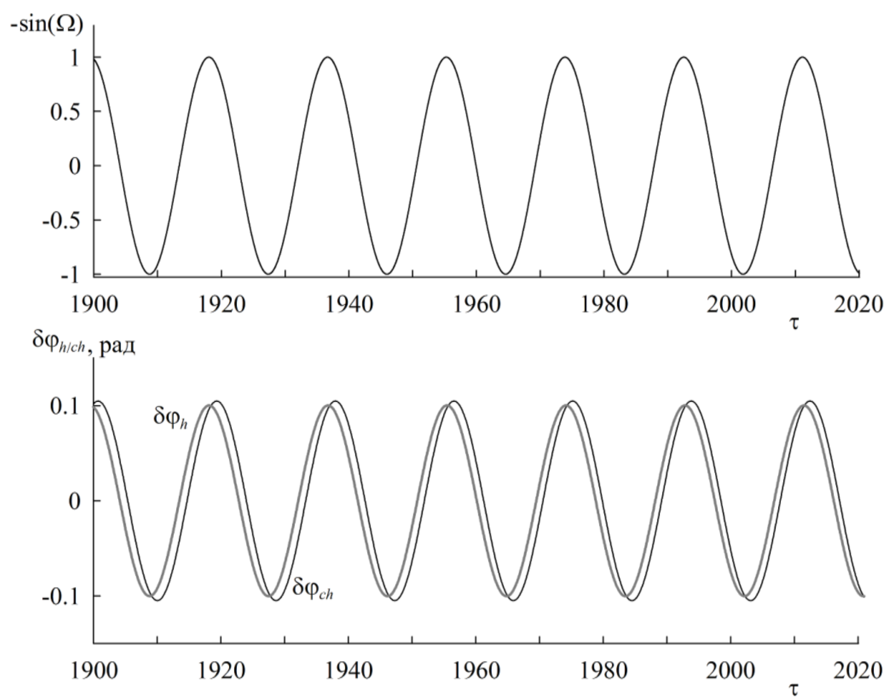

Рис. 4.3. Стационарные гармоники с частотой прецессии орбиты Луны, выделенные из рядов φ_h, φ_{ch} в сравнении с гармоникой $-\sin\Omega$.

Очевидно, что рассматриваемый колебательный процесс не является полностью стационарным. Как показывают анализ и обработка данных наблюдений с применением различных методов, фазы и частоты этих колебаний обладают достаточно большой стабильностью, но их амплитуды подвержены изменению во времени.

Также нужно заметить, что применение различных методов выделения этих гармоник приводит к одинаковым оценкам фаз и относительно небольшому разбросу в оценке средних амплитуд. В связи с этим можно говорить об аппроксимации рассматриваемых 18-летних колебаний в параметрах чандлеровской и годичной компонент стационарными гармониками, которые имеют смысл гармоник со средними амплитудами.

На рис. 4.2, 4.3 сравниваются стационарные гармоники со средними амплитудами, выделенные из спектров указанных параметров с лунными 18-летними гармониками. Для сравнения вместо углов I и θ были взяты их главные гармоники с единичными амплитудами, которые совпадают с гармониками $\cos\Omega$, $-\sin\Omega$ долготы восходящего узла орбиты Луны. Выражение для Ω дается, например, в IERS Conventions (2010) [72] и имеет вид:

$$\Omega \approx 125.04455501^{\circ} - 6962890.5431''t + 704722''t^2, \tag{4.1.2}$$

где t - время в столетиях, отсчитываемое от 12ч. 1 января 2000 года.

Совпадение фаз выделенных стационарных 18-летних колебаний и фаз гармоник $\cos\Omega$, $-\sin\Omega$ позволяет говорить о наличии колебательного процесса, синхронизированного с прецессией лунной орбиты, как в чандлеровской компоненте, так и в годичной. При этом вариации амплитуд b_{ch}, b_h чандлеровской и годичной компонент синфазны друг другу, но различаются величиной, а вариации полярных углов φ_{ch}, φ_h совпадают как по фазе, так и по величине. Совпадение фаз 18-летних колебаний в чандлеровской и годичной компонентах объясняет выделение 18-летней цикличности и в случае выполнения двухэтапного преобразования.

В целом можно заметить, что стабильность рассматриваемого 18-летнего колебательного процесса оказывается не ниже стабильности основных компонент колебаний полюса. Это говорит в пользу того, что они могут быть связаны с основными компонентами колебаний полюса и могут являться следствием процессов формирования и поддержания основных компонент колебаний.

4.2. Аппроксимация колебаний земного полюса с учетом комбинационных гармоник

Рассмотренные 18-летние вариации амплитуд и фаз чандлеровской и годичной гармоник представляют интерес и для задачи прогнозирования движения земного полюса, так как найденные гармоники могут учитываться в модели движения полюса. Рассмотрим, как изменится точность аппроксимации траектории полюса при их учете. В частности, наибольший интерес представляет оценка точности ее экстраполяции.

Для этого 18-летнюю цикличность в параметрах b_{ch}, φ_{ch}, b_h, φ_h необходимо аппроксимировать гармониками $\cos\Omega$, $-\sin\Omega$ и определить их амплитуды. Затем, выполнив обратное преобразование, получим дополнительные слагаемые к модели движения земного полюса. Так как в результате обратного преобразования 18-летние колебания переходят в колебания с близкими к чандлеровской и годичной частотами, то наибольший эффект от их учета будет в автономной модели без коррекции параметров или при построении прогноза движения полюса на длительное время. В случае использования модели в адаптивном режиме (с коррекцией параметров) для прогноза на короткие интервалы времени (до года) коррекция коэффициентов в той или иной степени будет учитывать изменчивость параметров чандлеровской и годичной компонент и, в том числе, 18-летнюю цикличность. В этом случае эффект от учета комбинационных гармоник с частотами, близкими к чандлеровской и годичной, должен проявляться меньше.

