



Численные модели движения искусственных спутников Земли и Луны и возможности их использования

Попандопуло Никита Андреевич,
Александрова Анна Геннадьевна,
Бордовицына Татьяна Валентиновна.

Введение

- **Цель доклада** — познакомить слушателей с современным состоянием исследований, проводимых в Томском университете, по созданию и усовершенствованию численных моделей движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) и Луны (ИСЛ).
- Описание последних версий алгоритмов и программ, предназначенных для исследования движения ИСЗ, дано в (Александрова, Бордовицына, Чувашов, 2017)*.
- Численная модель движения ИСЛ представляется впервые.
- Планируется, что обе программы будут вычислять скорости изменения долготы восходящего узла и долготы перицентра от узла по точным формулам.

* Александрова А. Г., Бордовицына Т. В., Чувашов И. Н. Численное моделирование в задачах динамики околоземных объектов // Известия высших учебных заведений. Физика. 2017. Т. 60. № 1. С. 69-76. 2

Структура моделей движения

- Уравнения движения записаны в прямоугольной инерциальной системе координат, связанной с центральным телом.
- Основная координатная плоскость — экваториальная плоскость Земли.
- Влияние гравитационных потенциалов планет моделируется в системах координат, жестко связанных с центральным телом.
- В каждой из программ используются соответствующие матрицы преобразования координат.

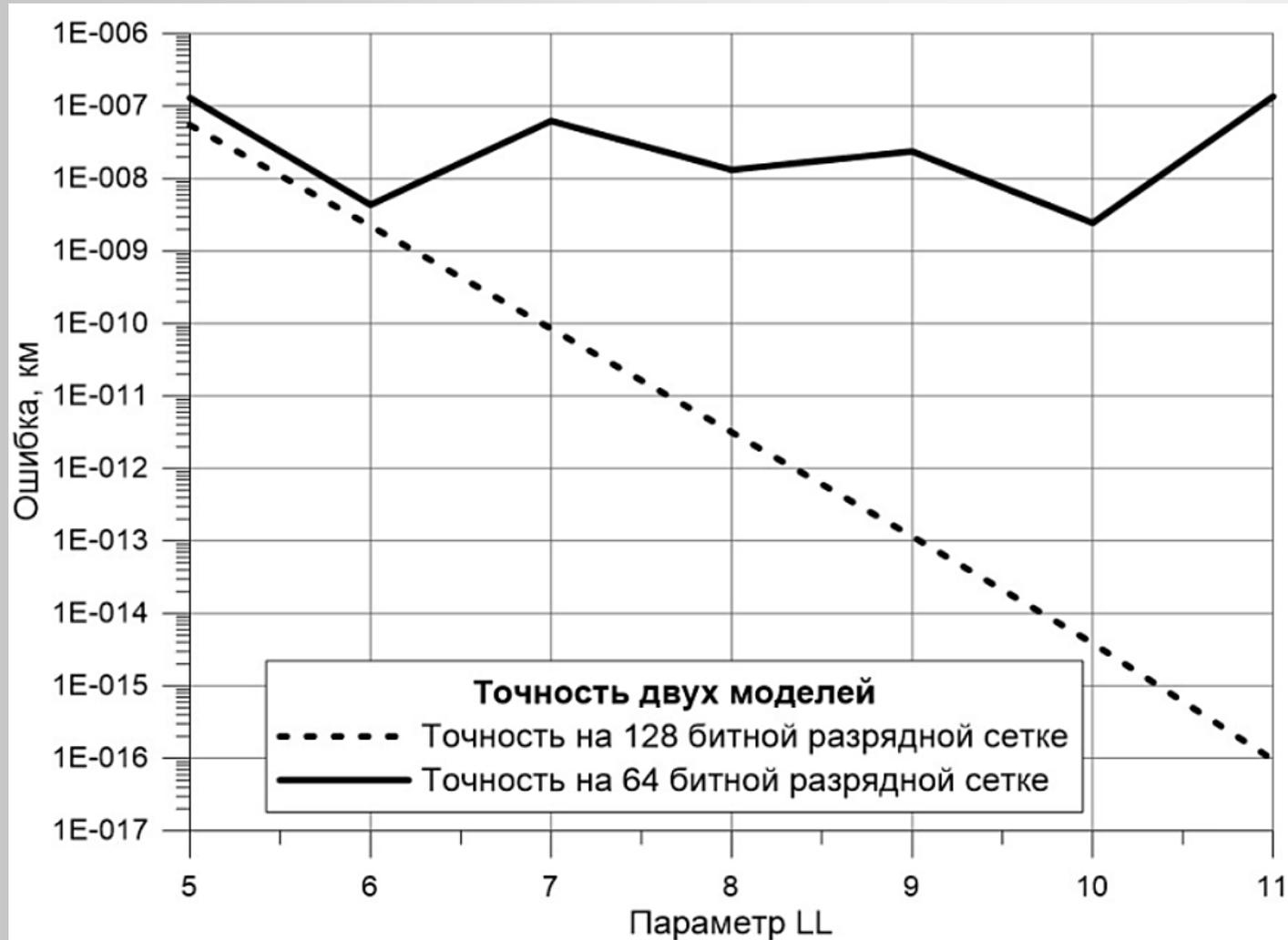
Математические модели сил

Тип возмущения	Модель движения ИСЗ*	Модель движения ИСЛ
Основной потенциал планеты	Модель геопотенциала EGM 2008	Модель селенопотенциала LP150Q
Дополнительные возмущения от потенциала планеты	Вековые изменения первых зональных гармоник; возмущения от приливных деформаций центрального тела; и др.	–
Влияние внешних тел (точечная модель)	Фонд координат больших планет DE421	Фонд координат больших планет DE406
Влияние гармоник потенциала внешнего тела	Модель селенопотенциала LP150Q	–
Световое давление	Конусная модель светового давления с тенью и полутенью; учет искажения диска Солнца и сжатия Земли в атмосфере; и др.	–
Релятивистские эффекты	Шварцшильдовские возмущения; эффекты Лензе-Тирринговой прецессии; и др.	–
Сопротивление атмосферы	Модель атмосферы NRLM SISE-00	–

