ИНАСАН

На правах рукописи

Шпигель Любовь Викторовна

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ГАЛАКТИЧЕСКИХ ДИСКАХ

Специальность:
01.03.02«Астрофизика и звездная астрономия»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук Поляченко Е.В.

Москва — 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы

Неустойчивости гравитирующих сред играют важнейшую роль в возникновении наблюдаемых процессов и явлений на масштабах вплоть до галактических. Всем известна джинсовская неустойчивость однородной газовой среды, приводящая к образованию сгустков материи с характерными размерами, превышающими $\lambda_{\mathrm{J}} \sim v_s/\sqrt{G\rho}$ (v_s и ρ – скорость звука и плотность среды, G – гравитационная постоянная) [17]. Соответствующее дисперсионное уравнение, описывающее зависимость частоты ω волнообразных возмущений в среде от волнового числа k, записывается в виде:

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho\,. \tag{1}$$

Неустойчивость имеет место для возмущений с длиной волны $\lambda \equiv 2\pi/k$, при которой $\omega^2 < 0$.

Наблюдаемые спиральные узоры большинства дисковых галактик связывают с развитием неустойчивости, подобной джинсовской. Однако полное теоретическое рассмотрение этого вопроса невозможно из-за наличия следующих усложняющих факторов: различное состояние гравитирующей среды, дальнодействующий характер взаимодействия, геометрия, дифференциальное вращение, неоднородность.

Под различным состоянием среды подразумевается наличие звезд, газопылевой компоненты в различных фазах и темной материи. В чисто теоретических исследованиях устойчивость звездной и газовой компонент исследуется, как правило, раздельно, а учет темной материи осуществляется путем введения дополнительного внешнего потенциала. В свою очередь, численное моделирование также имеет существенные ограничения по количеству частиц, пространственно-временному разрешению и использованию грубых феноменологических моделей. Отметим, что в ряде упрощенных моделей теоретический подход и моделирование хорошо дополняют друг друга.

Первые попытки объяснение природы спиральной структуры Галактик стали предприниматься в 1920-х гг сразу после открытия Э. Хабблом внегалактических туманностей. Но подходящей теории на тот момент не существовало и эти попытки заканчивались неудачами. Известна цитата Дж. Джинса, относящаяся к 1929 г.: “Каждая неудачная попытка объяснить наличие спиральных рукавов делает все более и более трудным сопротивляться мысли, что спиральные туманности являются местом действия совершенно неизвестных нам типов сил, сил, которые, возможно, могут выражать новые и неожиданные метрические свойства пространства”. Эволюцию представлений и подходов с конца 20-х до начало 60-х гг. хорошо прослеживается в работах выдающегося шведского астронома Б. Линдблада.

Современный облик теория спиральных структур галактик стала приобретать в начале 1960-х гг., отчасти благодаря интересу к этой задаче ведущих специалистов по гидродинамике, отчасти благодаря бурному развитию теории плазменных неустойчивостей. Среди первых и самых важных работ по устойчивости диска нужно отметить работы Сафронова [1960], Тоомре [1964], Линя и Шу [1964, 1966], Калнайса [1965]. Их основные результаты состояли в получении дисперсионных соотношений $\omega(k)$ для дисков нулевой толщины в эпициклическом приближении и приближении тугой закрутки спиралей:

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma_{\rm d}|k| + v_s^2 k^2 \qquad (\text{gas})\,, \tag{2}$$

$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma_{\rm d}|k|\mathcal{F} \qquad (\text{stars})\,, \tag{3}$$

где $\Omega(R)$ и $\kappa(R)$ – угловая скорость и эпициклическая частота, $\Sigma_{\rm d}(R)$ – поверхностная плотность диска, R – полярный радиус, m – азимутальное число или количество рукавов, $\mathcal{F}$ — т.н. редукционный фактор, учитывающий радиальную дисперсию скоростей σ_R. В частности, из них следуют известные критерии устойчивости Тоомре для аксиально-симметричных возмущений $m = 0$:

$$Q_{\rm g} \equiv \frac{\kappa v_s}{\pi G \Sigma_{\rm d}} > 1 \quad ({\rm gas})\,, \qquad Q_{\rm s} \equiv \frac{\kappa \sigma_R}{3.36 G \Sigma_{\rm d}} > 1 \quad ({\rm stars})\,. \tag{4}$$

Напомним, что спиральные узоры галактик не всегда соответствуют приближению тугой закрутки. В особенности это касается баров. Эпициклическое приближение тоже не выполняется в центральных областях звездных дисков, где дисперсия радиальных скоростей и, соответственно, отклонения траекторий от круговых велики. Дальнейшее развитие теории было связано с отказом от обоих приближений, а также учетом эффектов, относящихся к вертикальным движениям звезд (конечная толщина, поперечные неустойчивости).

Отказ от приближения тугой закрутки означает переход от локального по радиусу описания к нахождению глобальных решений путем решения задачи на собственные значения (СЗ). Отход от эпициклического приближения требует перехода от описания возмущений в обычных цилиндрических координатах к использованию переменных действие-угол.

Впервые для звездных дисков эта программа была реализована Калнайсом [1971, 1977], сформулировавшим задачу на СЗ в виде матричного уравнения. В его формулировке искомые СЗ частоты возмущений ω входят в уравнение нелинейным образом и поэтому требуют некоторых априорных знаний об их приблизительных значениях. Кроме того, решение уравнения Пуассона заменяется на разложение потенциала и плотности по био-ортонормальному базисному набору функций, которые должны подбираться для каждой конкретной задачи. Этот метод применялся различными авторами; упомянем лишь две работы: Джалали и Хантера [2005], Де Рийке и Вулис [2016].

Альтернативный метод расчета собственных колебаний звездного диска был предложен Е.В. Поляченко [2005]. Метод не использовал биоортонормальный базис и имел вид стандартной линейной задачи на СЗ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Последнее позволяло находить разом все СЗ без какой-либо априорной информации. Это направление получило дальнейшее развитие в работах М.А. Джалали [14, 15].

Интерес прежде всего к звездным дискам, а не газовым, объясняется тем, что газ составляет в галактиках лишь небольшую долю по массе (по современным оценкам – до 10-15 %). Нужно, однако, иметь ввиду, что свойства устойчивости зависят не только от распределения массы, но и ее динамической "нагретости". Последняя характеризуется в звездных дисках радиальной дисперсией скоростей σ_R, а в газовых – давлением или скоростью звука v_s. Газовая среда обычно более холодная, что в принципе может приводить к развитию неустойчивости газовой компоненты на фоне устойчивого аксиально-симметричного звездного диска. Данная гидродинамическая концепция формирования спиральных рукавов галактик развивалась в работах А.М. Фридмана с соавторами (см. обзор [11]). Заметим, однако, что сам звездный диск, как правило, неустойчив, вследствие чего необходимо сравнивать характерные времена неустойчивости звездного и газового дисков. Одна из таких задач рассмотрена в разделе 3.

Теория устойчивости газовых дисков имеет еще одно важное значение – она дает менее детальное (а значит более простое) описание звездных дисков. Данный подход развивался в работах Ц.Ц. Линя с соавторами (см. монографию Бертина 2014). Такая подмена полностью оправдана в динамически холодных моделях. Но, к сожалению, эти модели оказываются сильно неустойчивыми и поэтому неприменимыми к описанию галактических дисков. С ростом радиальной дисперсии скоростей или давления отличия звездного диска от газового становятся все заметнее. Не до конца изучено влияние резонансов на распространение спиральной волны плотности в газовом диске и его различие в этом отношении от звездного.

Упомянутая сильная неустойчивость холодных дисков есть прямой аналог джинсовской неустойчивости во вращающихся средах. Как следует из дисперсионных уравнений (2, 3), вращение стабилизирует диск на больших масштабах возмущений (малые k), поэтому область неустойчивости по k занимает промежуточные значения порядка $k_* \equiv \pi G \Sigma_{\rm d}/c^2$, где c обозначает либо v_s, либо σ_R.

Неустойчивость, приводящая к развитию спиральных рукавов и баров, имеет другую природу. Она связана с наличием дифференциального вращения, самогравитации и эпициклического движения. Благодаря дифференциальному вращению, т.е. зависимости угловой скорости от радиуса $\Omega(R)$, спиральное возмущение, вращающееся с постоянной скоростью $\Omega_{\rm p}$, имеет несколько важных резонансов с орбитальным движением частиц диска. Резонанс с азимутальным движением, где выполняется условие $\Omega(R_{\rm c}) = \Omega_{\rm p}$, называется коротационным; резонансы с эпициклическим движением, где выполняются условия $\Omega(R_{\rm L}) \pm \kappa(R_{\rm L})/m = \Omega_{\rm p}$, называют линдбладовскими. В диске возникают области, в которых энергия и угловой момент волны отрицательны (внутри $R_{\rm c}$) и положительны (вне $R_{\rm c}$). Волна, находящаяся внутри коротационного резонанса $R_{\rm c}$ увеличивает свою амплитуду со временем благодаря обмену с внешней областью [2, 3, 4], либо же с частицами вблизи коротации [51].

Неустойчивость оказывается подавленной если во внутренней области имеется линдбладовский резонанс [31, 32]. Наличие или отсутствие этого резонанса зависит от частоты вращения спирали и от степени концентрации материи в центре диска. Линдбладовский резонанс имеется при любой частоте в случае степенного роста плотности к центру $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$, где r – сферический радиус. Такое распределение имеет специальное название – "касп", в отличие от более плавных распределений, в которых плотность выходит на какое-то постоянное значение.

Несмотря на то, что в моделях с каспом образование спиралей и баров должно быть подавлено, имеются численные эксперименты, показывающие формирование баров даже в этом случае. Так, например, в работе Видроу и др. [2008] использовалась модель "Млечного пути" с каспом $\alpha \approx 0.5$ и для нее с помощью решения задачи N-тел была получена неустойчивость бар-моды. Поляченко и др. [2016] показали, что возможность образования бара связана с наличием у диска конечной толщины: если радиус линбладовского резонанса оказывается меньше характерной толщины диска, то планарное приближение для нахождения резонансов оказывается нарушенным. Размытый резонанс оказывается неспособным поглотить падающую спиральную волну и предотвратить развитие неустойчивости.

Тоомре [1977] показал существование неустойчивости в модели диска Местеля, угловая скорость которого $\Omega(R) \propto R^{-1}$. Неустойчивость возникает здесь только тогда, когда из центра вырезано достаточно широкое кольцо, так что поверхностная плотность $\Sigma_{\rm d}(R)$ убывает к центру как R^3. Благодаря такому поведению параметр Тоомре $Q_{\rm s}$ неограниченно растет к центру. Области с большими значениями параметра Тоомре являются непрозрачными для распространения спиральных волн. Поэтому центр диска вместе с резонансом Линдблада оказываются внутри так называемого Q-барьера.

Предложенный Поляченко [2018] матричный метод расчета неустойчивых СЗ для газового диска дополняет имеющиеся методы для звездных дисков и позволяет выявить отличия спектров неустойчивых СЗ для газовых и звездных дисков. С его помощью можно проанализировать, в частности, роль линдбладовского резонанса в ослаблении газовой спиральной волны и газового Q-барьера. Этому посвящен Раздел 2.

Помимо неустойчивости, развивающейся в плоскости диска, существуют неустойчивость, связанная с движениями звезд поперек плоскости диска. Это т.н. "изгибная" неустойчивость тонкого слоя, которая приводит к его утолщению. Полученное для нее дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \nu^2 + 2\pi G\Sigma_{\mathrm{d}}|k| - \sigma^2 k^2 \tag{5}$$

оказывается очень похожим на дисперсионное соотношение (2), с той только разницей, что эпициклическая частота здесь заменена на частоту колебаний частиц в потенциале гало ν; роли же других слагаемых противоположны: слагаемое, отвечающее самогравитации работает на устойчивость, а дисперсия скоростей в плоскости слоя σ – на неустойчивость [26]. Физический смысл состоит в том, что самогравитация старается вернуть вылетевшую частицу обратно в слой.

В отсутствие гало ($\nu = 0$) дисперсионное соотношение (5) содержит только одну границу масштаба неустойчивых волн и поэтому изгибные волны с достаточно короткой длиной волны, $\lambda < \sigma^2/(G\Sigma_{\mathrm{d}})$, всегда неустойчивы. В.Л. Поляченко и И.Г. Шухман [1977] показали, что соотношение (5) может выполняться лишь для длин волн, существенно превышающих характерную толщину слоя. Если за эту величину взять толщину изотермического слоя $z_0 \equiv \sigma_z^2/(2\pi G\Sigma_{\mathrm{d}})$, определяемую вертикальной дисперсией скоростей σ_z, то мы получим допустимый диапазон неустойчивых волновых чисел:

$$\frac{\sigma_z^2}{\sigma^2} < |k| z_0 \lesssim \frac{\sigma_z}{\sigma}, . \tag{6}$$

Применительно к звездной системе этот результат означает возможность устойчивости слоя относительно изгибных возмущений при достаточно больших значениях отношения дисперсий σ_z/σ. Для анизотропного максвелловского распределения Араки [1987] показал, что граница устойчивости соответствует значению $\sigma_z/\sigma = 0.293$. Для устойчивости осесимметричных изолированных дисков этого значения оказалось недостаточно: более точная граница $\sigma_z/\sigma \approx 0.6$ была получена численно Мерритом и Селвудом [1994]. Наличие гало делает диск более устойчивым, т.е. смещает границу устойчивости в сторону меньших значений.