Рассмотрим применение модели движения полюса в автономном режиме. Двухчастотная математическая модель колебаний полюса содержит две основные составляющие и описывается выражениями:

$$
\begin{aligned}
x_p &= c_x(\tau) - a_x^c \cos 2\pi N\tau + a_x^s \sin 2\pi N\tau - \\
&\quad - N d_x^c \cos 2\pi \nu\tau - d_x^s \sin 2\pi \nu\tau, \qquad (4.2.1)\\
y_p &= c_y(\tau) + a_y^c \cos 2\pi N\tau + a_y^s \sin 2\pi N\tau - \\
&\quad - N d_y^c \cos 2\pi \nu\tau - d_y^s \sin 2\pi \nu\tau,
\end{aligned}
$$

Здесь τ - время, измеряемое стандартными годами; N - чандлеровская частота (выбирается на основе спектрального анализа длительного ряда наблюдений); величины $c_x(\tau)$, $c_y(\tau)$ представляют собой координаты точки среднего полюса. Оптимальные значения коэффициентов модели (4.1.2) находятся с помощью метода наименьших квадратов [18] на основе статистической обработки астрометрических данных измерений угловых параметров движения Земли. При этом выполняются приближенные равенства

$$a_x^{c,s} \approx a_y^{c,s},\ d_x^{c,s} \approx d_y^{c,s},$$

отражающие структурные свойства модели (4.2.1).

Для определения коэффициентов чандлеровской и годичной компонент алгоритм применялся независимо к переменным $x(\tau), y(\tau)$ на тестовом интервале аппроксимации:

$$x(\tau) = (\xi, f(\tau)),\ y(\tau) = (\eta, f(\tau)), \tag{4.2.2}$$

$$\xi = (\xi_1, ..., \xi_5)^T,\ \eta = (\eta_1, ..., \eta_5)^T,$$

$$f(\tau) = (1, \cos 2\pi N\tau, \sin 2\pi N\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T,$$

$$N \approx 0.843 - 0.850,$$

где N - чандлеровская частота; τ - время, измеряемое в годах.

Дополнительные слагаемые модели получаются в результате обратного преобразования 18-летних колебаний к исходной системе координат и имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{ch} \\ \Delta y_{ch} \end{pmatrix} = \Pi^{-1}(w_{ch}) \begin{pmatrix} b_{ch} \cos \delta\varphi_{ch} - b_{ch}^0 \\ b_{ch} \sin \delta\varphi_{ch} \end{pmatrix}, \tag{4.2.3}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_h \\ \Delta y_h \end{pmatrix} = \Pi^{-1}(w_h) \begin{pmatrix} b_h \cos \delta\varphi_h - b_h^0 \\ b_h \sin \delta\varphi_h \end{pmatrix},$$

где b_{ch}^0, b_h^0 - средние значения амплитуд чандлеровской и годичной компонент, соответственно. Их оценки могут быть получены, например, с помощью метода наименьших квадратов, используя аппроксимацию (4.2.2) на длительном интервале наблюдений (с 1900 по 2020 гг.).

Модель колебания полюса с учетом дополнительных слагаемых представляется в виде суммы двухчастотной модели с постоянными коэффициентами и дополнительных слагаемых (4.2.3):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_p &= x_p + \Delta x_{ch} + \Delta x_h, \\ \tilde{y}_p &= y_p + \Delta y_{ch} + \Delta y_h, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Сравним вначале аппроксимации данных наблюдений ряда C01 МСВЗ, выполненные согласно двум моделям (4.2.1) и (4.2.4). Для сравнения построим среднеквадратические отклонения (с.к.о.) прогнозов указанных моделей от данных наблюдений.

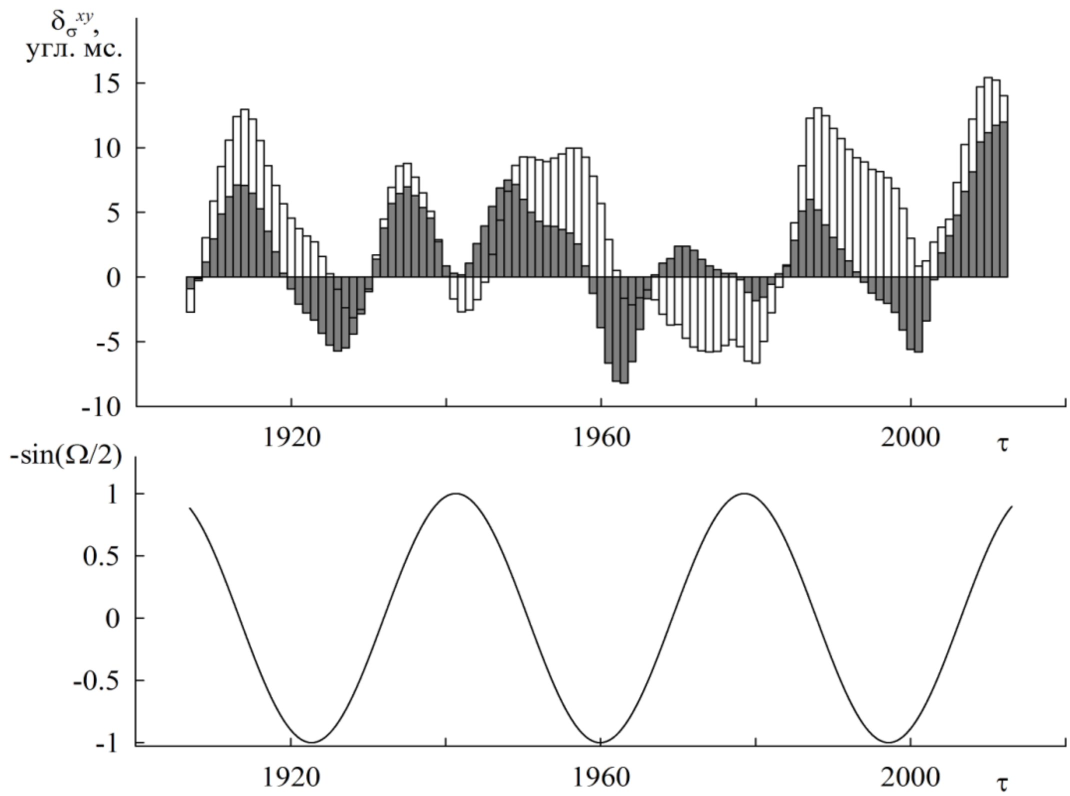

Рис. 4.4. Разности δ_σ^{xy} среднеквадратических отклонений 15-летних экстраполяций моделей (4.2.1) и (4.2.4) (закрашенный темным цветом) и моделей (4.2.1) и (4.2.4) с учетом (4.2.5).