* Александрова А. Г., Бордовицына Т. В., Чувашов И. Н. Численное моделирование в задачах динамики околоземных объектов // Известия высших учебных заведений. Физика. 2017. Т. 60. № 1. С. 69-76.

Оценка точности.

Численная модель движения систем ИСЗ



Выбор шага:

$$h_{n+1} = h_n \left(\frac{\|\mathbf{e}\|_{tol}}{\|\mathbf{e}\|_{cal}} \right)^{\frac{1}{p+1}} ;$$

\mathbf{e}_{tol} — допустимая точность;

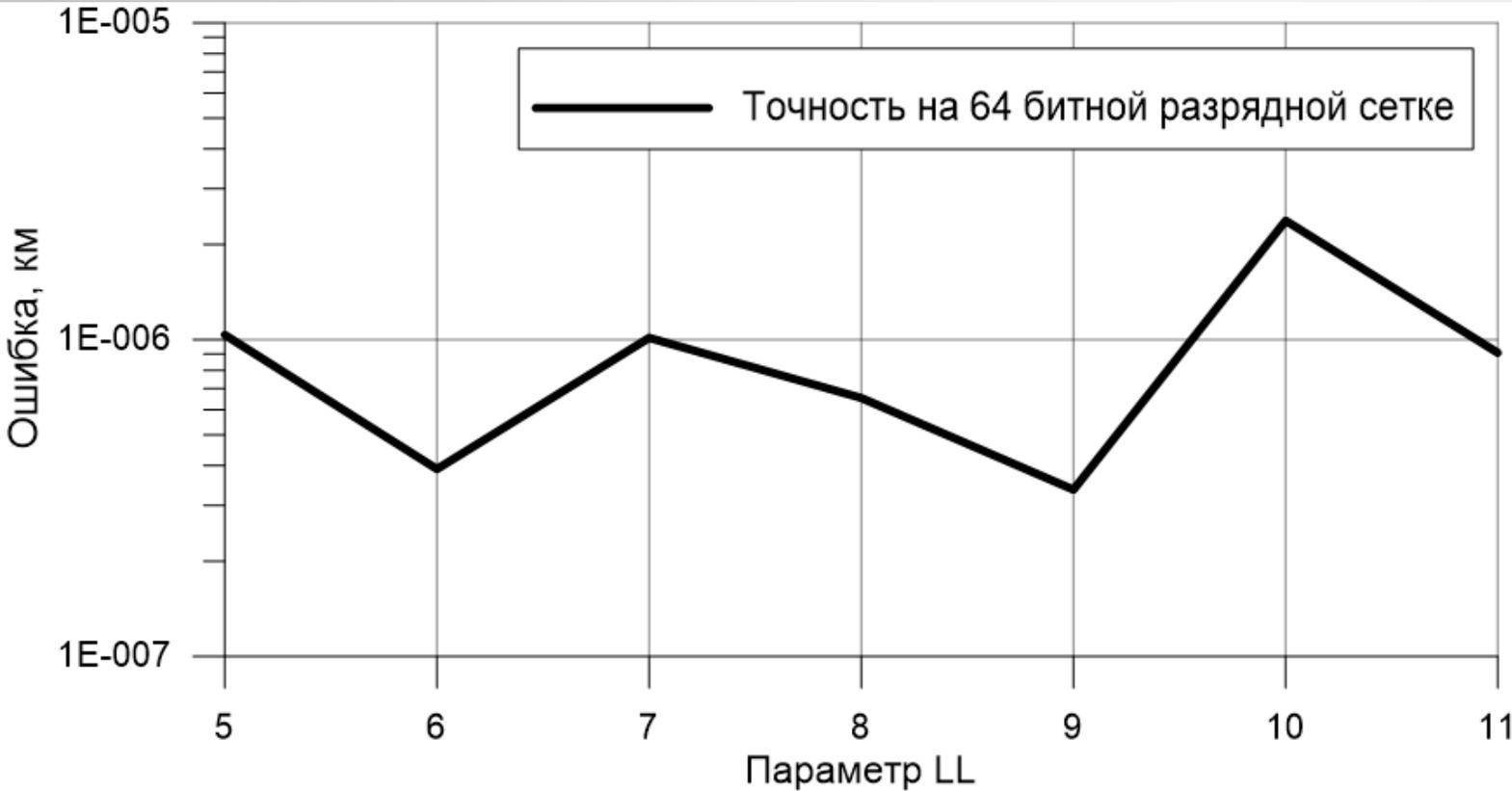
\mathbf{e}_{cal} — локальная точность;

p — порядок метода;

$\mathbf{e}_{tol} = 10^{-LL}$ км.