Неустойчивость бар-моды в плоскости диска приводит к формированию бара, который в свою очередь увеличивает дисперсию скоростей в плоскости диска. Результатом этого процесса становится формирование диска с малым соотношением σ_z/σ, который оказывается неустойчивым по отношению к изгибным возмущениям. Возникающая вторичная неустойчивость приводит к формированию X-образных структур, наблюдаемых с ребра многих спиральных галактик. Этой задаче посвящен Раздел 4.

Цели и задачи работы

Основной целью данной работы является исследование влияния газовой среды на формирование спирального узора в звездном диске, а также распространение волн в газовой и звездной среде. Моделирование образование бара и псевдобалджа.

Исходя из этого, в работе решаются следующие задачи:

1. провести сравнительную характеристику образования спирального узора в газовых и звездных дисках.
2. исследовать роль внутреннего линдбладовского резонанса в подавлении глобальных спиральных мод в газовом и звездном диске.

3. численное моделирование образования изгибов диска в сильно неустойчивой по отношению к образованию бара модели Куйкена-Дубинского. Моделирование образование бара и псевдобалджа.

Положения, выносимые на защиту

- Предложен механизм образования трехрукавных спиралей.
- показано, что в газовом диске моды образуются независимо от наличия внутреннего линдбладовского резонанса, в отличии от звездного диска, в котором при наличии IRL, необходим вводить Q-барьер.
- Формирование бара в более горячей модели характеризуется более спокойной эволюцией. В динамически более холодной и более неустойчивой модели наступает фаза вторичной неустойчивости, уже поперек диска. Критически важным для вторичной (изгибной) неустойчивости оказывается отношение вертикальной и радиальной дисперсий скоростей, которое уменьшается при образовании бара и может достигнуть критического значения (примерно равного 0.5), при котором наступает неустойчивость.

Публикации

- Л.В. Шпигель и Е.В. Поляченко Q-барьер и формирование спиральных волн плотности в газовых и звездных дисках
- Л.В. Шпигель и Е.В. Поляченко Формирование псевдобалджа в галактиках типа «Млечный путь» как результат действия изгибной неустойчивости
- Spiegel, Lubov; Polyachenko, Evgeny Multiarm spirals on the periphery of disc galaxies

ГЛАВА 1
ОБЗОР МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ

Движение звезды в плоскости галактики определяется функцией распределения F и гамильтонианом H_0. Пусть звезды движутся в плоскости симметрии аксиально-симметричного гравитационного потенциала $V_0(r)$. Для расчета орбиты используются переменные угол-действия $\mathbf{J}$, $\mathbf{w}$. Где переменные действия $\mathbf{J} \equiv (J_r, L_z)$, являются интегралами движения в невозмущенном поле, J_1 - определяет радиальное действие, J_2 - момент импульса.

Таким образом, гамильтониан H_0 зависит только от переменных действия $\mathbf{J} \equiv (J_r, L_z)$, являющихся интегралами движения. Тогда

$$\Omega_1(\mathbf{J}) \equiv \frac{\partial H_0(\mathbf{J})}{\partial J_r}$$

$$\Omega_2(\mathbf{J}) \equiv \frac{\partial H_0(\mathbf{J})}{\partial L_z},$$

две орбитальные частоты радиальных и азимутальных колебаний.

Возмущающее поле влияет, как на переменные действия, так и на переменные углов. В линейной теории рассматривается равновесная система с возмущениями малой амплитуды, много меньше исходной функции. Тогда возмущенные орбитальные элементы можно записать в виде суммы возмущенной и невозмущенной части.

$$J_i \to J_i + \Delta J_i,\ w_i \to w_i + \Delta w_i$$

1.1. Линейный матричный метод Калнайса

Для линейной теории возмущений Калнайс [20, 21] предложил записать возмущающие элементы через возмущающую функцию, которая в свою очередь выражается через коэфициенты фурье $h_{lm}(\mathbf{J})$.

$$\Delta J_i = \frac{\partial \chi}{\partial w_i}, \quad \Delta w_i = -\frac{\partial \chi}{\partial J_i}$$

$$\chi = -\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l,m} \frac{h_{lm}(J_i)\exp[i(lw_1 + mw_2 + \omega t)]}{i(l\Omega_1 + m\Omega_2 + \omega)} \right\}.$$

Используя переменные угол-действие можно записать значение потенциала g, ощущаемого звездой вдоль ее возмущенной орбиты, линиризируя полученный потенциал и суммируюя его для всех звезд системы получаем

$$g(J_i+\Delta J_i, w_i+\Delta w_i) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l,m} \int\int F(\mathbf{J}) \left\{ \left(l\frac{\partial}{\partial J_1} + m\frac{\partial}{\partial J_2} \right) \times \left[\frac{g_{lm}(\mathbf{J}) h_{lm}(\mathbf{J})}{l\Omega_1 + m\Omega_2 + \omega} \right] \right\} dJ$$

где g_{lm} коофициенты фурье для потенциала g.

Если потенциал h можно разложить в ряд

$$h = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \phi_j$$

и соответствующюю ему возмущенную поверхностную плотность записать в виде

$$s = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sigma_j.$$

Можно получить нелинейное матричное уравнение на собственные функции

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_{ij}(\omega) a_j = a_i, \qquad (1.1)$$

где

$$M_{ij}(\omega) = \frac{1}{8\pi^3 G} \sum_{l,m} \int \int F(\mathbf{J}) \left\{ \left(l\frac{\partial}{\partial J_1} + m\frac{\partial}{\partial J_2} \right) \times \left[\frac{(\phi_i)_{lm}(\phi_j)_{lm}}{l\Omega_1 + m\Omega_2 + \omega} \right] \right\} dJ_1 dJ_2$$

Данное уравнение может быть решено только для специальных ω. Для локализации частот можно использовать диаграммы Найквиста, как это сделал Цанг в своей работе [53]. Он использовал теорию Калнайса для вычисления мод изотермического диска [34], который обладает важным свойством – плоской кривой вращения.

1.2. Линейный матричный метод Поляченко

Альтернативный подход для расчета мод в звездных дисках предложил Поляченко [2004, 2005]. Рассматривая малые возмущения функции распределения (ФР) и гамильтониана

$$F = F_0(\mathbf{J}) + F_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{w}, t), \; H = H_0(\mathbf{J}) + V_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{w}, t),$$

где возмущенный потенциал связан с ФР следующим соотношением

$$V_1(\mathbf{r}, t) = -G \int \boldsymbol{dJ'dw'} \frac{F_1(\boldsymbol{J'}, \boldsymbol{w'}, t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}(\boldsymbol{J'}, \boldsymbol{w'}\ )|},$$

подставляем полученые выражения в бесстолкновительное уравнение Больцмана.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] = 0$$

Учитывая малые возмущения, задача сводиться к решению линеризованого уравнения Больцмана, путем подстановки в него разложений возмущающей части в ряд Фурье

$$F_1 = e^{imw_2 - i\omega t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_l(\mathbf{J}) e^{ilw_1}$$

$$V_1 = e^{imw_2 - i\omega t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Psi_l(\mathbf{J}) e^{ilw_1}$$

Для того чтобы система была самосогласованной используется уравнение Пуассонна

$$V(r) = -G \int dr' dv' \frac{\mathcal{F}(r', v')}{r_{12}}$$

Записывая выражение в переменных угол действие и находя фурье элементы для $\Psi_l(\mathbf{J})$. Итоговое выражение для дисковых систем принимают вид:

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{J})[\omega - l\Omega_1(\mathbf{J}) - m\Omega_2(\mathbf{J})] = GF'_{0,l}(\mathbf{J}) \int d\mathbf{J}' \sum_{l'=-\infty}^{\infty} \Pi_{l,l'}(\mathbf{J}, \mathbf{J}') \mathcal{F}_l(\mathbf{J}') \tag{1.2}$$

где F_l собственные векторы, $F'_{0,l}(\mathbf{J})$ - обозначение выражения

$$F'_{0,l}(\mathbf{J}) = l \frac{\partial F_0(\mathbf{J})}{\partial J_r} + m \frac{\partial F_0(\mathbf{J})}{\partial L_z}$$

и подинтегральная функция может быть представлена виде интегралов по радиальным угловым переменным

$$\Pi_{l,l'}(\mathbf{J}, \mathbf{J}') = 4 \int_0^{\pi} dw_1 \int_0^{\pi} dw'_1 h[r(w_1, \mathbf{J}), r(w'_1, \mathbf{J}')] \cos(w_1 l + m\theta) \cos(w'_1 l' + m\theta')$$

где

$$h[r(w_1, \mathbf{J}), r(w'_1, \mathbf{J}')] \equiv \frac{1}{2\pi r_>} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(m\alpha)}{\sqrt{1 + z^2 - 2z\cos\alpha}}$$

$$z = r_</r_>; r_< = \min[r(w_1, \mathbf{J}), r(w_1', \mathbf{J}')], r_> = \max[r(w_1, \mathbf{J}), r(w_1', \mathbf{J}')],$$

$$\theta(w_1, \mathbf{J}) \equiv w_2 - \phi = w_2 - L_z \int_{r_{min}}^{r} \frac{dx}{x^2 v_r(x, \mathbf{J})}$$

$\phi = \phi(w_1, w_2, \mathbf{J})$ - азимут звезды.

Уравнение 1.2 используется для поиска нестабильных собственных мод в любом двумерном галактическом звездном диске. В отличии от метода Калнайса (1.1), здесь можно получать весь спектр мод. Кроме того в его подходе, собственная частота моды появляется в уравнении очень сложным образом.

1.3. Линейный матричный метод с использованием базисных функций

В методе Поляченко при решении матричного уравнения 1.2 получается матрица с большим количеством элементов, для расчета которой требуются значительные вычислительные мощности. Джалали [2007] предложил использовать разложения потенциала и ФР, чтобы уменьшить порядок матрицы. С одной стороны возмущеные ФР и потенциал можно разложить в ряд фурье по угловым переменным.

$$F_1(\mathbf{J}, \mathbf{w}, t) = \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_j^{lm}(t) \Phi_j^{lm}(\mathbf{J}) e^{[i(lw_1 + mw_2)]}, \tag{1.3}$$

$$V_1(\mathbf{J}, \mathbf{w}, t) = \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{lm}(t) \Psi_j^{lm}(\mathbf{J}) e^{[i(lw_1 + mw_2)]} \tag{1.4}$$

где $\Phi_j^{lm}(\mathbf{J})$ и $\Psi_j^{lm}(\mathbf{J})$ - пробные функции.

С другой стороны возмущенная поверхностная плотность и потенциал могут быть предтавлены в виде разложения по биортогональьому базису,

$$V_1(r,\phi,t) = e^{im\phi - i\omega t}\sum_{j=0}^{\infty} a_j\psi_j(r),\ \Sigma_1(r,\phi,t) = e^{im\phi - i\omega t}\sum_{j=0}^{\infty} a_j\sigma_j(r), \qquad (1.5)$$

где $\psi_j(r)$, $\sigma_j(r)$ - биортогональный потенциал и поверхностная плотность, которое удовлетворяет условию

$$2\pi\int_0^\infty \psi_j(r)\sigma_{j'}(r)rdr = D_j\delta_{j,j'}$$

где $\delta_{j,j'}$ символ Кронекера. В качестве функций $\psi_j(r)$ и $\sigma_{j'}(r)$ использовались функции Клаттона-Брока [1972]

Приравнивая потенциалы в 1.5 и 1.4 получаем

$$\Psi_j(\mathbf{J}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi_j(r)\cos[l\omega_1 + m\theta(\omega_1,\mathbf{J})]d\omega_1$$

.

Выбор функции $\Phi_j(\mathbf{J})$ более сложная задача. Джалали предлагает подставить возмущающие потенциал и ФР и положить, что производная возмущённой ФР по времени равна нулю. В результате получаем:

$$\Phi_j(\mathbf{J}) = \frac{F'_{0,l}}{l\Omega_1 + m\Omega_2}\Psi_j(\mathbf{J}),$$

Однако, такой выбор не позволят работать с резонанстными орбитами для которых

$$l\Omega_1(\mathbf{J}) + m\Omega_2(\mathbf{J}) = 0$$

Кроме того довольно сложно выбрать биортогональный базис так как их выбор очень ограничен [9, 22, 46, 47].

1.4. Метод конечных элементов в звездном диске

Джалали [2010] продолжил исследование линейной проблемы собственных значений, используя формулировку метода конечных элементов (МКЭ) Бубнова-Галеркина.

Рассмотрим полярную систему координат. И разделим все пространство на N колец ширина каждого элемента определяется как $\Delta r = r_{n+1} - r_n$. Возмущенный потенциал и поверхностную плотности разложим на коэфициенты Фурье

$$V_1(r, \phi, t) = e^{im\phi - i\omega t} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_d} H_n(r) G_n^j a_n^j,$$

$$\Sigma_1(r, \phi, t) = e^{im\phi - i\omega t} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_d} H_n(r) G_n^j b_n^j,$$

где функции $H_n(r)$ равны еденице внутри кольца $r_n \leq r \leq r_{n+1}$ и нулю вне этого кольца. Интерполирующие полиномы G_n^j, $1 \leq j \leq N_d$ должны удовлетворять условию $G_n^j(\bar{r}_k) = \delta_{jk}$, где $\bar{r}_k$ – положение узла k в приведенных координатах.

$$\bar{r}_k = 2\frac{r - r_n}{\Delta r_n} - 1$$

Полиномы G_n^j для $N_d = 2$:

$$G_n^1 = \frac{1}{2}(1 - \bar{r}),$$
$$G_n^2 = \frac{1}{2}(1 + \bar{r})$$

Фурье-компоненты для возмущенных потенциала и ФР имеют вид:

$$\Psi_l(\mathbf{J}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_d}\Psi_l^j(n,\mathbf{J})a_n^j, \mathcal{F}_l(\mathbf{J}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_d}E_l^j(n,\mathbf{J})z_n^j(n),$$

где

$$\Psi_l^j(n,\mathbf{J}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} H_n(r)G_n^j\cos[il\omega_1 + im(\omega_2-\phi)]d\omega_1,$$

а пробные функции$E_l^j(n,\mathbf{J})$ для ФР невозможно определить из уравнений и их необходимо подбирать. Джалали (2010) принимает их в виде:

$$E_l^j(n,\mathbf{J}) = \frac{F_{0,l}}{l\Omega_1 + m\Omega_2}\Psi_l^j(n,\mathbf{J}),$$

что имеет такие же недостатки, как и уравнения Калнайса, они имеют неопределеность вблизи резонансных орбит.