Вычислим с.к.о. на 15-летнем "скользящем интервале" с шагом в 1 год. Результаты приводятся на рис. 4.4. На графике дается разность с.к.о. моделей (4.2.1) и (4.2.4) от данных наблюдений (график изображен в виде "гистограммы", закрашенной темным цветом). Разность значений с.к.о. для моделей (4.2.1) и (4.2.4) на всем интервале аппроксимации 1900-2020 гг.

равна $\delta_{\sigma}^{xy} = 1.523247$ угл. мс. Хотя в среднем точность аппроксимации модели (4.2.4) выше, но на временной шкале присутствуют интервалы, где ее точность ниже, что является следствием главным образом непостоянства амплитуд дополнительных гармоник модели (4.2.4).

На графике разностей с.к.о. можно заметить явную периодичность, которая синфазна гармонике с периодом вдвое большим периода прецессии лунной орбиты. При выборе другого скользящего интервала, эта периодичность сохраняется. В результате численных расчетов можно установить, что амплитуда 18-летней цикличности испытывает вариацию с периодом вдвое большим, то есть около 37 лет.

Как видно из рис. 4.1 в спектрах параметров b_{ch}, φ_{ch}, b_h, φ_h присутствуют частоты, близкие к значениям комбинаций $\dot{\Omega} - \dot{\Omega}/2 = \dot{\Omega}/2$ и $\dot{\Omega} + \dot{\Omega}/2 = 3\dot{\Omega}/2$. Интересно заметить, что амплитуда гармоники с частотой $\dot{\Omega}/2$ оказывается больше амплитуды гармоники с частотой $3\dot{\Omega}/2$. С помощью фильтрации на основе преобразования Фурье можно получить сумму этих гармоник, взятых с равными амплитудами. Затем полученную сумму сложим с гармоникой $\cos\Omega$ (для b_{ch}, b_h) или $\sin\Omega$ (для φ_{ch}, φ_h). Тогда колебания координат $\xi_{ch} = b_{ch}\cos\varphi_{ch}$, $\eta_{ch} = b_{ch}\sin\varphi_{ch}$, $\xi_h = b_h\cos\varphi_{ch}$, $\eta_h = b_{ch}\sin\varphi_{ch}$ хорошо аппроксимируются следующими суммами с коэффициентами c_{ch}, c_h для чандлеровской и годичной компонент, соответственно:

$$\xi_{ch} \approx c_{ch}\left[\cos\Omega - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\Omega}{2} - \cos\frac{3\Omega}{2}\right)\right],$$

$$\eta_{ch} \approx c_{ch}\left[-\sin\Omega - \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\Omega}{2} + \sin\frac{3\Omega}{2}\right)\right],$$

$$\xi_h \approx c_h \left[\cos\Omega + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\Omega}{2} + \sin\frac{3\Omega}{2} \right) \right],$$
$$\eta_h \approx c_h \left[-\sin\Omega + \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\Omega}{2} + \sin\frac{3\Omega}{2} \right) \right]. \tag{4.2.5}$$

Их можно заменить эквивалентными выражениями:

$$\xi_{ch} \cong c_{ch}\left[\cos\Omega - \sin\frac{\Omega}{2}\sin\Omega \right], \quad \eta_{ch} \cong c_{ch}\left[-\sin\Omega - \sin\frac{\Omega}{2}\cos\Omega \right],$$

$$\xi_h \cong c_h\left[\cos\Omega + \sin\frac{\Omega}{2}\sin\Omega \right], \quad \eta_h \cong c_h\left[-\sin\Omega + \sin\frac{\Omega}{2}\cos\Omega \right], \tag{4.2.6}$$

Приведем графическое сравнение выделенных из наблюдений колебаний, включающих указанные комбинационные гармоники выражений (4.2.6).

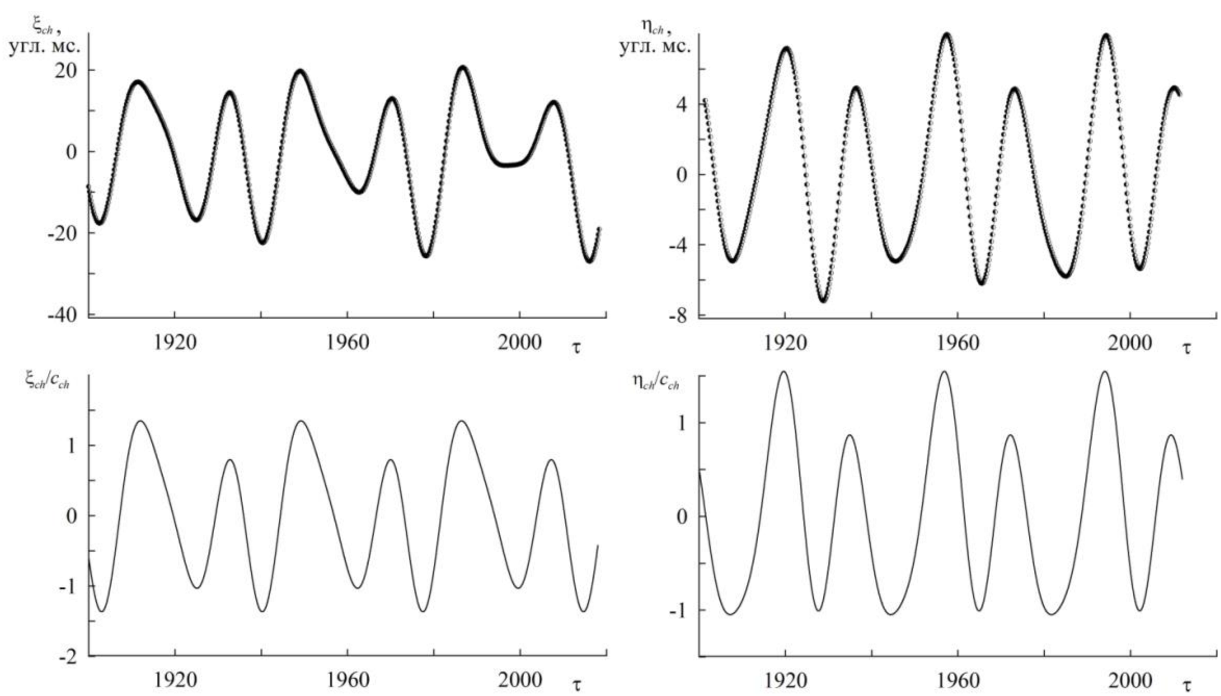

Рис.4.5. Сравнение суммы комбинационных гармоник (4.2.6) (сплошные линии)с колебаниями η_{ch}, ξ_{ch}, выделенными из наблюдений (дискретные точки).