Оценка точности.

Численная модель движения ИСЛ



Выбор шага:

$$h_{n+1} = h_n \left(\frac{\|\mathbf{e}\|_{tol}}{\|\mathbf{e}\|_{cal}} \right)^{\frac{1}{p+1}} ;$$

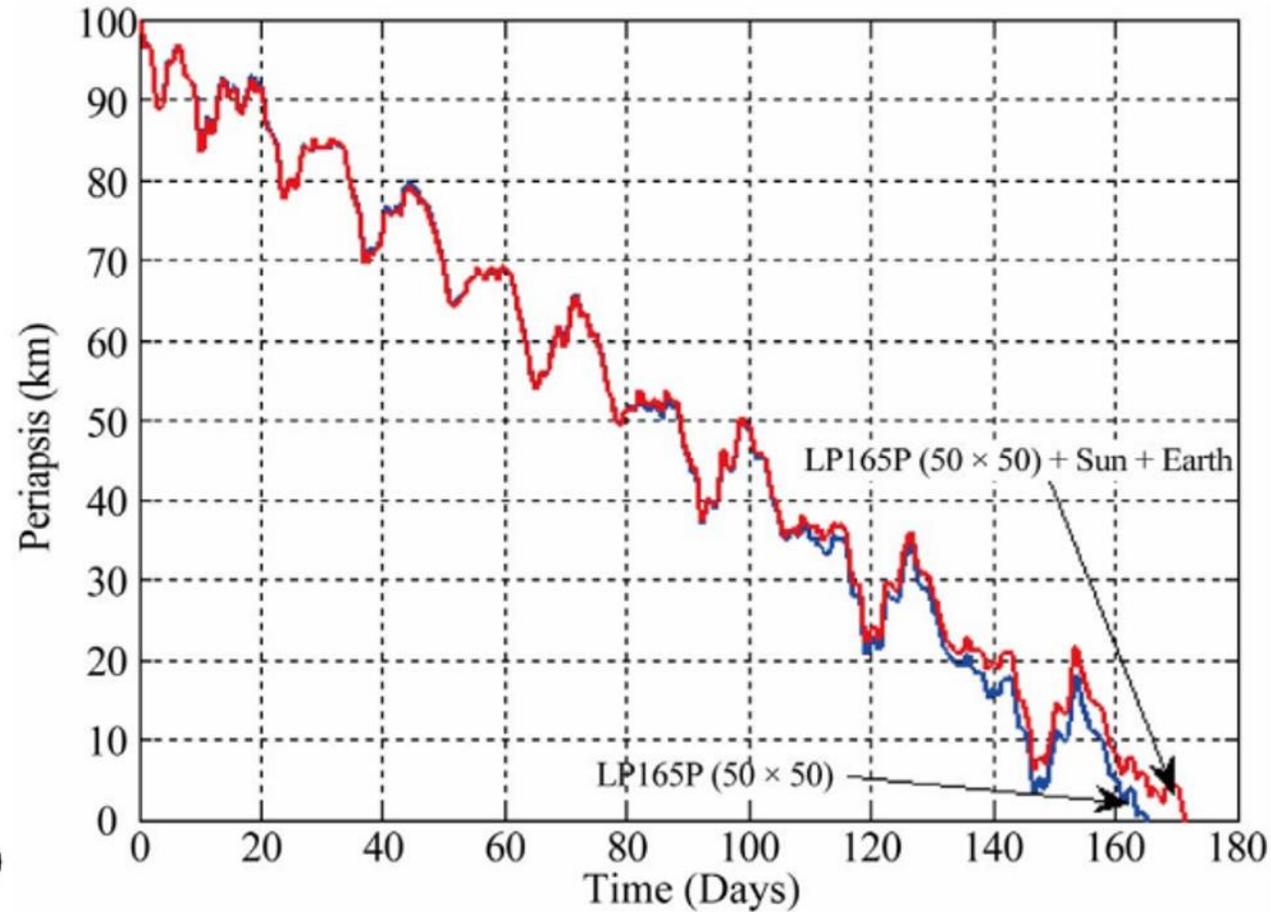
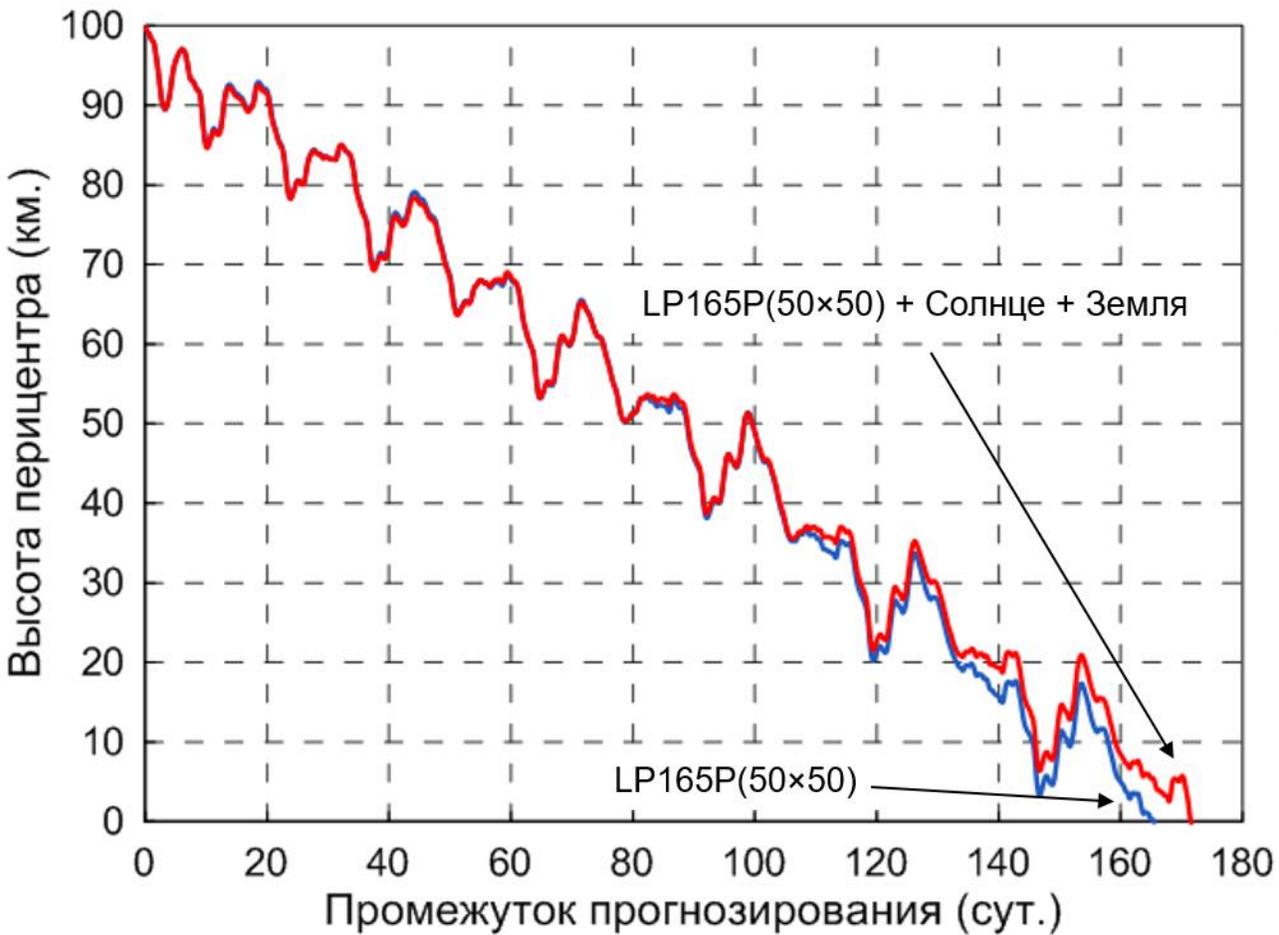
\mathbf{e}_{tol} — ДОПУСТИМАЯ
ТОЧНОСТЬ;