Точность расчетов МКЭ определяется несколькими факторами:

1. степенью дифференцируемости функций в узлах сетки;
2. количество членов Фурье в разложении по w_1;
3. количество узлов сетки и их размеры;
4. точность интегралов, взятых по пространству действий;
5. точность поиска собственных значений.

1.5. Метод конечных элементов в газовом диске

Для исследования спиральной структуры, используют инструменты гидродинамики, описывающей, тонкие газообразые диски. В статье [41] предлагается новый метод поиска спиральных структур, основанный на распространении возмущений малой амплитуды на конечные радиальные элементы. Матричное уравнение извлекается из исходных гидродинамических уравнений и имеет вид линейной алгебраической задачи на собственные значения.

Тонкий газовый диск определяется поверхностной плотностью, угловой скоростью и скоростью звука.

Запишем основные уравнения для газового диска : уравнение Эйлера

$$-i\omega_* v_r - 2\Omega v_\theta = -\frac{d}{dR}(V+h)$$

$$-i\omega_* v_\theta - \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r = -\frac{im}{R}(V+h).$$

Уравнение неразрывности

$$-i\omega_*\Sigma + \frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R\Sigma_0 v_r) + \frac{im\Sigma_0}{R} v_\theta.$$

Уравнение состояния

$$h = c_s^2 \frac{\Sigma}{\Sigma_0}.$$

Здесь $\omega_* = \omega - m\Omega$, $\omega = m\Omega_p + i\gamma$ и эпициклическая частота

$$\kappa^2 \equiv 4\Omega^2 + R\frac{d\Omega^2}{dR}.$$

Для возмущеного потенциала уравнение Пуассона имеет вид

$$V(R) = \int_0^\infty dR' R' G_m(R,R')\Sigma(R') \equiv \hat{G_m}\Sigma$$

где G_m функця Грина. Выражая потенциал V и энтальпию через Σ получаем систему интегрально диференциалльныйх уравнений.

$$\omega v_r = m\Omega v_r + 2i\Omega v_\theta - i\frac{d}{dR}(\hat{H}_m\Sigma)$$

$$\omega v_\theta = -i\frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r + m\Omega v_\theta + \frac{m}{R}(\hat{H}_m\Sigma)$$

$$\omega\Sigma = -\frac{i}{R}\frac{d}{dR}(R\Sigma_0 v_r) + \frac{m\Sigma_0}{R} v_\theta - m\Omega\Sigma)$$

Для решения данного уравнения разделим область на радиальные узлы и определим базисные функции ϕ_j. Тогда неизвестные функции (v_r, v_θ, Σ) будут описываться линейными комбинациями

$$f(R) \to \sum_{j=0}^{N} F_j \phi_j$$

где F_j значение функции (v_r, v_θ, Σ) в узле R. В качестве базисных функций ϕ_j используются полиномы Лежандра. Для получения линейной задачи на собственные значения, введем вектор x состоящий из значений скоростей и поверхностной плотности в каждом узле сетки вдоль радиуса R

$$\omega \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

умномнажая уравнения на и интегрируя по радиусу мы получаем матрицу с левой :

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (R\Sigma_0)_{kj} & 0 & 0 \\ 0 & (R\Sigma_0)_{kj} & 0 \\ 0 & 0 & (R\Sigma_0)_{kj} \end{pmatrix}$$

и с правой стороны

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} m(R\Sigma_0\Omega)_{kj} & 2i(R\Sigma_0\Omega)_{kj} & -iP'_{kj} \\ -i(\frac{R\kappa^2}{2\Omega})_{kj} & m(R\Sigma_0\Omega)_{kj} & mP_{kj} \\ -iD_{kj} & m(\Sigma_0)_{kj} & m(R\Sigma_0\Omega)_{kj} \end{pmatrix},$$

где

$$P_{kj} = \int dRdR'\phi_k(R)\Sigma_0(R)G_m(R,R')R'\Sigma_0(R')\phi_j(R') + \quad (1.6)$$

$$+ \int dR\phi_k(R)\Sigma_0(R)c_s^2(R)\phi_j(R) \quad (1.7)$$

$$P'_{kj} = \int dRdR'\phi_k(R)R\Sigma_0(R)\frac{dG_m(R,R')}{dR}\Sigma_0(R')\phi_j(R') + \tag{1.8}$$

$$+\int dR\phi_k(R)R\Sigma_0(R)\frac{d}{dR}[c_s^2(R)\phi_j(R)] \tag{1.9}$$

$$D_{kj} = \int dR\phi_k(R)\frac{d}{dR}[R\Sigma_0(R)\phi_j(R)].$$

Здесь матрица $\mathbf{A}$ уравнения получается $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$.

Описаный метод Поляченко [2018] применяет для расчета модели экспоненциального диска. Такой метод получается более быстрым и точным по сравнению с методами в звездных дисках и позволяет не только сразу получить весь спектр мод, но и довольно просто расчитать возмущение плотности.

ГЛАВА 2
ФОРМИРОВАНИЕ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН ПЛОТНОСТИ В ГАЗОВЫХ И ЗВЕЗДНЫХ ДИСКАХ

Определение неустойчивых мод звездных дисков играет важную роль в объяснении происхождения спиральных узоров дисковых галактик. Ввиду относительной сложности уравнений звездной динамики, предпринимались серьезные усилия по адаптации гидродинамических моделей к описанию звездных дисков [5, 27, 35]. В пределе холодной звездной среды и отсутствия давления в газе эти среды действительно ведут себя одинаково вне резонансов. Оказалось, однако, что спиральные волны в газе и звездах по-разному взаимодействуют с линдбладовскими резонансами, которые играют важнейшую роль в формировании спиральных узоров.

Эта роль состоит в поглощении звездной волны, падающей на резонансы [31, 32]. На периферии галактического диска всегда имеется внешний резонанс (OLR). Кроме того, возможно наличие также внутреннего резонанса (ILR) недалеко от центра, например при неограниченном росте скорости вращения к центру диска (т.н. модели с «каспом»). Для установления спиральной волны необходим «резонатор» в центральной части диска, где волна с отрицательным угловым моментом увеличивает свою амплитуду, отдавая положительный угловой момент наружу. Поглощая этот угловой момент, внешний резонанс играет созидательную роль в установлении спиральной волны плотности в центре. Наличие же ILR в «резонаторе» играет негативную роль, прерывая цикл усиления волны в центре. Необходимо каким-то образом вынести ILR за пределы «резонатора».

Именно с этим связана идея Q-барьера, который бы отражал спиральную волну, идущую в центр, до того как она достигнет ILR. Свое название этот барьер получил от известного параметра Тоомре Q,

$$Q = \frac{\kappa(R)\,\sigma(R)}{3.36\,G\,\Sigma_0(R)} \tag{2.1}$$

(здесь κ – эпициклическая частота, σ – радиальная дисперсия скоростей, Σ_0 – поверхностная плотность, R – галактоцентрический радиус), определяющего свойства устойчивости гравитирующих дисков. Области, характеризующиеся большими значениями Q, оказываются непрозрачными для спиральных волн. Последние должны отражаться при подходе к этим областям. Подтверждением правильности этих соображений является модель Цанга-Тоомре [1977, 1976], подробно описанная ниже.

В газовой среде поглощения на линдбладовских резонансах не происходит [30][1]. Внешняя волна может уйти на бесконечность, если отсутствует край диска. Но ILR не должен мешать работе «резонатора», накачивающего спиральную волну в центре. Целью данной работы является исследование неустойчивых газовых мод в модели с каспом плотности, где ILR неизбежен. В частности, рассмотрено их существование и дано сравнение их основных характеристик с неустойчивой двухрукавной модой в звездном диске.

2.1. Диск Местеля и модель Цанга-Тоомре

Диск Местеля характеризуется поверхностной плотностью $\Sigma_0(R) = V_0^2/(2\pi G R)$, самогравитирующим потенциалом $\Phi_0(R) = V_0^2 \ln R$ и плоской кривой вращения, $V_\mathrm{c}(R) = V_0$. Одна из возможных его реализации в фазовом пространстве была предложена Тоомре [1977]:

$$F(E, L) \propto L^q \mathrm{e}^{-E^2/\sigma^2}\ , \tag{2.2}$$

[1] В работе приведено доказательство отсутствия взаимодействия в случае без самогравитации. Строгое доказательство в общем случае до сих пор не представлено.

где E и L – удельная энергия и угловой момент звезды; параметр $q = V_0^2/\sigma^2 - 1$. Модель становится устойчивой относительно осесимметричных возмущений при $\sigma \geq 0.378 V_0$. Несмотря на то, что косые моды ($m > 0$) обычно стабилизируются позднее с ростом радиальной дисперсии, они не были обнаружены даже при $\sigma = 0.378 V_0$.

Неограниченный рост угловой скорости вращения в центре затрудняет расчет неустойчивых мод. В [50, 53] была предложена модификация этой модели, которая состоит в замене самогравитирующего вещества диска центральным горячим «балджем», роль которого сводится к поддержанию заданной скорости вращения. Формально это соответствует умножению F на дополнительный режущий фактор $[1 + (L_0/L)^n]^{-1}$. Неустойчивые моды отсутствуют при $n = 1$, когда центр диска вырезается относительно мягко. Однако при более резком профиле режущего фактора неустойчивые моды были найдены. Так, при $n = 2$ имеется однорукавная мода ($m = 1$) со скоростью вращения $\Omega_{\rm p} = 0.141$ и инкрементом нарастания $\gamma = 0.066$ (в единицах V_0^2/L_0), а при $n = 4$ – двухрукавная мода ($m = 2$) с параметрами $(\Omega_{\rm p}, \gamma) = (0.439, 0.127)$.

Рис. 2.1 поясняет появление неустойчивой моды на языке Q-барьера. Умножение F на режущий фактор приводит к занулению поверхностной плотности диска в центре (a), что дает неограниченный рост профиля $Q(R)$ (b). Заметим, что для модели без режущего фактора Q постоянно и близко к единице. Область по радиусу $R < R_{\rm Q}$ со значениями $Q \gtrsim 3$ (b, c) принято считать непрозрачной для волн [5, 45, 51]. На нижнем рисунке даны положения основных резонансов неустойчивой двухрукавной моды. Видно, что $R_{\rm ILR}$ оказывается ближе к центру, т.е. за пределами области «резонатора» (от $R_{\rm Q}$ до области коротации).