На рис.4.5 сравниваются функции $\xi_{ch}/c_{ch}, \eta_{ch}/c_{ch}$ с выделенными из наблюдений колебаниями. Интересно заметить, что комбинационные гармоники чандлеровской и годичной компонент входят в суммы (4.2.5) (а также и (4.2.6)) с разными знаками. Это приводит к сдвигу фаз колебаний ξ_{ch}, η_{ch} относительно колебаний ξ_h, η_h. В частности, отсюда следует, что возникают ситуации, когда выражения (4.2.6) для одной компоненты близки к нулю, а для другой компоненты имеют максимум или минимум. То есть найдутся интервалы времени на которых по одной компоненте 18-летняя цикличность практически пропадает, а в другой - имеет максимальную амплитуду. Такая ситуация, например, произошла в окрестности смены доминирующей гармоники на интервале 2000 - 2015 гг. Это в свою очередь привело к описанным в работе [50] эффектам, когда учет дополнительных слагаемых, соответствующих одной из компонент приводил к ухудшению точности экстраполяций.

Теперь, учтя выражения (4.2.6) в модели (4.2.4), построим график разности с.к.о. двух моделей (4.2.1) и (4.2.4). Она приведена на том же рис. 4.4 виде светлой "гистограммы". Среднее значение разности с.к.о. для моделей (4.2.1) и (4.2.4) на всем интервале аппроксимации 1900-2020 гг. получается равной $\delta_{\sigma}^{xy} = 4.034067$ угл. мс.

4.3. Оценка точности экстраполяций автономной модели движения земного полюса

Сравним точность экстраполяций модели (4.2.1) и модели (4.2.4) с учетом дополнительных слагаемых обоих вариантов (с учетом комбинационных гармоник (4.2.6) и без их учета). Для верификации модели будем применять ее в автономном режиме, то есть без коррекции параметров.

В ходе численного эксперимента, параметры чандлеровской и годичной компонент были определены на заранее выбранном тестовом интервале аппроксимации используя двухчастотную модель (4.2.1). Следует заметить, что оценка параметров основных компонент колебаний полюса влияет на оценку изменения точности модели при учете дополнительных слагаемых. Этот эффект возникает из-за близости частот дополнительных слагаемых к чандлеровской и годичной частоте. То есть разность среднеквадратических отклонений моделей (4.2.1) и (4.2.4) от данных наблюдений зависит от выбранного тестового интервала времени для определения коэффициентов двухчастотной модели (4.2.1).

В этом случае необходимо произвести серию расчетов, например, осуществляя сдвиг тестового интервала по временной шкале. Для определения параметров двухчастотной модели в работе был выбран фиксированный тестовый временной интервал диной в 15 лет. Расчеты проводились в итерационном режиме со сдвигом начала тестового интервала с 1900 года до 2005 года с шагом в 2 года. Как показали расчеты, при изменении длительности тестового интервала и увеличении шага результаты качественно друг от друга не отличаются.

При оценке точности модели следует иметь ввиду, что точность измерений до 1962 года была существенно ниже. Из-за наличия большой стохастической составляющей на интервале 1900 - 1962 гг., значения с.к.о. экстраполяций, построенных на временные промежутки из этого интервала, будут выше. Поэтому экстраполяции строились, начиная с 1962 года. При этом низкая точность измерений до 1962 года не является негативным фактором для выбора тестового интервала, так как интерес представляет поведение с.к.о. экстраполяций при большом разбросе возможных значений параметров чандлеровской и годичной компонент. Кроме того, значения параметров чандлеровской и годичной компонент (их амплитуды и фазы) на интервале до 1950 года сильно отличались от их современных значений, так что стохастическая составляющая в измерениях для тестового интервала не вносит негативных последствий в расчеты.