\mathbf{e}_{cal} — ЛОКАЛЬНАЯ
ТОЧНОСТЬ;

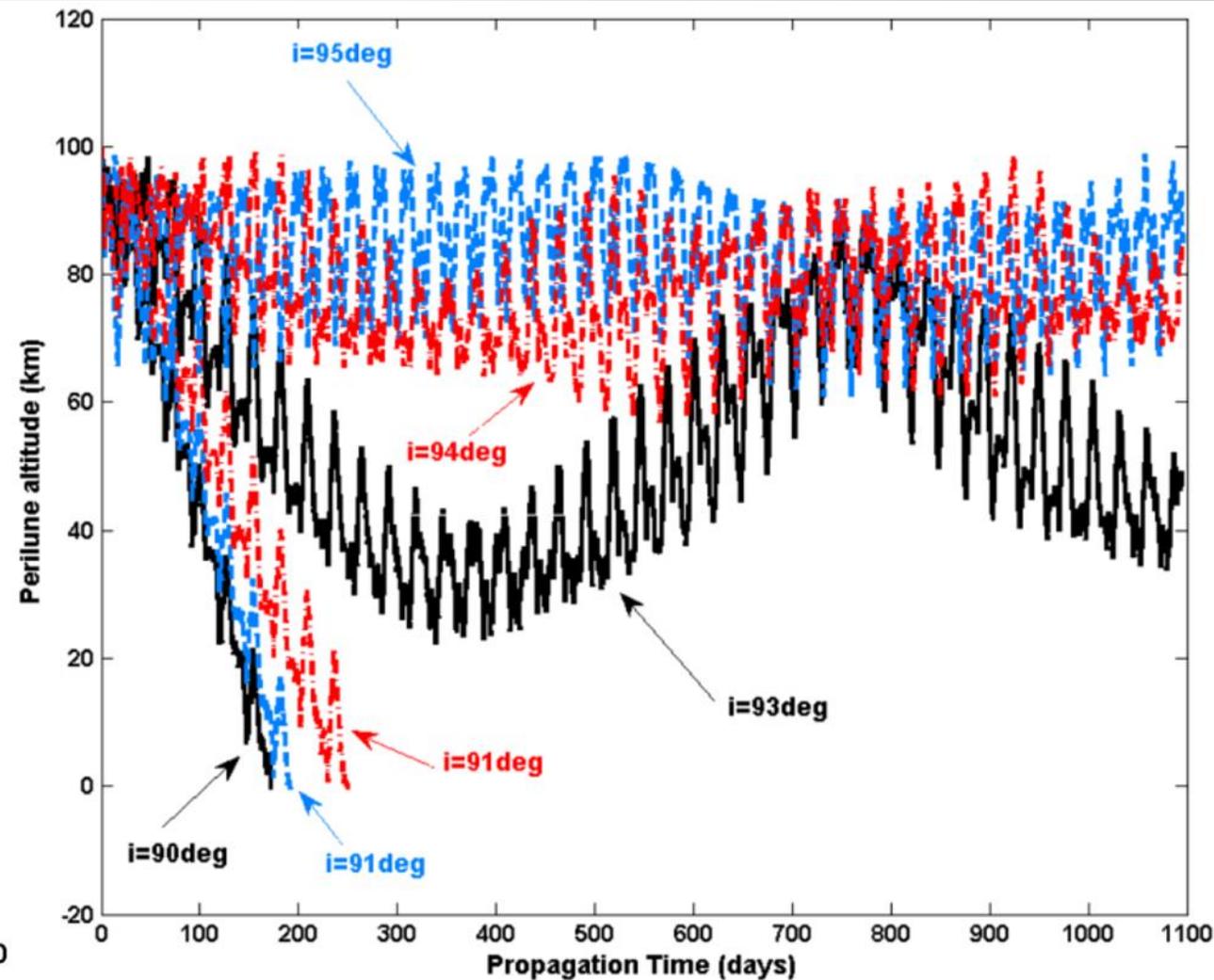
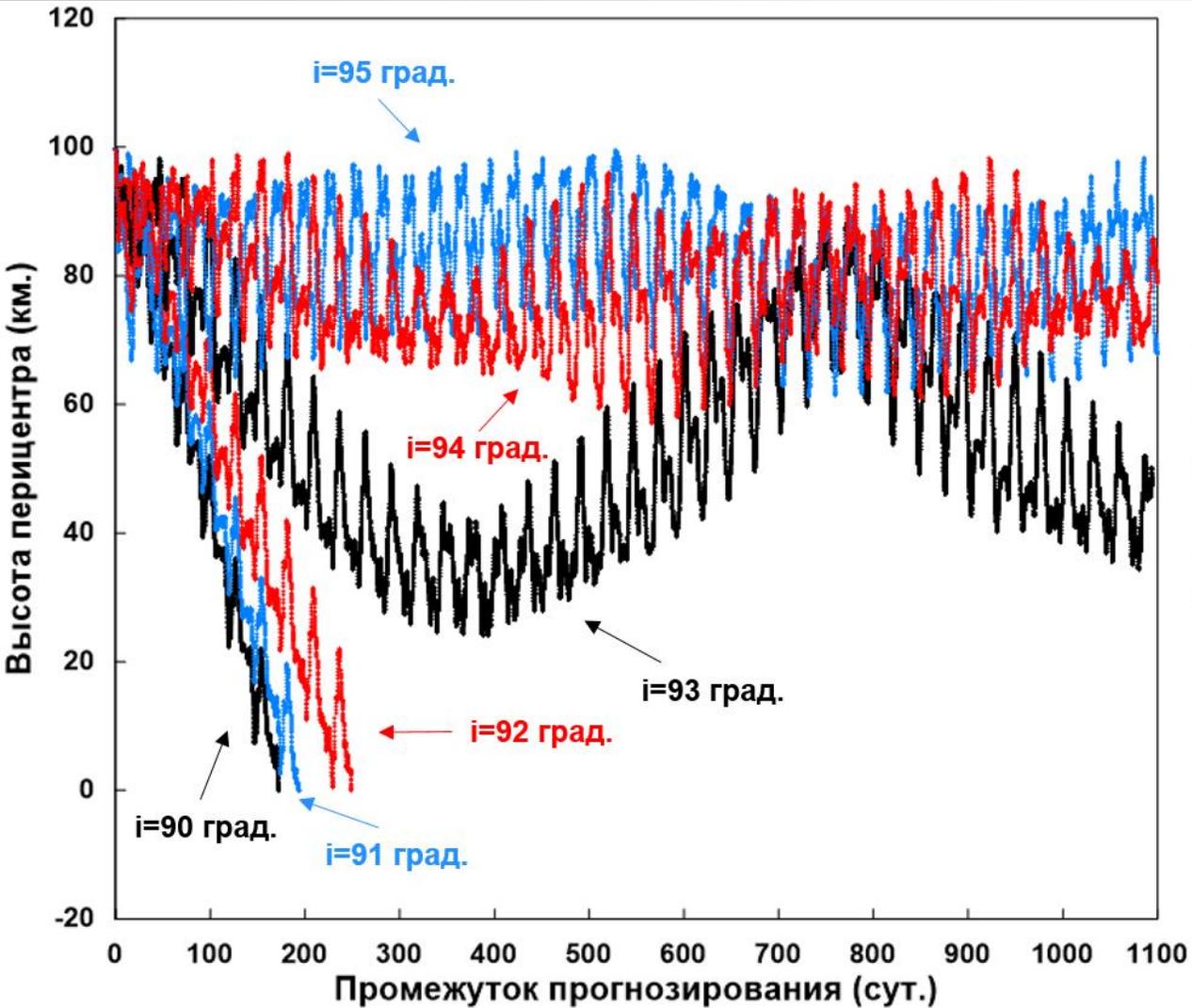
p — порядок метода;

$\mathbf{e}_{tol} = 10^{-LL}$ км.