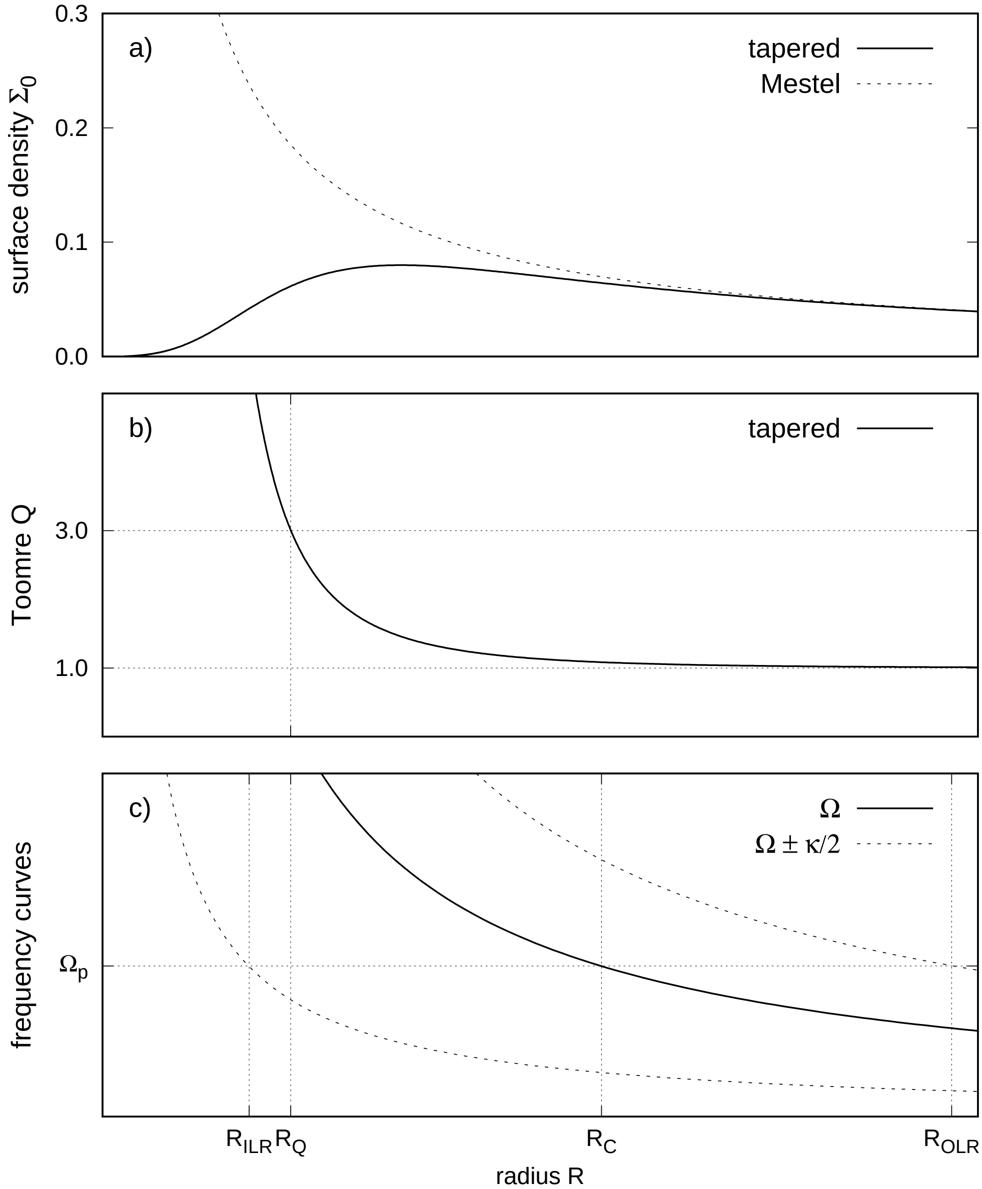

Рис. 2.1: Модель Цанга-Тоомре неустойчивого звездного диска с каспом: a) поверхностная плотность диска $\Sigma_0(R)$ (tapered) в сравнении с $\Sigma_0(R)$ диска Местеля (Mestel); b) Профиль параметра Тоомре Q; c) частотные кривые $\Omega(R)$, $\Omega(R) \pm \kappa/2$. Горизонтальная линия $\Omega_{\mathrm{p}} = 0.439$ дает положение основных резонансов неустойчивой моды $m = 2$. Радиус Q-барьера R_Q соответствует значению $Q = 3$.

2.2. Неустойчивые моды в газовом диске с каспом

В качестве исследуемой модели примем аналог модели Цанга-Тоомре: поверхностную плотность, представленную на Рис. 2.1, плоскую кривую вращения и постоянную скорость звука, соответствующую значению $Q = 1$ для газа на периферии диска. Для расчета неустойчивых газовых мод мы применяем метод конечных элементов, описанный в [41].

На Рис. 2.2 представлен спектр неустойчивых мод газового диска. В отличие от звездного диска, тут имеется несколько мод, причем все они находятся слева на плоскости $(\Omega_{\rm p}, \gamma)$ от моды Цанга-Тоомре. Соответствующие положения ILR оказываются существенно дальше от центра, $R_{\rm ILR} = 0.293/\Omega_{\rm p}$, т.е. в области прозрачности для волновых пакетов, характеризуемой значениями Q, близкими к единице.

На Рис. 2.3 приведены примеры спиральных узоров. Обращает на себя внимание, что узоры ведут себя регулярно на линдбладовских резонансах. В отличие от этих газовых спиралей, звездные заканчиваются на внешнем линдбладовском резонансе из-за поглощения спиральной волны на OLR.

2.3. Выводы

На примере модели с каспом мы показали, что несмотря на наличие ILR в газовом диске имеются неустойчивые двухрукавные моды. В отличие от звездного диска, где единственная такая мода появляется за счет Q-барьера, здесь наличие барьера не обязательно вследствие того, что газовая волна не взаимодействует с резонансом.

Интересно, что роль Q-барьера в газовом диске не вполне ясна. Согласно [5], в газовой среде волна также должна отражаться от барьера. Однако в своих вычислениях мы обнаружили, что положение неустойчивых мод зависит от положения внутренней границы расчетной области. Этого не должно происходить, если граница находится глубоко внутри запрещенной области. Данный вопрос будет рассмотрен в будущих статьях.

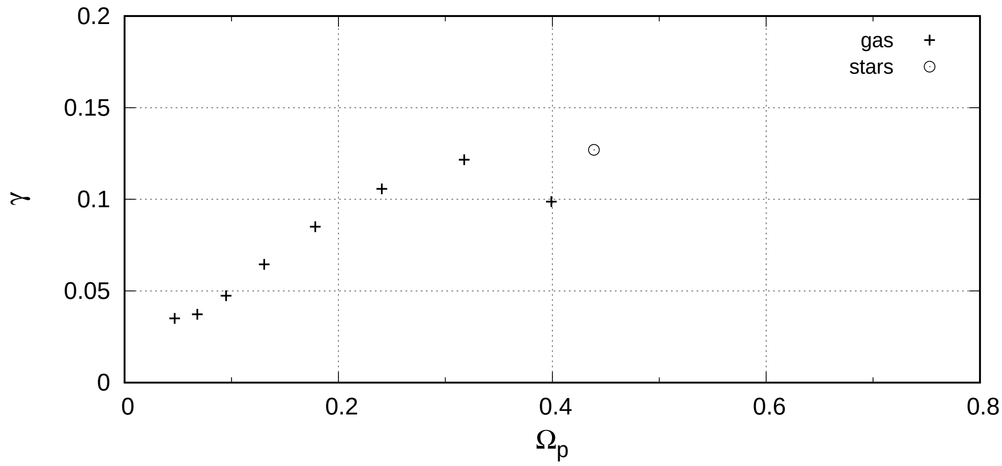

Рис. 2.2: Спектр неустойчивых двухрукавных мод газового диска. Для сравнения дана неустойчивая мода звездного диска в модели Цанга-Тоомре.

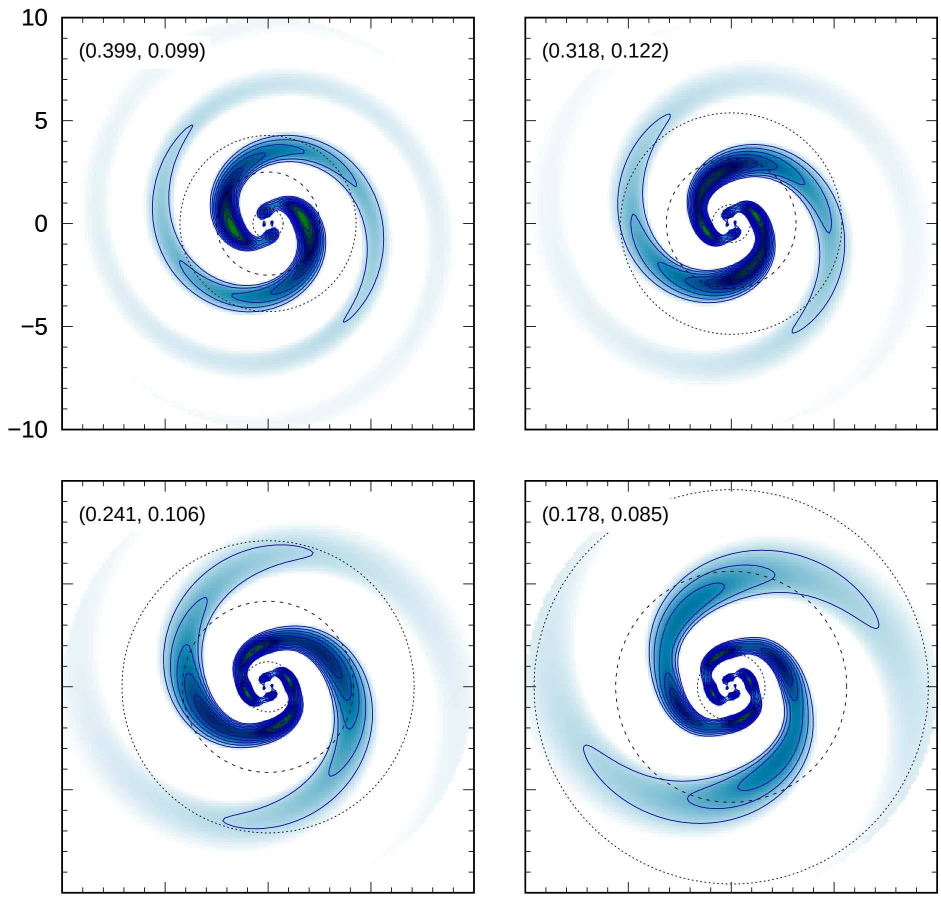

Рис. 2.3: Спиральные узоры неустойчивых мод с наибольшей скоростью вращения узора и инкрементами нарастания. Линии уровня показывают превышение плотности над осесимметричным значением. Пунктирные линии указывают на положение линдбладовских резонансов, штриховые – коротационного резонанса. В левом углу указаны значения $(\Omega_{\mathrm{p}}, \gamma)$ для каждой моды.

ГЛАВА 3 МНОГОРУКАВНЫЕ СПИРАЛИ НА ПЕРИФЕРИИ ДИСКОВЫХ ГАЛАКТИК

Спиральный узор дисковых галактик не всегда имеет вид двух, симметрично расположенных рукавов, простирающихся от центра или центральной перемычки (бара) до края диска. Часто узор представляет собой двухрукавную спираль в центральной области, которая с ростом расстояния до центра сменяется на трех-, четырех- и более рукавную структуру.Такой же рост числа рукавов с радиусом был продемонстрирован в недавнем звездно-газовом моделировании Корчагина и др.(2016, далее 'KXX'). Согласно выводам статьи, присутствие газовой компоненты кардинально меняет эволюцию галактики, несмотря на малую массу газа.

Без учета эволюции газа в звездном диске наблюдается лишь медленное развитие бара с характерным временем экспоненциального нарастания $T_{\mathrm{e}} \approx 500$ млн лет, причем какие-либо заметные спирали отсутствуют. В присутствии активной газовой компоненты формируется двухрукавная спираль в центре диска и трехрукавная – на периферии, причем скорость формирования оказывается примерно на порядок выше. Цель данной работы – проанализировать модель Галактики, методику расчета и выводы из работы KXX, а также предложить свою интерпретацию полученных результатов.

3.1. Критерии устойчивости взаимодействующих звездного и газового дисков

Изолированные звездный и газовый диски в приближении нулевой толщины и тугой закрутки спиралей описываются дисперсионными уравнениями (напр., [7, 43]):

$$D_{\rm s}(s,k) \equiv s^2 - 1 + |\hat{k}_{\rm s}|\mathcal{F} = 0 \ , \tag{A1}$$

$$D_{\rm g}(s,k) \equiv s^2 - 1 + |\hat{k}_{\rm g}| - \frac{Q_{\rm g}^2\hat{k}_{\rm g}^2}{4} = 0 \ , \tag{A2}$$

где

$$s \equiv \frac{\omega_*}{\kappa} \ , \quad \omega_* \equiv \omega - m\Omega \ , \quad \hat{k}_{\rm s} \equiv \frac{k}{k_{\rm s,\ crit}} \ , \quad \hat{k}_{\rm g} \equiv \frac{k}{k_{\rm g,\ crit}} \ ,$$

k – волновое число, $k_{\rm s,\ crit} = \kappa^2/(2\pi G\Sigma_0)$, $k_{\rm g,\ crit} = \kappa^2/(2\pi G\Sigma_{\rm g0})$, $c_{\rm s}$ – скорость звука, $\mathcal{F}$ – редукционный фактор, который для $s = 0$ в случае распределения Шварцшильда принимает вид:

$$\mathcal{F}(0,\chi) = \frac{1}{\chi}(1 - e^{-\chi}I_0(\chi)) \ , \tag{3.1}$$

$\chi \equiv \sigma_R^2 k^2/\kappa^2$, σ_R – дисперсия радиальных скоростей звезд.

Для дисковых галактик характерны соотношения $\Sigma_{\rm g0} \ll \Sigma_0$ и $c_s \ll \sigma_R$, поэтому можно ввести два малых параметра

$$\epsilon \equiv \Sigma_{\rm g0}/\Sigma_0 \ , \quad \delta \equiv c_{\rm s}/\sigma_R \ . \tag{3.2}$$

Самогравитация газового диска влияет на движение звезд и делает звездный диск менее устойчивым. Потеря устойчивости изолированных дисков относительно осесимметричных возмущений происходит при $Q = Q_{\rm g} = 1$, или при $\hat{k}_{\rm s}, \hat{k}_{\rm g} \sim 1$. Однако, ввиду того, что $k_{\rm s,\ crit}/k_{\rm g,\ crit} = \epsilon$, масштабы наиболее опасных для возникновения неустойчивости волновых чисел k оказываются сильно разнесены, и результирующий эффект оказывается незначительным. Найдем соответствующие поправки к параметрам Тоомре для взаимодействующих дисков с помощью совместного дисперсионного соотношения:

$$D_{\rm s}(s,k)D_{\rm g}(s,k) = \mathcal{F}\hat{k}_{\rm s}\hat{k}_{\rm g} \ . \tag{3.3}$$

В случае звездного диска обозначим $\hat{k} = \hat{k}_{\rm s}$, тогда $\hat{k}_{\rm g} = \epsilon \hat{k}$, и дисперсионное уравнение для звездного диска примет вид:

$$s^2 = 1 - |\hat{k}_{\rm s}|(\mathcal{F} + \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \tag{3.4}$$

Малая добавка, пропорциональная ϵ, дает вклад в критическое значение параметра Тоомре в присутствии газового диска:

$$Q^i = 1 + 1.822\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \tag{3.5}$$

Заметим, что оно не зависит от $Q_{\rm g}$, т.к. критическая длина волны оказывается слишком большой, чтобы давление газа играло какую-либо роль.