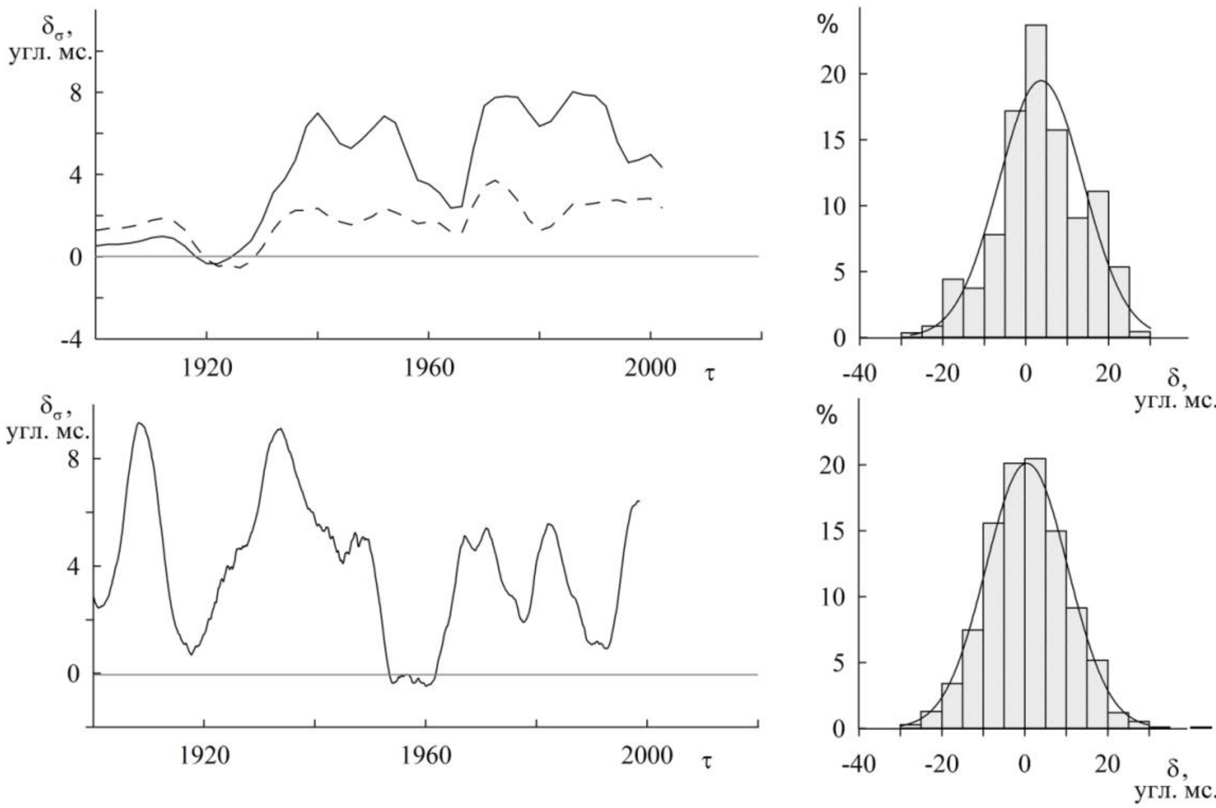

Рис.4.6. а) Разности средних с.к.о. двухлетних экстраполяций, построенных, используя модель (4.2.1) и модель (4.2.4) в двух вариантах: с учетом комбинационных гармоник (сплошная линия) и без их учета (пунктирная линия). Экстраполяции отнесены к началу тестового интервала;

б) Разности средних с.к.о. моделей (4.2.1) и (4.2.4) с учетом комбинационных гармоник (4.2.5), отнесенные к началу интервала экстраполяции;

в) Гистограмма отклонений модели (4.2.4) от данных наблюдений в каждой точке ряда С01;

г) Гистограмма отклонений значений ряда С01 МСВЗ от сглаженных значений.

В первом численном эксперименте расчитывались с.к.о. двухлетних экстраполяций, начиная с 1962 года по 2020 год с шагом в 1 год. Параметры модели оценивались на 15-летнем тестовом интервале, начиная с 1900 года, который сдвигался с шагом в 2 года. Каждому тестовому интервалу ставилось в соответствие среднее значение с.к.о двухлетних экстраполяций за весь указанный период. На рис. 4.6а приводятся разности средних с.к.о. экстраполяций для модели (4.2.1) и модели (4.2.4), применяемой в двух вариантах: с учетом комбинационных гармоник (сплошная линия) и без их учета (пунктирная линия). Каждое значение среднего с.к.о. было отнесено к началу тестового интервала. Из рис. 4.6а видно, что в окрестности 1920 года графики разностей с.к.о. были отрицательными. Этот интервал соответствует изменению фазы чандлеровской компоненты. То есть, если на тестовый интервал определения параметров модели приходится изменение фазы чандлеровской компоненты, то, модель будет непригодна для построения экстраполяции на дальнейшее время. При этом дополнительные слагаемые, как следует из эксперимента, приводят к большему снижению точности.

Для тестовых интервалов, взятых после изменения фазы чандлеровского колебания, точность определения положения полюса повышается в среднем на 5 см при учете только 18-летней цикличности и на 17 см при учете комбинационных гармоник (4.2.6).

Во втором численном эксперименте рассчитывались средние значения с.к.о на каждом 18-летнем интервале экстраполяции моделей (4.2.1) и (4.2.4) для всех 15-летних тестовых интервалов. Тестовые интервалы сдвигались с шагом в 2 года, начиная с 1900 года. Интервал экстраполяции сдвигался с шагом, соответствующим скважности ряда С01 МСВЗ. Полученные значения средних с.к.о ставились в соответствие началам интервалов экстраполяций. На рис. 4.6б приводятся разности средних с.к.о. моделей (4.2.1) и (4.2.4) с учетом комбинационных гармоник (4.2.6). В окрестности 1960 года точность модели с учетом дополнительных слагаемых ниже точности двухчастотной модели в среднем на 0.8 см. В среднем на всем интервале с 1900 года точность определения положения полюса повышается на 11.5 см.

На рис.4.6в приводится гистограмма отклонений модели от данных наблюдений в каждой точке ряда С01. Гистограмма построена в процентах, а по оси абсцисс отложены значения отклонений δ в угловых миллисекундах. В 67% всех отклонений наблюдается повышение точности на 19 см и в 33 % наблюдается ухудшение точности на 7.5 см. Полученный разброс отклонений от данных в каждой точке, соответствующей ряду С01, идентичен разбросу отклонений полюса от сглаженной его траектории. Гистограмма рис. 4.6г построена по отклонениям значений ряда С01 от сглаженных значений (которые включают тренд и основное движение полюса). Из сравнения гистограмм видно, что максимальный разброс в отклонениях одинаковый, а среднее значение на гистограмме рис.4.6в согласно нормальному закону распределения смещается в положительную сторону на 3.71 угловых миллисекунд, что и соответствует уточнению на 11.5 см.

Таким образом, графики рис. 4.6 свидетельствуют о повышении точности экстраполяций модели с учетом исследуемой 18-летней цикличности и вариаций ее амплитуды с частотой вдвое ниже. При этом повышение точности модели достигается практически при любых оценках параметров чандлеровской и годичной компонент, даже самых неподходящих, когда фаза чандлеровской компоненты смещена на противоположную. Исключением является сам интервал резкой смены фазы чандлеровского колебания, для которого точность модели (4.2.4) падает в среднем на 1 см.

4.4. Выводы

В чандлеровском и годичном колебаниях выделен квазистационарный колебательный процесс со стабильными частотой и фазой, которые совпадают с частотой и фазой колебаний угла наклона плоскости лунной орбиты к экватору Земли [46, 54]. Однако, его амплитуда испытывает вариации с частотой, равной половине частоты прецессии орбиты Луны. Это также подтверждается проведенными численными экспериментами по аппроксимации траектории движения полюса, точность которой увеличивается на 11-12см.