Численная модель движения ИСЛ. Сравнение с результатами других авторов



Численная модель движения ИСЛ. Сравнение с результатами других авторов



Методика выявления вековых резонансов. Необходимость уточнения

Аргументы возмущающих функций для
однократно и двукратно осредненной задачи:

$$\underline{\underline{\psi}} = (l - 2p' + q')M' - (l - 2p)\omega + (l - 2p')\omega' - \bar{m}(\Omega - \Omega'),$$

$$\underline{\underline{\psi}} = (l - 2p')\omega' - (l - 2p)\omega - \bar{m}(\Omega - \Omega').$$

Условие возникновения
резонанса:

$$\underline{\underline{\psi}} \approx 0, \quad \underline{\underline{\psi}} \approx 0.$$

Аналитические формулы вычисления вековых частот:

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_J + \dot{\Omega}'_1 + \dot{\Omega}'_2, \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_J + \dot{\omega}'_1 + \dot{\omega}'_2,$$

$$\dot{\Omega}_J = -\frac{3}{2} J_2 n \left(\frac{R_L}{a} \right)^2 \cos i (1 - e^2)^{-2},$$

$$\dot{\Omega}'_{1,2} = -\frac{3}{16} n \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \frac{2 + 3e^2}{\sqrt{1 - e^2}} (2 - 3 \sin^2 i') \cos i,$$

$$\dot{\omega}_J = \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{R_L}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^2},$$

$$\dot{\omega}'_{1,2} = \frac{3}{16} n \frac{\mu'}{\mu} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \frac{4 - 5 \sin^2 i + e^2}{\sqrt{1 - e^2}} (2 - 3 \sin^2 i').$$

Точное вычисление вековых частот

Вековые частоты спутника

Уравнения Эйлера-Ньютона:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{p \sin i} W; \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos v}{e} S + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T - \frac{r \sin u}{p \operatorname{tgi}} W; \quad \dots$$

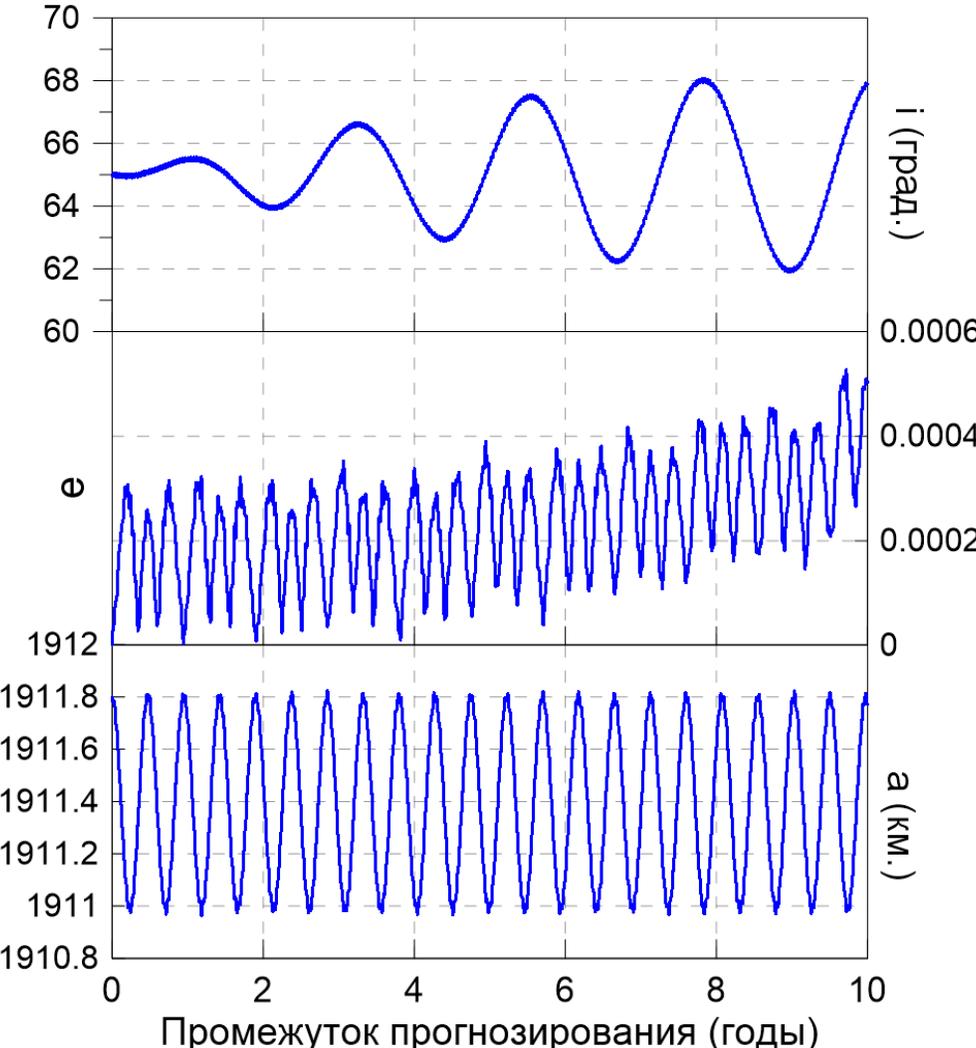
Вековые частоты возмущающих тел

Производная интерполяционного полинома Лагранжа 12-ой степени:

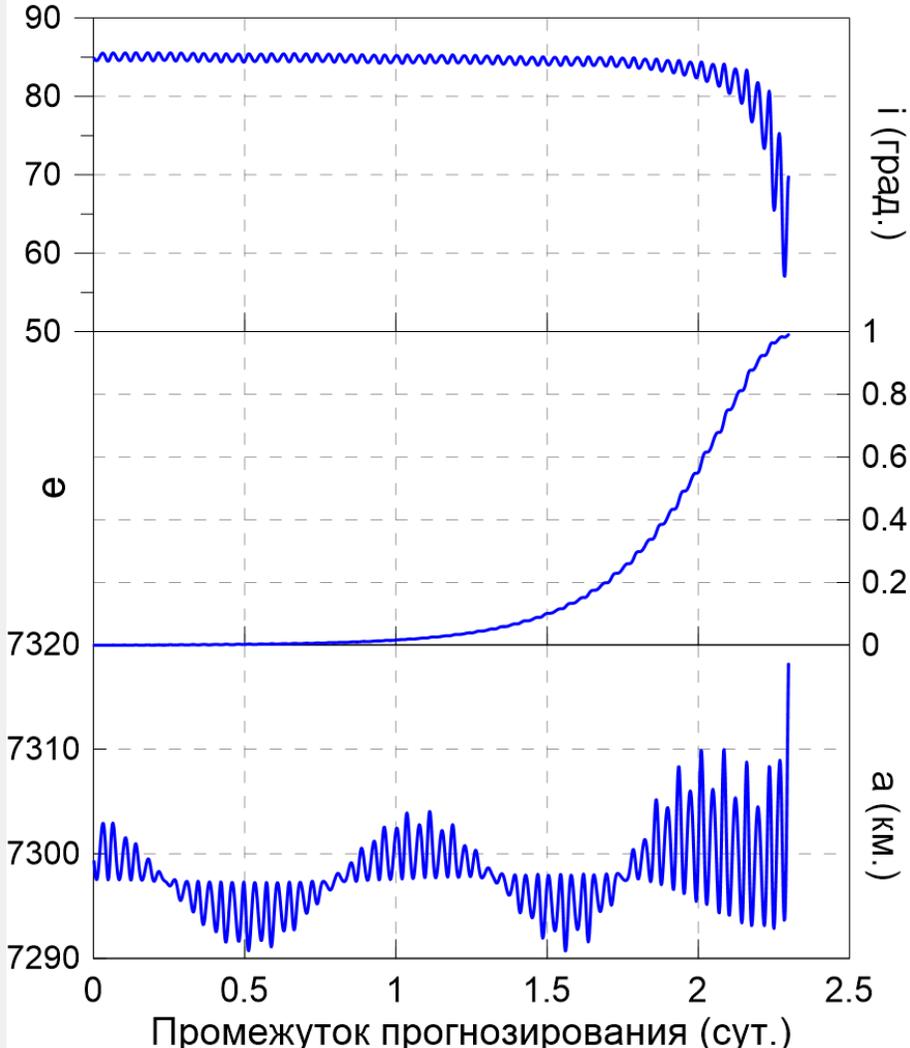
$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^n x_i \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \frac{1}{t_i - t_j} \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i, k \neq j}}^n (t - t_k).$$