Для газового диска удобно переобозначить $\hat{k}$ так, чтобы $\hat{k} = \hat{k}_{\rm g}$. Соответственно, $\hat{k}_{\rm s} = \epsilon^{-1}\hat{k}$, а дисперсионное уравнение для газового диска примет вид:

$$s^2 = 1 - |\hat{k}| + \frac{Q_{\rm g}^2 \hat{k}^2}{4} - 3.5\frac{\epsilon}{Q^2}\left(\frac{1}{|\hat{k}|} + \frac{Q_{\rm g}^2}{4 - Q_{\rm g}^2|\hat{k}|}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \tag{3.6}$$

Критическая длина волны, на которой происходит потеря устойчивости, в этом случае равна:

$$|\hat{k}_*| = \frac{2}{Q_{\rm g}^2}\left(1 - \frac{3.5\epsilon}{Q^2}\left[\frac{4}{Q_{\rm g}^2} - \frac{Q_{\rm g}^2}{4}\right]\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ , \tag{3.7}$$

а критический параметр устойчивости газового диска в присутствии звездного диска с параметром Тоомре Q равен:

$$Q_{\rm g}^i = 1 + 1.75 Q^{-2}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \ . \tag{3.8}$$

3.2. Модель Галактики

Модель КХХ состоит из двух активных и двух фиксированных компонент. Активные компоненты – тонкий звездный и газовый диски – описываются соответствующими динамическими уравнениями. Фиксированные компоненты (гало и балдж) заданы неизменным внешним гравитационным потенциалом.

Для тонкого звездного диска принимается экспоненциальный профиль поверхностной плотности

$$\Sigma_0(R) = \Sigma_* \mathrm{e}^{-R/R_\mathrm{d}} \ , \tag{3.9}$$

с радиальной шкалой $R_\mathrm{d} = 3$ кпк и полной массой $M_\mathrm{d} = 2\pi R_\mathrm{d}^2 \Sigma_* = 4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{M}_\odot$. Профиль радиальной дисперсии скоростей

$$\sigma_R(R) = \sigma_0 \mathrm{e}^{-R/R_\sigma} \ , \tag{3.10}$$

имеет параметры $R_\sigma = 6.4$ кпк и $\sigma_0 = 120$ км/с, так что дисперсия скоростей в солнечной окрестности составляет 34.3 км/с.

Параметры газового диска (плотность и скорость звука[1]) в нашей модели плавно меняются с радиусом. Так, газовый диск массой $M_\mathrm{g} = 4 \cdot 10^9\,\mathrm{M}_\odot$, представленный в КХХ плоским профилем поверхностной плотности с $\Sigma_{\mathrm{g}0} = 15.7\,\mathrm{M}_\odot/\text{пк}^2$, резко обрывающемся на радиусе $R = R_\mathrm{g} = 9$ кпк, заменен у нас диском Кузьмина – Тоомре с профилем

$$\Sigma_{\mathrm{g}0}(R) = \frac{\Sigma_{\mathrm{g}*}}{(1 + R^2/R_\mathrm{g}^2)^{3/2}} \ , \tag{3.11}$$

центральной поверхностной плотностью $\Sigma_{\mathrm{g}*} = 39.7\,\mathrm{M}_\odot/\text{пк}^2$ и шкалой $R_\mathrm{g} = 6$ кпк. При этих параметрах масса диска внутри $R = 9$ кпк по-прежнему равна $4 \cdot 10^9\,\mathrm{M}_\odot$, а плотность газа в солнечной окрестности оказывается равной $8.6\,\mathrm{M}_\odot/\text{пк}^2$. Также, в нашей работе принят профиль скорости звука, отлич-

[1]Эта величина, фигурирующая в теории устойчивости газовых дисков, отлична от термодинамической скорости звука, которая достигает интересующих нас значений лишь при температуре порядка 10^5 К. Для ее обозначения иногда используют термин “турбулентная скорость звука”.

ный от постоянного значения $c_\mathrm{s} = 8\,$км/с работы KXX:

$$c_\mathrm{s}(R) = \frac{c_0}{(1 + R^2/R_\mathrm{g}^2)^{1/2}} \ , \tag{3.12}$$

где $c_0 = 5.8\,$км/с (или $3.5\,$км/с в окрестности Солнца).

Для потенциала гало выбран псевдоизотермический профиль,

$$\rho_\mathrm{h}(r) = \frac{\rho_\mathrm{h0}}{(1 + r^2/a_\mathrm{h}^2)} \ , \tag{3.13}$$

где $a_\mathrm{h} = 3\,$кпк – характерный масштаб гало, а центральная плотность $\rho_\mathrm{h0} = 0.085\,\mathrm{M}_\odot/\text{пк}^3$ определяется из условия, что масса гало внутри радиуса $r_\mathrm{h} = 12\,$кпк составляет $7.7 \cdot 10^{10}\,\mathrm{M}_\odot$.

Балдж задается распределением Пламмера

$$\rho_\mathrm{b}(R) = \frac{\rho_\mathrm{b0}}{(1 + R^2/R_\mathrm{b}^2)^{5/2}} \ , \quad \rho_\mathrm{b0} = 47.6\,\mathrm{M}_\odot/\text{пк}^3 \ , \tag{3.14}$$

с шкалой $\rho_\mathrm{b0} = 0.44\,$кпк. При этом профиле плотности масса балджа на радиусе $r = 1.5\,$кпк составляет $1.5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{M}_\odot$.

На Рис. 3.1 a показаны профили круговой скорости вращения $V_\mathrm{circ}(R)$, радиальной дисперсии скоростей звезд $\sigma_R(R)$, и скорости звука $c_\mathrm{s}(R)$, а на Рис. 3.1 b – профили поверхностной плотности звездного и газового дисков. Полученная нами кривая вращения несколько отличается от кривой вращения, приведенной в KXX, причем это отличие не может объясняться различием в распределениях газовых компонент. Так, например, резкий спад кривой вращения из работы KXX после максимума на 1.2 кпк нельзя воспроизвести изменением в распределении газа. По-видимому, приведенные в KXX кривые относятся к состоянию системы, уже вышедшей из первоначального неравновесного состояния.

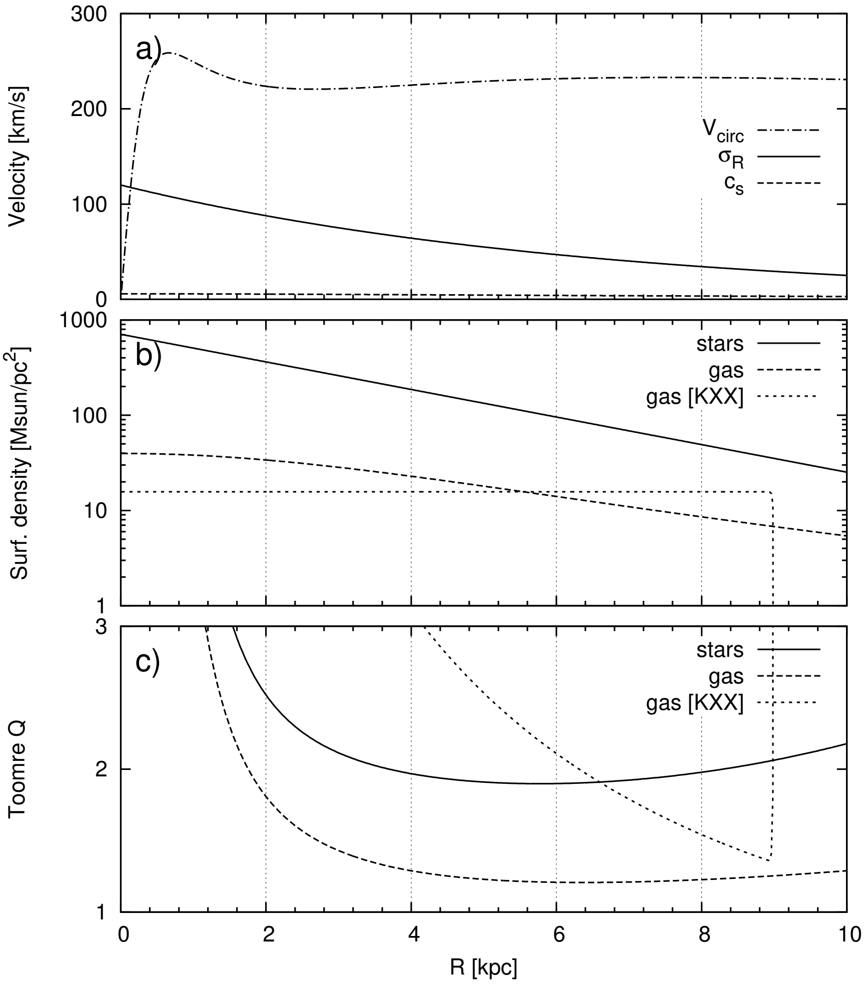

Рис. 3.1: Важнейшие характеристики модели Галактики: a) кривая вращения $V_{\rm circ}(R)$, радиальная дисперсия скоростей звезд $\sigma_R(R)$ и скорости звука $c_{\rm s}(R)$; b) поверхностная плотность звездного и газового дисков; c) профили параметров Тоомре (3.15) для звездного и газового дисков. На рис. b) и c) коротким пунктиром показаны соответствующие профили для газового диска с начальными параметрами статьи KXX.

Об этом же свидетельствует и сравнение профилей параметров устойчивости Тоомре Q для звездного и газового дисков:

$$Q \equiv \frac{\kappa \sigma_R}{3.36 G \Sigma_0} \ , \quad Q_{\rm g} \equiv \frac{\kappa c_{\rm s}}{\pi G \Sigma_{\rm g0}} \ , \tag{3.15}$$

где κ – эпициклическая частота, представленных на Рис. 3.1 c. Действительно, профиль $Q(R)$ оказался близким к зависимости, данной в KXX, для области $R > 2$ кпк. Однако, ход зависимости $Q_{\rm g}(R)$ для параметров газового диска, принятых в KXX (короткий пунктир на Рис. 3.1 c), сильно отличается от поведения данной ими же зависимости $Q_{\rm g}(R) \approx 1.2$ на Рис. 1 справа. Поскольку параметр устойчивости Тоомре есть мера динамической нагретости среды, приведенный в статье KXX профиль $Q_{\rm g}(R)$ означает быстрое остывание среды, так что в центре диска скорость звука становится существенно меньшей 8 км/с.

При моделировании секулярной эволюции и формирования спиральных структур как правило требуется устойчивость звездного и газового дисков относительно аксиально-симметричных возмущений. В невзаимодействующих дисках соответствующими условиями являются $Q, Q_{\rm g}(R) \geq 1$. Взаимодействующие диски более неустойчивы, поэтому границы устойчивости в терминах параметра Тоомре смещаются в сторону больших значений. Однако, если диски сильно различаются по массе и "температуре", поправочные коэффициенты оказываются порядка $\epsilon = \Sigma_{\rm g0}/\Sigma_0$ (см. пункт 3.1). Таким образом, присутствие звездного диска не может быть ответственно за быструю фрагментацию газового диска.

Заметим, что в при фиксированной газовой компоненте в звездном диске образуется бар (см. Рис. 5 статьи KXX). Скорость его образования зависит от условий моделирования, в частности – от числа частиц и учета гало. Так, например, она увеличивается в $2-3$ раза, если вместо фиксированного потенциала гало взять живое гало, т.е. моделировать его также, как и звездный диск [42]. Из роста амплитуды $m = 2$ возмущения в работе КХХ можно оценить время экспоненциального нарастания бара, которое составляет $T_\mathrm{e} \approx 500$ млн лет. В случае живого гало в похожей модели [39] получил $T_\mathrm{e} \approx 400$ млн лет. Формирование трехрукавной спирали в звездной компоненте при включении моделирования газа происходит за время 170 ... 200 млн лет, что соответствует масштабу времени $T_\mathrm{e} \approx 40$ млн лет. Примерно такое же время, 100 ... 150 млн лет, проходит от начала моделирования газа до начала формирования трехрукавной спирали. Этот интервал времени – типичное динамическое время, равное по порядку периоду обращения вокруг центра на радиусах 4 ... 6 кпк.

3.3. Фрагментация газового диска

Используя линейную теорию устойчивости для газового диска, определим характерные значения параметра $Q_\mathrm{g}(R)$, которые способны давать необходимую быструю фрагментацию диска с $T_\mathrm{e} \approx 40$ млн лет и формирование молекулярных облаков. Анализ устойчивости газового диска с помощью матричного метода [40] показывает отсутствие неустойчивых глобальных мод с инкрементами нарастания $\omega_\mathrm{I} > 1\,\mathrm{Gyr}^{-1}$, или $T_\mathrm{e} < 1000$ млн лет. Поэтому единственный механизм, способный привести быстрому формированию облаков – это джинсовская неустойчивость холодного газового диска.