Найденные дополнительные гармоники ввиду близости их частот к частотам основных компонент колебаний полюса приводят к вариациям их амплитуд с 18-летним периодом. Рассмотренные колебания по амплитуде оказываются относительно небольшими, но являются вполне существенными в задаче долгосрочного прогнозирования траектории движения земного полюса. Об этом свидетельствует повышение точности экстраполяций колебаний полюса практически при любых выбираемых значениях параметров чандлеровской и годичной компонент. Значительный интерес они представляют и для исследования механизма возбужения колебаний полюса, так как они могут быть с ним сязаны, либо являться его следствием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы:

1. Показано, что изменение соотношения амплитуд основных гармоник колебания земного полюса приводит к изменению средних параметров его движения. Установлен эффект смены колебательного режима полюса, который заключается в согласованном изменении частоты чандлеровских колебаний и средней частоты обращения полюса вокруг полюса инерции.
2. С помощью численной обработки астрометрических данных измерений положения земного полюса найден колебательный процесс, связанный с прецессионным движением орбиты Луны. Предложено несколько способов преобразования координат земного полюса к системе, в которой его движение происходит синфазно с изменением ориентации плоскости лунной орбиты по отношению к экватору Земли. Показано, что в этой системе полярный радиус совершает колебания синфазные с колебаниями угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору, а колебания полярного угла происходят синфазно с отклонением вдоль экватора точки пересечения лунной орбиты с экватором.
3. С помощью численного интегрирования уравнений движения земного полюса и обработки данных NCEP/NCAR циркуляции атмосферы и данных NASA/JPL углового момента океана исследован вклад основных геофизических возмущений (атмосферного и океанического) в колебательный процесс, синфазный с прецессией лунной орбиты. Показано, что найденные гармоники только частично могут быть обусловлены колебаниями подвижных сред атмосферы и океана.
4. Установлено, что колебания, согласованные с пространственным движением орбиты Луны, присутствуют как в чандлеровской, так и в

годичной компонентах движения земного полюса. Реализован алгоритм аппроксимации и прогноза траектории движения полюса. Показано, что учет найденных колебаний в уравнениях движения земного полюса позволяет повысить точность определения его положения в среднем на 11.5см для автономной модели без коррекции параметров.

В дальнейшем, предполагается установить вклад других геофизических возмущений в формирование 18-летней цикличности параметров движения земного полюса, а также оценить точность прогнозирования модели движения полюса в адаптивном режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авсюк Ю.Н. Приливные силы и природные процессы. М.: Изд-во ОИФЗ РАН. 1996. 188 с.
2. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Анализ влияния многочастотных воздействий на колебания полюса Земли // Астрономический журнал. 2002. Т.79. №.1 С. 481-489.
3. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Гравитационно-приливной механизм колебаний полюса Земли // Астрономический журнал.2005. Т.82. №10. С. 950-960.
4. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Анализ влияния многочастотных воздействий на колебания полюса Земли//Астрономический журнал.2007. Т 84. №-5. С. 471-478.
5. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В. Колебательно-вращательные процессы в движении Земли относительно центра масс: интерполяция и прогноз // Изветия РАН. МТТ.2012. №6. С.6-29.
6. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Кумакшев С.А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // Доклады РАН.2014. Т. 458 №5. С.547-550.
7. Акуленко Л.Д., Перепёлкин В.В. Динамический анализ возмущенного чандлеровского колебания земного полюса // Изв. РАН. МТТ.2018. №6. С. 4-12.
8. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // Изветия МТТ РАН.2019. №5. С. 153-160.

9. Ананенкова А.А., Крылов С.С., Филиппова А.С.Амплитудно-частотный анализ возмущенного чандлеровского колебания полюса Земли // Космонавтика и ракетостроение.2018. 1(100). С.150-156.
10. Бондаренко В.В., Марков Ю.Г., Скоробогатых И.В. О тенденции к соизмеримости вращений и средних движений небесных тел под действием гравитационных приливов // Астрономический вестник. 1998.Т. 32. № 4. С.340 – 351.
11. Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов СПб.: СПбГУ, 2001, 60с.
12. Вэй Ян Сое. Прогноз колебаний земного полюса на длительные интервалы времени// Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли NPNJ' 2018, 24-31 мая 2018, Алушта, Крым. С.360. Изд-во: МАИ. ISBN 978-5-4316-0491-1.
13. Вэй Ян Сое. Численно-аналитическая модель краткосрочного прогноза ПВЗ с учетом высокочастотных лунных возмущений// Материалы XXI Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСППС' 2019, 24-31 мая 2019, Алушта, Крым. Изд-во: МАИ. ISBN 978-5-4316-0589-5.
14. Вэй Ян Сое. Построение высокоточного прогноза движения земного полюса// 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019» 18-22 ноября 2019 г. Москва. С.181-182.
15. Вэй Ян Сое. Оценка точности приближения двухчастотной модели движения полюса Земли к данным наблюдений// 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» 23-27 ноября 2020г. Москва.С.455.

16. Вэй Ян Сое. Уточненная малопараметрическая модель движения земного полюса// Труды МАИ, 2021г, № 116. http://trudymai.ru/published.php?ID=121106
17. Вэй Ян Сое, Филиппова А.С. О влиянии геофизических возмущений на колебания земного полюса с частотой прецессии лунной орбиты // Труды МАИ, 2021, № 119. http://trudymai.ru/published.php?ID=159795.
18. Губанов В.С. Обобщённый метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрииСПб.: Наука, 1997.315 с.
19. Егармин Н.Е. Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Изветия РАН. МТТ.1980. №6. С.43-48.
20. Жаров В.Е. Сферическая астрономия. Фрязино. 2006. 480с.
21. Зленко А.А. Небесномеханическая модель приливной эволюции системы Земля-Луна // Астрономический журнал. 2015. Т.92. №1. С80-96.
22. Зленко А.А. Стационарные решения одной модельной задачи трёх тел // Прикладная математика и механика. – 2016. - №4. С. 461-472.
23. Зленко А.А. Обобщённые точки либрации в задаче о двойной планете //Астрономический журнал. – 2015. - Т. 92. - № 8. - С. 693.
24. Зленко А.А. Силовая функция двух твёрдых небесных тел в переменных Делоне-Андуайе // Астрономический журнал. – 2015. - Т. 92. - № 12. - С. 1009.
25. Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Механическая модель возмущенного движения Земли относительно барицентра // Доклады РАН.2013.Т 453. №. 3. С. 277-281.
26. Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Разделение и спектральный анализ колебаний земного полюса // Доклады РАН. 2015. Т. 464. №3. С.288-292.