Сделаем предварительную оценку значения Q_g, при котором ожидаются инкременты нарастания порядка динамической частоты κ. Для простоты будем считать $m = 0$ и используем приближение тугой закрутки спиралей. Из уравнения (A2) находим, что потеря устойчивости происходит при $\hat{k}_\mathrm{g} = 2/Q_\mathrm{g}^2$, что соответствует инкременту нарастания

$$\omega_\mathrm{I} = \kappa(Q_\mathrm{g}^{-2} - 1)^{1/2} \ , \tag{3.16}$$

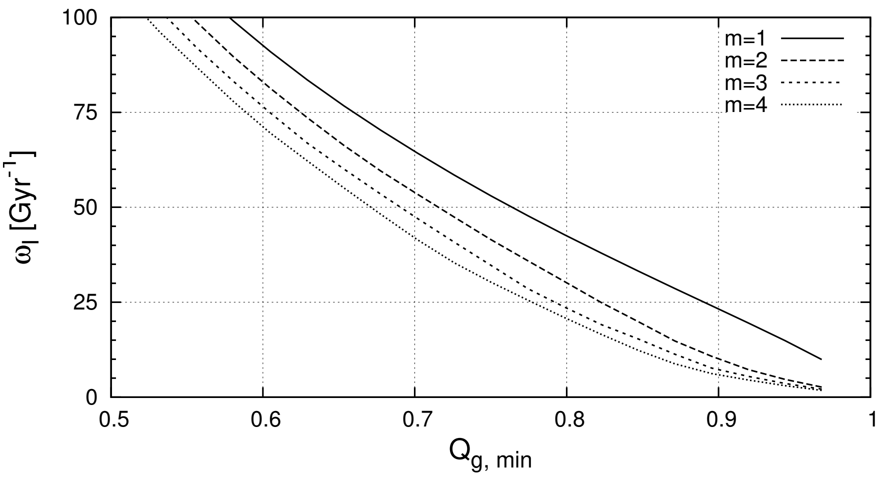

Рис. 3.2: Изменение инкремента нарастания возмущений с количеством рукавов $m = 1...4$ в зависимости от минимально значения Q_g.

Например, для $\omega_\mathrm{I} = \kappa$ получим $Q_\mathrm{g} \approx 0.7$.

На Рис. 3.2 показаны максимальные инкременты нарастания для $m = 1...4$, возникающие при уменьшении профиля $Q_\mathrm{g}(R)$. Из графика видно, что неустойчивые решения в виде трехрукавных спиралей с $T_\mathrm{e} \approx 40$ млн лет появляются при $Q_{\mathrm{g,\,min}} \approx 0.79$, что близко к полученной выше оценке.

На Рис. 3.3 показан профиль скорости звука, соответствующий $Q_{\mathrm{g,\,min}} \approx 0.79$ в газовом диске. На радиусе 5 кпк значению $Q_\mathrm{g} \approx 1.2$ при поверхностной плотности газа $\approx 16\,\mathrm{M}_\odot/\text{пк}^2$ соответствует скорость звука $\approx 4\,$км/с. Наши вычисления показывают, что для получения неустойчивости газа с нужной скоростью нарастания возмущений для гармоник $m = 1...3$ достаточно охладить газ так, чтобы скорость звука была около ≈ 3 км/с.

3.4. Формирование многорукавной спирали

В работе [51] отмечается эффект необычайно быстрого формирования двухрукавных спиралей как реакцию на квадрупольное, ограниченное по времени возмущение звездного диска. При этом сам диск является устойчивым в привычном смысле, т.е. по отношению к развитию неустойчивых мод с любы-

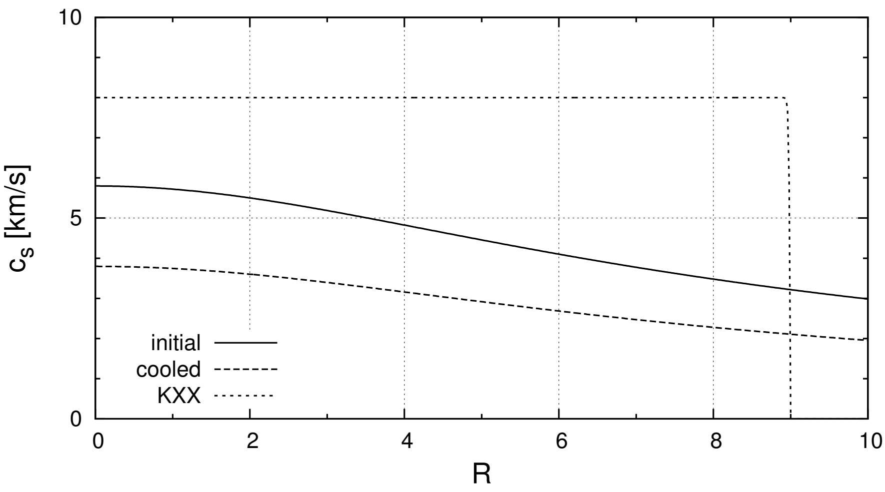

Рис. 3.3: Профили скорости звука $c_{\mathrm{s}}(R)$, принятые в нашей модели (сплошная линия), в работе КХХ в начальный момент (короткий пунктир) и отвечающая охлажденной модели с $Q_{\mathrm{g,\,min}} \approx 0.79$ (стандартный пунктир).

ми азимутальными числами m. Формирующийся спиральный узор не постоянен и может исчезнуть спустя некоторое время. Он появляется благодаря т.н. свинговому усилению, эффективность которого зависит от двух параметров $- Q$ и X, где

$$X \equiv \lambda_\theta / \lambda_{\mathrm{crit}}\ , \tag{3.17}$$

$\lambda_\theta = 2\pi/k_\theta = 2\pi R/m$, $\lambda_{\mathrm{crit}} = 4\pi^2 G\Sigma_0/\kappa^2$. Как следует из Рис. 3.4, взятого из работы Тоомре, максимальные коэффициенты усиления для $Q = 2$ приходятся на $X \approx 1.8$ (средний график JT, наиболее соответствующий отклику звездного диска на молекулярные облака), а сам эффект пропадает при $X \gtrsim 3$.

Для нашей модели зависимости параметров $X(R)$ при различных m даны на Рис. 3.5. Для $m = 2$ профиль $X(R)$ проходит выше 2, т.е. данный механизм возбуждения для двухрукавных спиралей может быть эффективен лишь в центральной области. Для $m = 3$ значение $X = 1.8$ приходится на 4.4 кпк, где должна наблюдаться трехрукавная спираль. Именно такая трехрукавная спираль и наблюдается в численном эксперименте КХХ. Также возможно

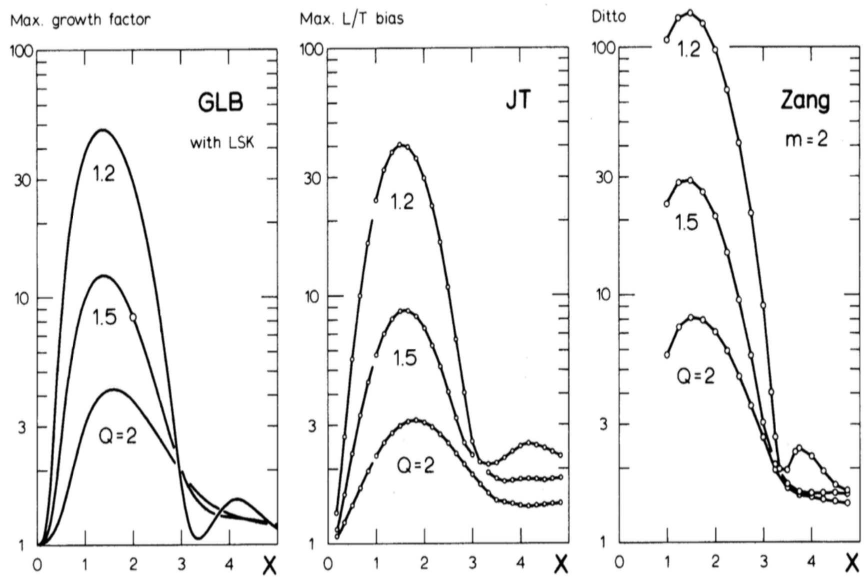

Рис. 3.4: Максимальные факторы свингового усиления в газовом диске [13], усиление при превращении максимально открытой спирали в отстающую туго закрученную [18] и усиление при превращении лидирующей туго закрученной спирали в отстающую туго закрученную спираль [51, графики взяты из работы].

формирование четырехрукавной спирали на периферии диска (при $R > 7$ кпк).

3.5. Выводы

Анализируется численный эксперимент [23], в котором было продемонстрировано появление трехрукавной спирали в тонком звездном диске при наличии газового диска. Похожие особенности спиралей отмечаются в ряде дисковых галактик. Мы показываем, что трехрукавные спирали могут быть объяснены быстрым охлаждением газовой компоненты, которое сопровождается появлением сгустков — молекулярных облаков. Последние, в свою очередь, индуцируют многорукавные спирали посредством механизма свингового усиления.

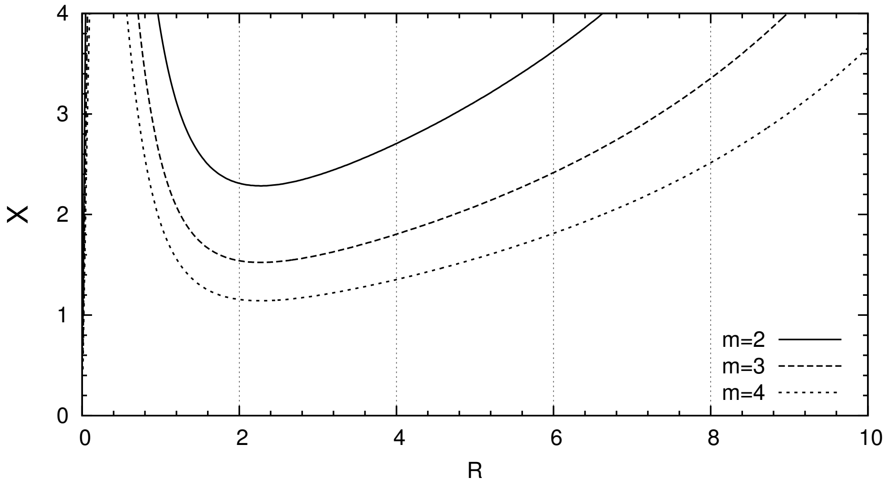

Рис. 3.5: Зависимость параметра $X(R)$ для $m = 2, 3, 4$.

Первоначальное значение скорости звука, равное 8 км/с, оказывается очень быстро равным 4 км/с для радиуса $R = 5$ кпк, как следует из приведенных в работе графиков профилей параметров устойчивости Тоомре Q и $Q_{\rm g}$. Необходимое охлаждение для запуска описанного выше сценария – 3 км/с.

В дальнейшем мы планируем подтвердить нашу гипотезу формирование многорукавных спиралей на периферии диска Галактики с помощью моделирования задачи N-тел.

ГЛАВА 4
ФОРМИРОВАНИЕ ПСЕВДОБАЛДЖА В ГАЛАКТИКАХ ТИПА «МЛЕЧНЫЙ ПУТЬ» КАК РЕЗУЛЬТАТ ДЕЙСТВИЯ ИЗГИБНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Впервые наличие бара в нашей Галактике было убедительно продемонстрировано в 1990-х годах на основе 2,4-миллиметровых наблюдений [8]. Позднее, используя данные 2MASS и OGLE-III, был обнаружен балдж X-образной формы в виде двух пиков в распределении звезд

Сейчас при описании структур в центре галактик принято различать обычный (классический) балдж и «псевдобалдж» [24]. В отличие от классического балджа, последний формируется в результате медленной (секулярной) эволюции диска. Образование псевдобалджа может происходить постепенно вместе с баром, либо быстро, когда толщина диска растет скачком. Быстрое увеличение толщины диска происходит в результате действия в нем изгибной неустойчивости. Было показано (см., например, [33] для модели Кузьмина-Тоомре), что такая неустойчивость возникает при уменьшении отношения дисперсий вертикальных и радиальных скоростей до значений порядка 0.6.

Целью данной работы является демонстрация, путем численного эксперимента, возможности как резкого, так и плавного сценария формирования псевдобалджа, причем в сходных моделях Галактики.

4.1. Модели Галактики

Для численного моделирования мы использовали трехкомпонентные модели Куйкена-Дубинского (КД) [1995], состоящие из звездного диска, классического балджа и гало. Относительно наличия в Галактике классического балджа в литературе ведется полемика. Однако модели с классическим балджем рассматриваются наравне с моделями без балджа (см., напр. [12]).

Модель	M_d	M_b	M_h	$v_\odot$	$\sigma_\odot$	R_σ	$\Sigma_\odot$	R_d	R_h	Q_min
D	54.3	11.6	1042	233	22.7	2.475	48.7	2.25	200	1.17
H	40.6	12.7	796	240	30	2.97	49.6	2.97	154	1.88

Таблица 4.1: Параметры моделей D и H. Массы диска, балджа и гало даны в млрд масс Солнца ($M_\odot$); круговая скорость вращения $v_\odot$, радиальная дисперсия $\sigma_\odot$ и поверхностная плотность $\Sigma_\odot$ диска в окрестности Солнца – в км/с и $M_\odot$/пк^2; радиальные шкалы $R_{\sigma,\mathrm{d,h}}$ – в кпк. Расстояние от центра Галактики до Солнца $R_\odot = 8$ кпк.

Диск задается функцией распределения Шварцшильда с экспоненциальной шкалой поверхностной плотности R_d и характерной полутолщиной диска $z_\mathrm{d} = 225$ пк. Радиальная дисперсия скоростей $\sigma_R^2(R) = \sigma_{R0}^2 \exp(-R/R_\sigma)$. Для гало используется функция распределения Эванса с обрезанием по энергии. Балдж описывается функцией распределения Кинга.

При подборе параметров были приблизительно фиксированы форма кривой вращения, параметры балджа и поверхностная плотность диска в солнечной окрестности. Модель D характеризуется небольшой шкалой R_d и доминированием диска над гало (Рис. 4.1 a). В модели H вклады гало и диска в круговую скорость вращения (в пределах двух радиальных шкал) примерно равны. Основные параметры моделей приведены в Табл. 4.1. Распределение вещества в балдже зависит от полного гравитационного потенциала, включающего потенциал диска и гало. Этим объясняется небольшое различие в полученных массах балджей моделей D и H.

Угловая скорость $\Omega(R)$ представлена на Рис. 4.1 b вместе с кривыми $\Omega(R) \pm \kappa/2$, определяющими положения линдбладовских резонансов; κ – эпициклическая частота. Плотности балджа и гало в модели Куйкена-Дубинского имеют конечную плотность и, соответственно, конечную скорость азимутального вращения в центре.

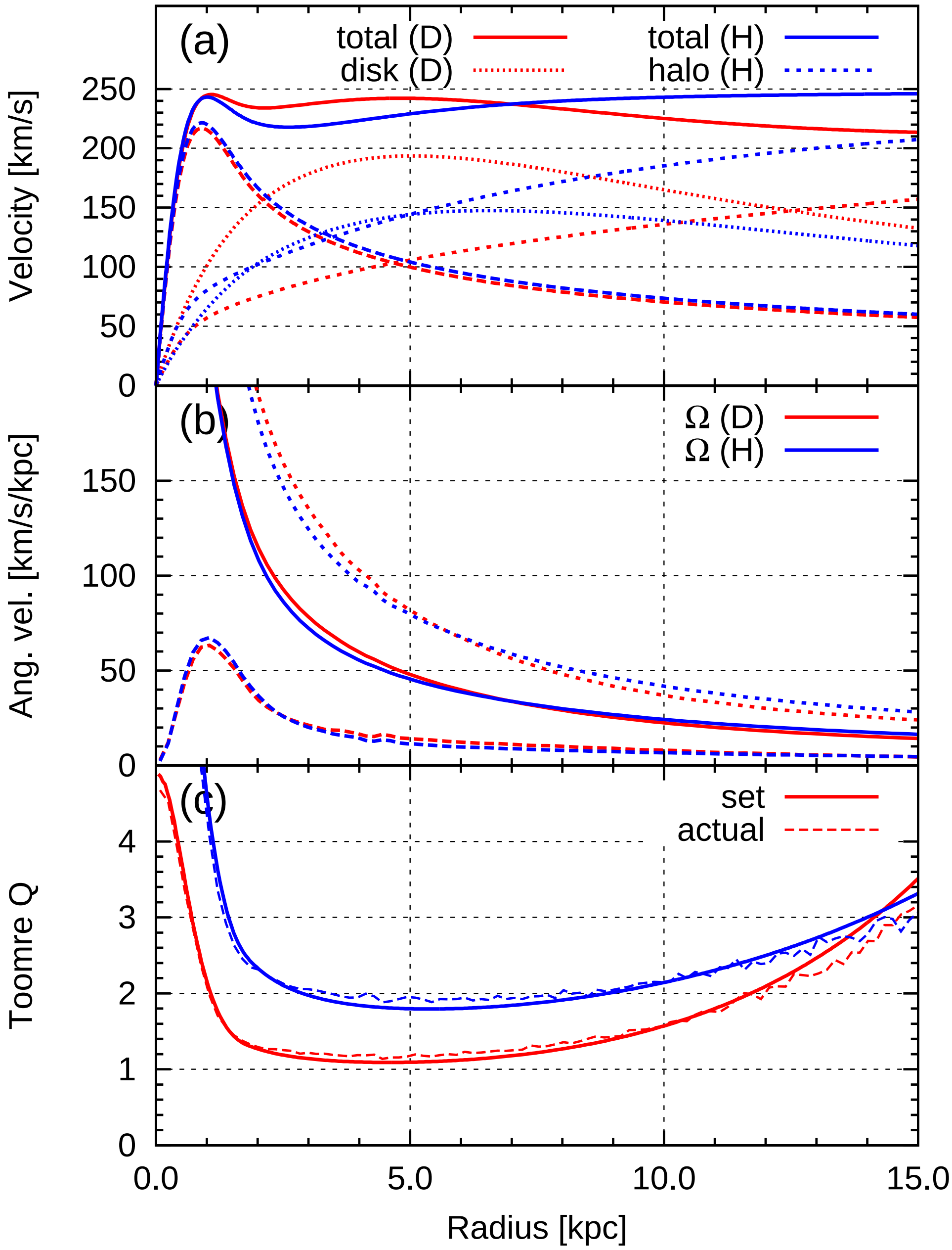

Рис. 4.1: Начальные значения модели: (a) Полная круговая скорость и вклады в нее диска, балджа и гало; (б) угловая скорость $\Omega(R)$ и кривые $\Omega(R) \pm \kappa(R)/2$; (с) Параметр Тоомре Q, задаваемый в моделях (set), и реально полученный в первоначальных распределениях (actual).

На Рис. 4.1 с показаны профили параметра Тоомре Q:

$$Q(R) = \frac{\kappa(R)\,\sigma_R(R)}{3.36\,G\,\Sigma_{\rm d}(R)}\;. \tag{4.1}$$

Их различие для моделей D и H связано с различием в радиальной дисперсии σ_R и поверхностной плотности $\Sigma_{\rm d}$. В обеих моделях имеется область $1 < Q(R) \lesssim 3$, что говорит о возможности формирования бара [44].

4.2. Численное моделирование

Начальные условия для частиц всех компонентов были получены с помощью кода «GalactICS», предоставленного КД. Численные расчеты были выполнены кодом Супербокс-10 [6], который является реализацией схемы «частицы в сетке». Балдж и гало были представлены 0.2M и 2.5M частиц, соответственно. Количество частиц диска в основных расчетах было 1.5M, однако мы провели также контрольные расчеты с меньшим количеством частиц диска (1M) и на других сетках. В целом, результаты этих расчетов согласуются с основными.

Наиболее простыми для расчета показателями наличия возмущения в виде бара являются отношения осей эллипсоида инерции I_{yy}/I_{xx} и I_{zz}/I_{xx}, где оси определяются как

$$I_{xx} = \sum_j m_j x_j^2 \ , \quad I_{yy} = \sum_j m_j y_j^2 \ , \quad I_{zz} = \sum_j m_j z_j^2 \ , \tag{4.2}$$

m_j – массы частиц диска, а индекс j пробегает частицы внутри некоторого радиуса порядка или чуть меньше размера бара (в данном случае – 2.7 кпк). На Рис. 4.2 показана «мощность» бара (bar strength), определяемая как

$$B(t) = 1 - I_{yy}/I_{xx} \ . \tag{4.3}$$

Как следует из рисунка, эволюция модели D протекает значительно быстрее, по сравнению с H. Бар уже полностью сформирован примерно к 200 млн лет. Наклон линейного участка кривой $B(t)$ для модели D показывает скорость экспоненциального роста амплитуды бара, равную 30 (млрд лет)$^{-1}$. По

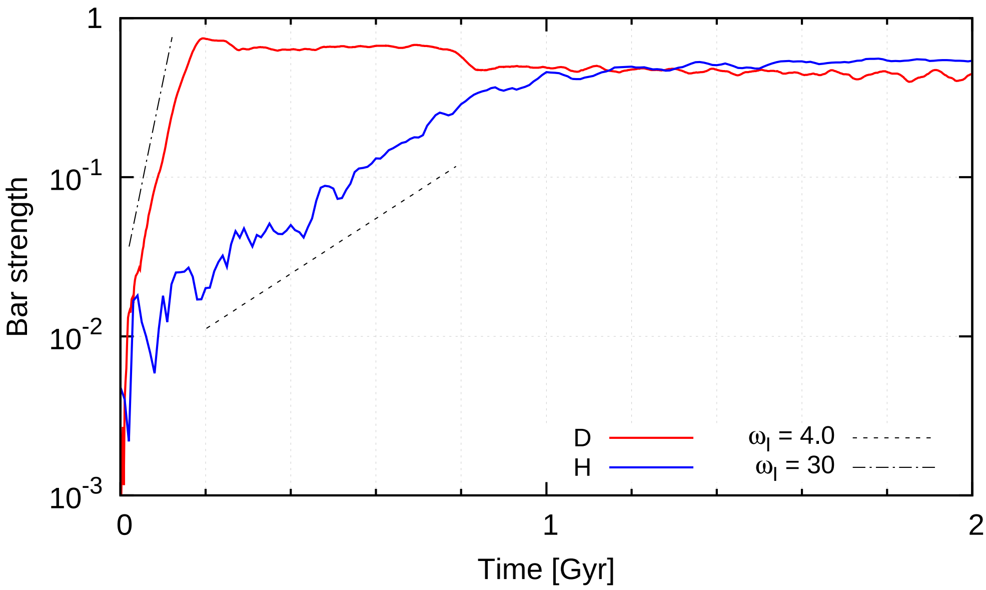

Рис. 4.2: Зависимость «мощности» бара от времени в моделях D и H.

углу поворота бара можно определить скорость его вращения Ω_p, которая оказывается зависящей от времени. Так, $\Omega_\mathrm{p} = 47$ км/с/кпк примерно постоянна в течение роста бара $T < 180$ млн лет, а затем в течение последующих 80 млн лет резко спадает до 32 км/с/кпк. Окончание замедления совпадает с моментом выхода кривой $B(t)$ на плато.

В модели H бар формируется примерно за 1 млрд лет. Инкремент нарастания бара, найденный по наклону профиля $B(t)$, равен $\omega_\mathrm{I} \approx 4$ (млрд лет)$^{-1}$. Скорость вращения бара также примерно постоянна лишь на этапе его роста ($\Omega_\mathrm{p} = 37$ км/с/кпк), затем происходит замедление.

В наших моделях, после образования бара, начинает формироваться «псевдобалдж». Для определения скорости его формирования рассмотрим зависимость отношения осей эллипсоида инерции I_{zz}/I_{xx} от времени. Из Рис. 4.3 следует, что в модели H (верхняя шкала времени) сразу после образования бара (1 млрд. лет) идет прямолинейный рост триаксиальности. В модели D до $t = 200$ млн лет наблюдается падение триаксиальности, а после формирования бара происходит линейный рост, но с меньшим (по сравнению

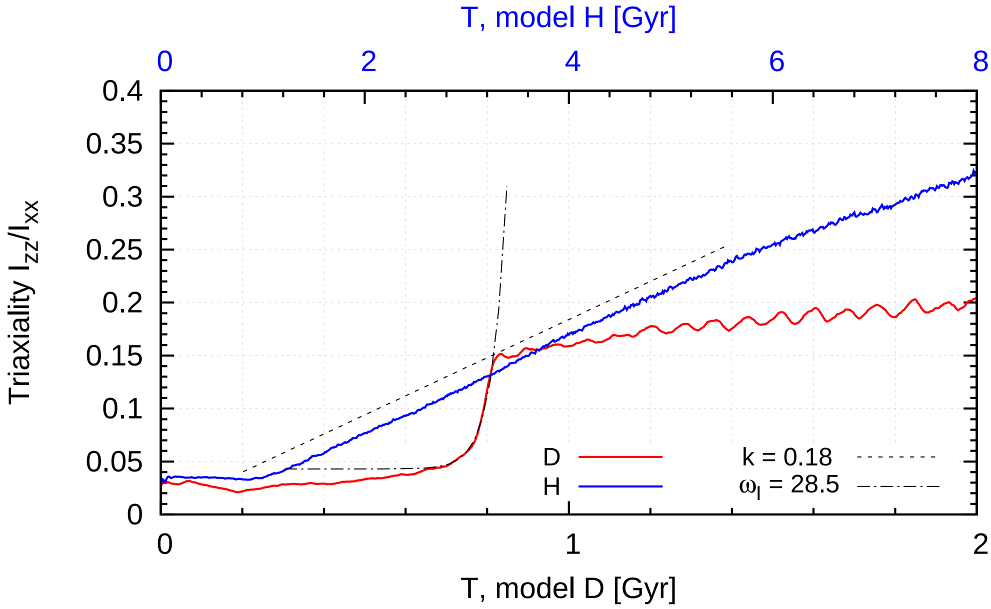

Рис. 4.3: Зависимость триаксиальности от времени в моделях D (нижняя ось времени) и H (верхняя ось времени).

с моделью H) наклоном. Начиная с момента $t \approx 650$ млн лет благодаря изгибной неустойчивости происходит экспоненциальный рост триаксиальности с инкрементом нарастания 28.5 (млрд лет)$^{-1}$. После окончания фазы неустойчивости продолжается медленный рост с таким же наклоном, как и до наступления фазы быстрого роста.

На Рис. 4.4 показано изменение величины σ_z/σ_R во времени. Образование бара вызывает рост σ_R, в результате чего отношение дисперсий скоростей уменьшается. После образования бара в модели D отношение σ_z/σ_R становится ниже критического и достаточным для возникновения изгибной неустойчивости. Этот процесс сопровождается резким увеличением дисперсии скоростей σ_z и соответственно увеличением отношения σ_z/σ_R. После фазы изгибной неустойчивости отношение дисперсий скоростей выравнивается и остается приблизительно постоянным на уровне выше критического. Для модели H, после образования бара отношения σ_z/σ_R уменьшается до значения близкого к 0.6, но не переходит критического значения.