27. Крылов С.С., Перепёлкин В.В., Почукаев В.Н., Вэй Ян Сое. Об изменении средней частоты движения земного полюса под действием лунно-солнечных возмущений // Космонавтика и ракетостроение. 2020. 6(117). С. 5-11.
28. Кумакшев С.А. Гравитационно-приливная модель колебаний полюсов Земли // Изветия МТТ РАН.2018. № 2. С. 48-53.
29. Курбасова Г.С., Рыхлова Л.В., Астрономический журнал.Т.**95**, 3 (1972).
30. Курбасова Г.С., Рыхлова Л.В., Рыбалова М.Н. Вариации амплитуды чендлеровского колебания // Астрономический журнал. 2002. Т. **79**. 6 С 579.
31. Курбасова Г.С., Рыхлова Л.В., Шликарь Г.Н. Параметрическое возбуждение чандлеровского колебания и эмпирические законы мельхиора// Астрономический журнал.2003. Т.80. № 6. С 571-576.
32. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т., Нестеренко О.П., Федоров А.В. Спутниковые системы мониторинга (М.: Изд. МАИ. 2000. 567с.)
33. Манк Н., Макдональд Г. Вращение Земли М.: Мир. 1964. 384 с.
34. Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В., Синицын И.Н. Развитие методов построения моделей движение полюса Земли // Астрономический журнал.2010. Т.87, № 9.
35. Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Почукаев В.Н. Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в формировании высокоточных систем навигации космических аппаратов // Доклады РАН. 2013.Т.451. № 3. С-283.
36. Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Ларьков И.И., Рожков С.Н., Крылов С. С., Перепёлкин В. В., Почукаев В. Н. Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в формировании высокоточной

спутниковой навигации // Космические исследования. 2015.Т. 53. №2. С. 152-164.

37. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Чазов В.В., Шемяков А.О. Фундаментальные параметры вращения Земли в определении точности долгосрочных эфимеридно-временых поправок в спутниковой навигации// Доклады РАН.2015. Т 465. №6. С.678.
38. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Крылов С.С. Колебания полюса Земли с учетом флуктуационно-диссипативных возмущений // Доклады РАН.2016. Т. 471. №6. С.665-670.
39. Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Перепелкин В.В., Почукаев В.Н., Рожков С.Н., Семенов А.С.Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов// Космические исследования. 2016.Т.54. № 2. С 164-172.
40. Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Филиппова А.С. Анализ возмущенных чандлеровских колебаний полюса Земли // Доклады РАН.2017. Т. 474. №5. С.563-567.
41. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С. Численно-аналитический подход к моделированию осевого вращения Земли // Астрономический журнал. 2018. Т. 95. №.4. С. 317-326.
42. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред М.: Либроком, 2009.
43. Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли. Теория и наблюдения К.: Наук. Думка. 1992. 512с.
44. Перепёлкин В.В. Флуктуации колебательного процесса полюса деформируемой Земли при нестационарных возмущениях // Изв. РАН. МТТ. 2016. №6. С.44-51.

45. Перепёлкин В.В. Колебательные процессы в движении земного полюса на частоте прецессии орбиты Луны // Изветия РАН. МТТ.2018. №3. С. 38-44.
46. Перепёлкин В.В., Филиппова А.С., Вэй Ян Сое. Уточненная модель долгосрочного прогноза движения земного полюса// Космонавтика и ракетостроение. 2018. 1(100). с.143-150.
47. Перепёлкин В.В., Филиппова А.С., Вэй Ян Сое. Краткосрочный прогноз движения земного полюса при нестационарных возмущениях// Тезисы докладов Всероссийской астрометрической конференции – «Пулково-2018», 1-5 октября, Санкт-Петербург. 2018. С. 35.
48. Перепёлкин В.В. Численно-аналитические модели движения земного полюса и неравномерности осевого вращения Земли: Диссертация на соискание учёный степени доктора физико-математических наук: 01.03.01. - ИНАСАН, Москва, 2018. 207 с.
49. Перепелкин В.В.Многочастотный процесс колебания земного полюса, обусловленный лунным возмущением // Космонавтика и ракетостроение. 2019. 1(106). С.24-30.
50. Перепёлкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С. Догопериодические вариации в колебательном процессе земного полюса, вызванные лунным возмущением// Астрономический журнал. 2019. Т.96. №3. С 255-264.
51. Перепелкин В.В., Крылов С.С, Вэй Ян Сое. Моделирование и анализ движения земного полюса при нестационарных возмущениях// Тезисы докладов 8-й Всероссийской конференции «Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение»

КВНО-2019, 15-19 апреля 2019, Санкт-Петербург. С-170-171. СПб: ИПА РАН.

52. Перепёлкин В.В., Вэй Ян Сое. Прогноз движения земного полюса с учетом пространственного движения системы Земля-Луна// Сборник статей по итогам научно-технических конференций. Выпуск 10. Часть 1 / Приложение к журналу Известия вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». ISSN 0536-101X (print) ISSN 2618-7299 (online) Международная научно-техническая конференция МИИГАИК 2019, 15-19 апреля 2019, Москва. С. 138-142.
53. Перепёлкин В.В., Крылов С.С., Вэй Ян Сое. Краткосрочный прогноз движения земного полюса с учетом лунных возмущений// Известия РАН МТТ. 2020. №6. с.157-164.
54. Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Вэй Ян Сое О синфазности вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны // Астрономический журнал, Т. 99, № 1, С. 75-87.
55. Перепёлкин В.В., Румянцев Д.С., Вэй Ян Сое. Прогнозирование колебаний земного полюса при изменений средней частоты его движения // Космонавтика и ракетостроение. 2020. 5(116). С. 5-11.
56. Смарт У.М. Небесная механика. М.: Мир, 1965.504 с.
57. Филиппова А.С.Динамический анализ колебательного процесса полюса Земли // Изв. РАН. МТТ. 2015. №6. С.26-38.
58. Сидоренков Н.С. Физика нестабильностей вращения Земли. М.: Наука, 2002. 376 с.
59. Сидоренков Н.С. Природа амплитудной модуляции чандлеровского движеня полюса // Известия Главной астрономической обсеватории в Пулкове. 2013. №220. С143-148.