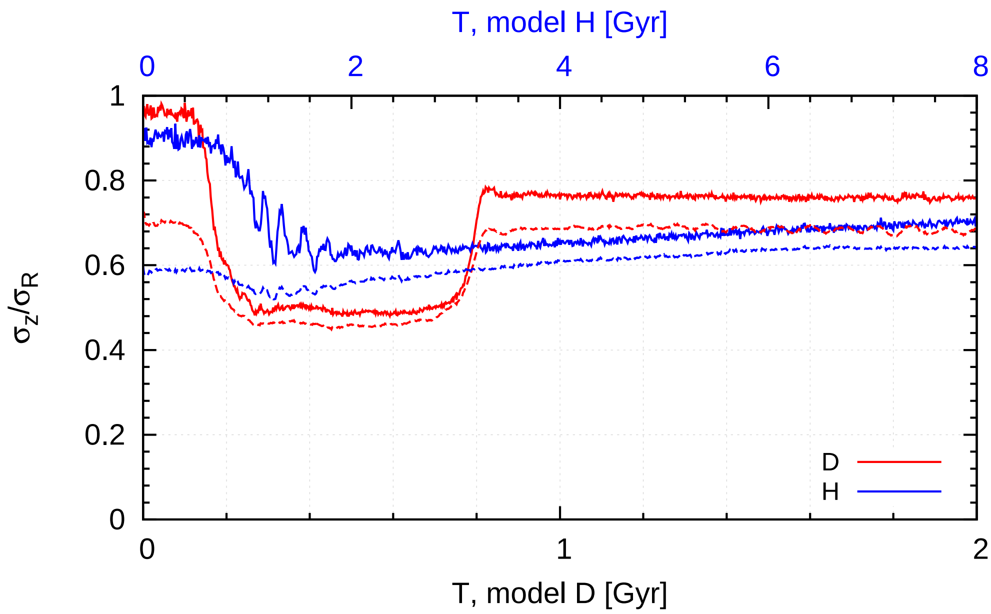

Рис. 4.4: Отношения вертикальной и радиальной дисперсий скоростей для моделей D (красные линии, нижняя ось времени) и H (синие линии, верхняя ось времени). Сплошными линиями показаны отношения для центральной части (менее 500 пк), пунктирами – усредненные в области $R < 4$ кпк.

4.3. Выводы

На примере двух схожих моделей Галактики с фиксированными кривой вращения, массой балджа и наблюдаемой поверхностной плотностью диска в солнечной окрестности были рассмотрены два возможных сценария образования псевдобалджа. В обеих моделях сначала формируется бар, но затем в одной из них (более холодной и более неустойчивой) наступает фаза вторичной неустойчивости, уже поперек диска. Динамически более горячая модель характеризуется более спокойной эволюцией. Там вторичной неустойчивости не наступает. Критически важным для вторичной (изгибной) неустойчивости оказывается отношение вертикальной и радиальной дисперсий скоростей, которое уменьшается при образовании бара и может достигнуть критического значения, при котором наступает неустойчивость. Ее значение для модели D оказываются примерно равными 0.5, что близко к аналогичным значениям для других дисковых моделей [24].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении перечислим основные результаты, представленные в данной работе.

1. Показано, что трехрукавные спирали образуются в следствии быстрого охлаждения газовой компоненты. Такое охлаждение сопровождается образованием молекулярных облаков. Последние, в свою очередь, индуцируют многорукавные спирали посредством механизма свингового усиления.
2. Мы получили, что в газовом диске существуют неустойчивые двухрукавные моды несмотря на наличие в модели ILR. Это существенно отличается от звездного диска, где такие моды появляются только при введении Q-барьера. Наличие барьера для газового диска не обязательно так, как волна не взаимодействует с линдбладовскими резонансами.
3. Рассмотрели роль Q-барьера в газовом диске. Согласно [5], в газовой среде волна также должна отражаться от барьера. Однако в своих вычислениях мы обнаружили, что положение неустойчивых мод зависит от положения внутренней границы расчетной области. Этого не должно происходить, если граница находится глубоко внутри запрещенной области.
4. Показали, что явление изгибной неустойчивости характерно для более холодной среды в следствии быстрого развития бара, в то время как динамически более горячая среда характеризуется более спокойной эволюцией.
5. Критически важным для вторичной (изгибной) неустойчивости оказывается отношение вертикальной и радиальной дисперсий скоростей, которое уменьшается при образовании бара и может достигнуть критиче-

ского значения, при котором наступает неустойчивость. В нашей работе было показано, при достижении критерия системе нужно некоторое время, прежде чем наступит изгибная неустойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Suguru Araki. The Two-Stream Instability in Infinite Homogeneous and Uniformly Rotating Stellar Systems. *AJ*, 94:99, July 1987. doi: 10.1086/114451.
2. G. Bertin. Dynamical mechanisms for discrete unstable spiral modes in galaxies. In E. Athanassoula, editor, *Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies*, volume 100 of *IAU Symposium*, page 119, January 1983.
3. G. Bertin, C. C. Lin, S. A. Lowe, and R. P. Thurstans. Modal Approach to the Morphology of Spiral Galaxies. I. Basic Structure and Astrophysical Viability. *ApJ*, 338:78, March 1989. doi: 10.1086/167182.
4. G. Bertin, C. C. Lin, S. A. Lowe, and R. P. Thurstans. Modal Approach to the Morphology of Spiral Galaxies. II. Dynamical Mechanisms. *ApJ*, 338:104, March 1989. doi: 10.1086/167183.
5. Giuseppe Bertin. *Dynamics of Galaxies*. 2014.
6. R. Bien, T. Brandt, and A. Just. Simulating sinking satellites with SUPERBOX-10. *MNRAS*, 428:1631–1642, 2013.
7. J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press, 2008.
8. Leo Blitz and David N. Spergel. Direct Evidence for a Bar at the Galactic Center. *ApJ*, 379:631, October 1991. doi: 10.1086/170535.
9. M. Clutton-Brock. The Gravitational Field of Flat Galaxies. *Ap&SS*, 16(1):101–119, April 1972. doi: 10.1007/BF00643095.
10. S. De Rijcke and I. Voulis. Spiral eigenmodes triggered by grooves in the phase space of disc galaxies. *MNRAS*, 456(2):2024–2040, February 2016. doi: 10.1093/mnras/stv2764.
11. A. M. Fridman and O. V. Khoruzhii. Progress in the Study of Galaxies: Structures, Collective Phenomena and Methods. *Space Sci. Rev.*, 105(1):1–284, January 2003. doi: 10.1023/A:1023944520465.
12. M. S. Fujii, J. Bédorf, J. Baba, and S. Portegies Zwart. Modelling the Milky Way as a dry Galaxy. *MNRAS*, 482(2):1983–2015, Jan 2019. doi: 10.1093/mnras/sty2747.
13. P. Goldreich and D. Lynden-Bell. II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities. *MNRAS*, 130:125, January 1965. doi: 10.1093/mnras/130.2.125.
14. M. A. Jalali. Unstable Disk Galaxies. I. Modal Properties. *ApJ*, 669:218–231, November 2007. doi: 10.1086/521523.
15. M. A. Jalali. Finite element modelling of perturbed stellar systems. *MNRAS*, 404:1519–1528, May 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16365.x.
16. Mir Abbas Jalali and C. Hunter. Unstable Bar and Spiral Modes of Disk Galaxies. *ApJ*, 630(2):804–823, September 2005. doi: 10.1086/432370.
17. J. H. Jeans. The Stability of a Spherical Nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 199:1–53, January 1902. doi: 10.1098/rsta.1902.0012.
18. William H. Julian and Alar Toomre. Non-Axisymmetric Responses of Differentially Rotating Disks of Stars. *ApJ*, 146:810, December 1966. doi: 10.1086/148957.
19. A. J. Kalnajs. *The Stability of Highly Flattened Galaxies*. PhD thesis, HARVARD UNIVERSITY., 1965.

20. A. J. Kalnajs. Dynamics of Flat Galaxies. I. *ApJ*, 166:275, June 1971. doi: 10.1086/150957.
21. A. J. Kalnajs. Dynamics of flat galaxies. IV - The integral equation for normal modes in matrix form. *ApJ*, 212:637–644, March 1977. doi: 10.1086/155086.
22. Agris J. Kalnajs. Dynamics of Flat Galaxies. II. Biorthonormal Surface Density-Potential Pairs for Finite Disks. *ApJ*, 205:745–750, May 1976. doi: 10.1086/154330.
23. V. I. Korchagin, S. A. Khoperskov, and A. V. Khoperskov. Role of gaseous disk in the formation of the spiral structure of the Milky Way galaxy. *Baltic Astronomy*, 25:356–361, January 2016. doi: 10.1515/astro-2017-0253.
24. John Kormendy and Luis C. Ho. Coevolution (Or Not) of Supermassive Black Holes and Host Galaxies. *ARA&A*, 51(1):511–653, Aug 2013. doi: 10.1146/annurev-astro-082708-101811.
25. K. Kuijken and J. Dubinski. Nearly Self-Consistent Disc / Bulge / Halo Models for Galaxies. *MNRAS*, 277:1341, December 1995. doi: 10.1093/mnras/277.4.1341.
26. R. M. Kulsrud, James W. K. Mark, and A. Caruso. The Hose-Pipe Instability in Stellar Systems (Papers appear in the Proceedings of IAU Colloquium No. 10 Gravitational N-Body Problem (ed. by Myron Lecar), R. Reidel Publ. Co. , Dordrecht-Holland.). *Ap&SS*, 14(1):52–55, November 1971. doi: 10.1007/BF00649194.
27. C. C. Lin and Y. Y. Lau. Density wave theory of spiral structure of galaxies. *Studies in Applied Mathematics*, 60:97–163, Apr 1979.
28. C. C. Lin and Frank H. Shu. On the Spiral Structure of Disk Galaxies. *ApJ*, 140:646, August 1964. doi: 10.1086/147955.
29. C. C. Lin and Frank H. Shu. On the Spiral Structure of Disk Galaxies, II. Outline of a Theory of Density Waves. *Proceedings of the National Academy of Science*, 55(2):229–234, February 1966. doi: 10.1073/pnas.55.2.229.
30. V. V. Lyakhovich, A. M. Fridman, and O. V. Khoruzhii. . In A. G. Masevich, editor, *Unstable Processes in Universe*, page 194, 1994.
31. J. W. K. Mark. The Spiral Wave of Our Galaxy Near Inner Lindblad Resonance. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 3, page 370, Jun 1971.
32. J. W.-K. Mark. On density waves in galaxies. I - Source terms and action conservation. *ApJ*, 193:539–559, November 1974. doi: 10.1086/153192.
33. David Merritt and J. A. Sellwood. Bending Instabilities in Stellar Systems. *ApJ*, 425:551, April 1994. doi: 10.1086/174005.
34. L. Mestel. On the galactic law of rotation. *MNRAS*, 126:553, January 1963. doi: 10.1093/mnras/126.6.553.
35. R. F. Pannatoni. . *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 24:165, October 1996.
36. V. L. Poliachenko and I. G. Shukhman. Evaluation of the maximum anisotropy of the stellar velocity distribution in galaxies. *Soviet Astronomy Letters*, 3:134–136, June 1977.
37. E. V. Polyachenko. Outline of the unified theory of spiral and bar-like structures in galaxies. *MNRAS*, 348:345–354, February 2004. doi: 10.1111/j.1365-2966.2004.07390.x.
38. E. V. Polyachenko. The eigenvalue problem for integrable gravitating systems with application to galactic discs. *MNRAS*, 357:559–564, February 2005. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.08660.x.

39. E. V. Polyachenko. Swing amplification and global modes reciprocity in models with cusps. *Baltic Astronomy*, 25:288–295, January 2016. doi: 10.1515/astro-2017-0132.
40. E. V. Polyachenko. The linear eigenvalue problem for barotropic selfgravitating discs. *ArXiv e-prints*, December 2017.
41. E. V. Polyachenko. Instability of the cored barotropic disc: the linear eigenvalue formulation. *MNRAS*, 478(3):4268–4275, Aug 2018. doi: 10.1093/mnras/sty1402.
42. E. V. Polyachenko, P. Berczik, and A. Just. On the bar formation mechanism in galaxies with cuspy bulges. *MNRAS*, 462:3727–3738, November 2016. doi: 10.1093/mnras/stw1907.
43. V. L. Polyachenko and A. M. Fridman. *Equilibrium and stability of gravitating systems.* 1976.
44. V. L. Polyachenko, E. V. Polyachenko, and A. V. Strel'Nikov. Stability criteria for gaseous self-gravitating disks. *Astronomy Letters*, 23(4):483–491, Jul 1997.
45. V. L. Polyachenko, E. V. Polyachenko, and A. V. Strel'Nikov. Instabilities of stellar disks. *Astronomy Letters*, 23(4):525–531, Jul 1997.
46. E. Qian. Potential-density pairs for flat discs. *MNRAS*, 257(4):581–592, August 1992. doi: 10.1093/mnras/257.4.581.
47. Edward E. Qian. Biorthogonal Potential Density Sets for Flat Discs. *MNRAS*, 263:394, July 1993. doi: 10.1093/mnras/263.2.394.
48. V. S. Safronov. Gravitational Instability in Flat Rotating Systems with Axial Symmetry. *Soviet Physics Doklady*, 5:13, July 1960.
49. A. Toomre. On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ*, 139:1217–1238, May 1964. doi: 10.1086/147861.
50. A. Toomre. Theories of spiral structure. *ARA&A*, 15:437–478, 1977. doi: 10.1146/annurev.aa.15.090177.002253.
51. A. Toomre. What amplifies the spirals. In S. M. Fall and D. Lynden-Bell, editors, *Structure and Evolution of Normal Galaxies*, pages 111–136, 1981.
52. Lawrence M. Widrow, Brent Pym, and John Dubinski. Dynamical Blueprints for Galaxies. *ApJ*, 679(2):1239–1259, June 2008. doi: 10.1086/587636.
53. T. A. Zang. *The Stability of a Model Galaxy.* PhD thesis, -, Jan 1976.