60.Сидоренков Н.С., Бизуар К., Зотов Л.В., Салстейн Д. Момент импульса атмосферы // Природа 2014. Т. 1184. №4. С. 22-28.

61.Сидоренков Н.С. Соизмеримости между частотами земных процессов и частотами системы Земля-Луна-Солнце // Процессы в геосредах. 2015. Т.3. №3. С. 88-99.

62.Сидоренков Н.С. Геодинамические причины декадных изменений климата // Земля и Вселенная. 2016. №3. С. 25-36.

63.Akulenko L.D., Markov Yu.G., RykhlovaL.V. Motion of the Earth's poles under the action of gravitational tides in the deformable Earth model// Doklady Physics.2001. Volume 46. Issue 4. pp 261-263.

64.Akulenko L.D., Kumakshev S.A., Markov Yu.G. Motion of the Earth's Pole// Doklady Physics. Volume **47**, pp 78-84 (2002) DOI: 10.1134/1.1450668

65.Barkin M.Yu., Markov Yu.G., Perepelkin V.V., Filippova A.S. 2018 IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering **468** 012006

66.Barkin M.Yu., Krylov S.S., Perepelkin V.V. Modeling and analysis of the Earth pole motion with nonstationary perturbations // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1301 (2019) 012005. doi:10.1088/1742-6596/1301/1/012005

67.Bizouard C., Remus F., Lambert S., Seoane L., and Gambis D. The Earth's variable Chandler wobble // Astronomy and astrophysics, 526A106 (2011)

68.Bizouard C., Zotov L., Sidorenkov N. Lunar influence on equatorial atmospheric angular momentum// Journal of Geophysical Research D: Atmospheres.2014. Volume119, Issue 21.

69.Bondarenko V.V., Krylov S.S., Perepelkin V.V.The fluctuation perturbations in the model of the Chandler wobble // IOP Conf. Series:

Materials Science and Engineering 468 (2018) 012016. doi:10.1088/1757-899X/468/1/012016

70. Guochang Xu. Sciences of geodesy - I: Advances and future directions. Springer, Berlin, Germany. (2010).

71. http://www2.csr.utexas.edu/grace/

72. International Earth Rotation and Reference Systems Service - IERS Annual Reports. http://www.iers.org

73. Krylov S.S., Perepelkin V. V., Filippova A. S. Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics: Smart Innovation, Systems and Technologies 173 eds// Jain L C et al. (Springer Nature Singapore) pp 315-331 (2019).

74. Malkin Z., Miller N. Chandler wobble: two more large phase jumps revealed. Earth Planet 62, (2010).

75. McCarthy D., Luzum B., Path of the mean rotational pole from 1899 to 1994 // Geophysical Journal International, Volume 125, Issue 2, pp 623-629 (1996). https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1996.tb00024.x

76. Munk H, MacDonald G. The rotation of the Earth. Cambridge University Press (1960).

77. Perepelkin V.V., Filippova A.S., Wai Yan Soe. Spatial motion of the Earth-Moon system and Earth pole oscillatory process// https://confit.atlas.jp/guide/event-img/jpgu2019/E_PPS06-P14/public/pdf?type=in Japan Geoscience Union Meeting 2019, 26-30 May, Chiba, Japan.

78. Perepelkin V.V., Rumyantsev D.S., Wai Yan Soe. The problem of forecasting Earth pole trajectory when changing the average parameters of its motions// IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 927(2020) 012033. doi: 10.1088/1757-899X/927/1/012033.

79. Pugh D., Woodworth P. Sea-level science: Cambridge university press, 2014. pp 395.
80. Schubert G. Treatise on Geophysics. Volume 3. Geodesy. Elsevier. (2007).
81. Schuh H., Nagel S., Seitz T. Linear drift and periodic variations observed in long time series of polar motion// Journal of Geodesy,Volume 74, pp 701-701 (2001). https://doi.org/10.1007/s001900000133
82. Sidorenkov N.S. The interaction between Earth's rotation and geophysical processes // Weinheim. (2009). p 305.
83. Sidorenkov N.S. Zhigailo T.S. Geophysical Effects of the Earth's Monthly Motion // Odessa Astronimical Publications, 2013, Vol 26, №2, pp. 285-287.
84. Sidorenkov N.S. The Chandler Wobble of the Poles and its Amplitude Modulation // Book of abstracts Journees 2014 Systems de reference spatiotemporels "Resent development and prospects in ground-based and space astrometry". Pp. 195-197.
85. Sidorenkov N.S. Celestial Mechanical causes of weather and climate change// Izvestiya - Atmospheric and Oceanic Physics.2016.Volume**52**, pp 667-682.
86. Sidorenkov N.S. Astronomical and Astrophysical Transactions, Volume **30**, 2 (2018).
87. The JPL Horizons https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/
88. William P. O'Connor, Benjamin Fong Chao, Dawei Zheng, Y. Au. Andrew.Wind stress forcing of the North Sea 'pole tide' // Geophys. J. Int. 2000. Vol. 142. pp. 620-630.
89. Zlenko A.A. 2019 The perturbing potential and the torques in one three-body problem// J. Phys. Conf. Ser. **1301** 012022 DOI: 10.1088/1742-6596/1301/1/012022

90. Zlenko A.A. The investigation of motion in one model of three –body problem // Proceedings of the 66th international Astronautical Congress, IAC. – 2015. Vol. 7. P. 5491-5503
91. Zhou Y.H., Salstein D.A., Chen J.L. Revised atmospheric excitation function series related to Earth'svariable rotation under consideration of surface topography // J. Geophys. Res. 2006 111 D12108
92. Zotov L., Bizouard C. On modulations of the Chandler wobble excitation // Journal of Geodynamics. 62. 2012.
93. Zotov L., Bizouard C., Shum C.K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale// Geodesy and Geodynamics.2016.Volume7 (3).