Численная модель движения ИСЛ. Примеры сопоставления методик

1. Объект со слабым ростом эксцентриситета



2. Объект со значительным ростом эксцентриситета

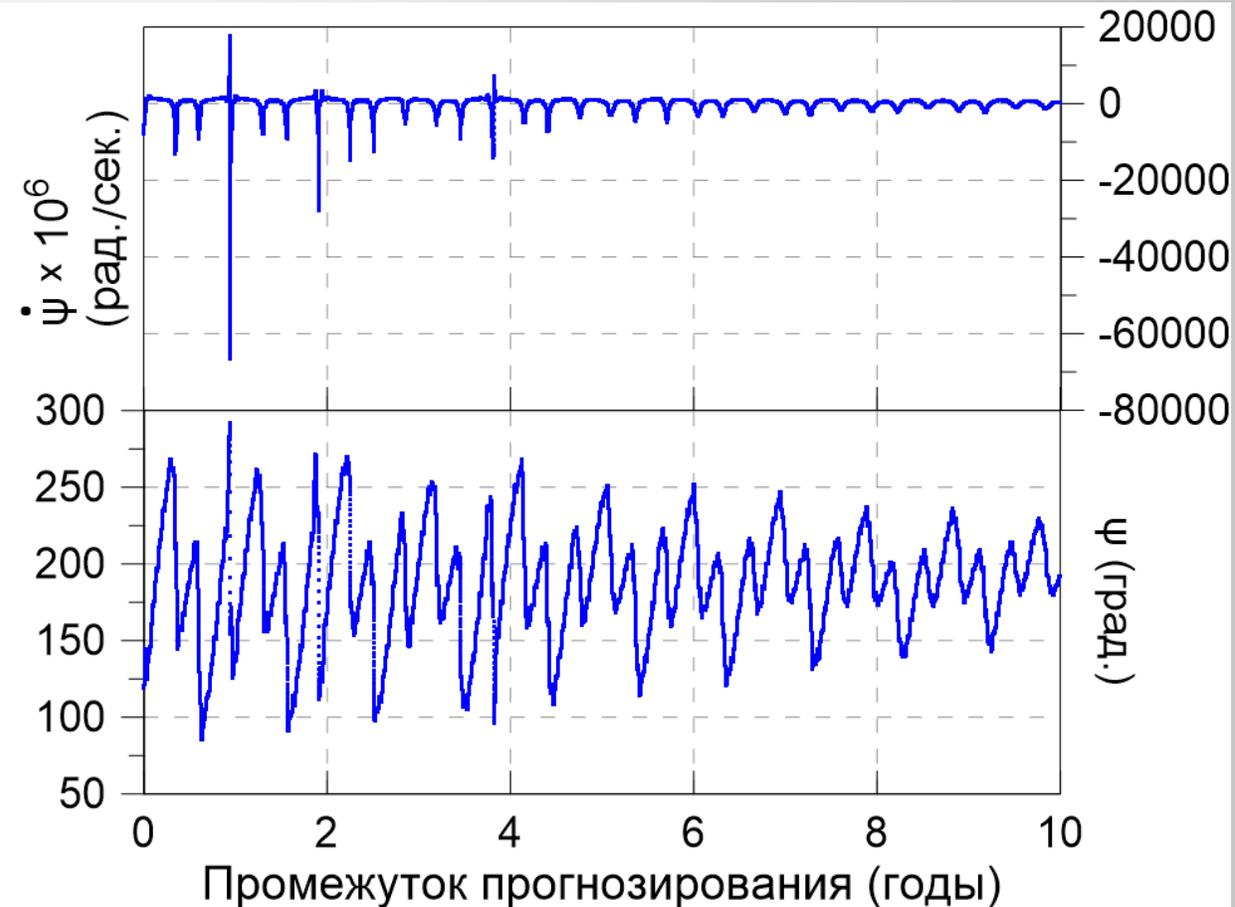
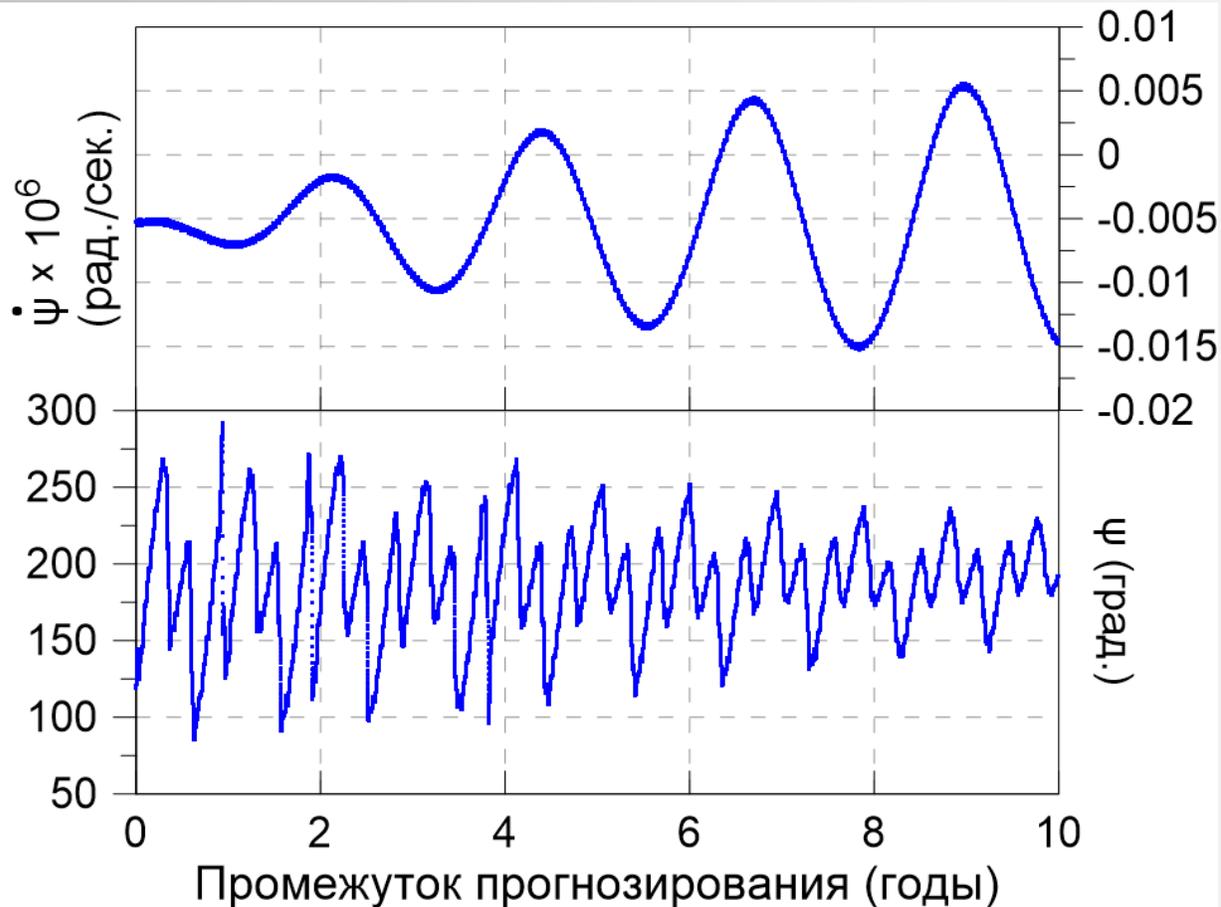


Сопоставление методик. Пример 1

$$\dot{\psi} = \dot{\omega} \approx 0$$

Приближенный метод

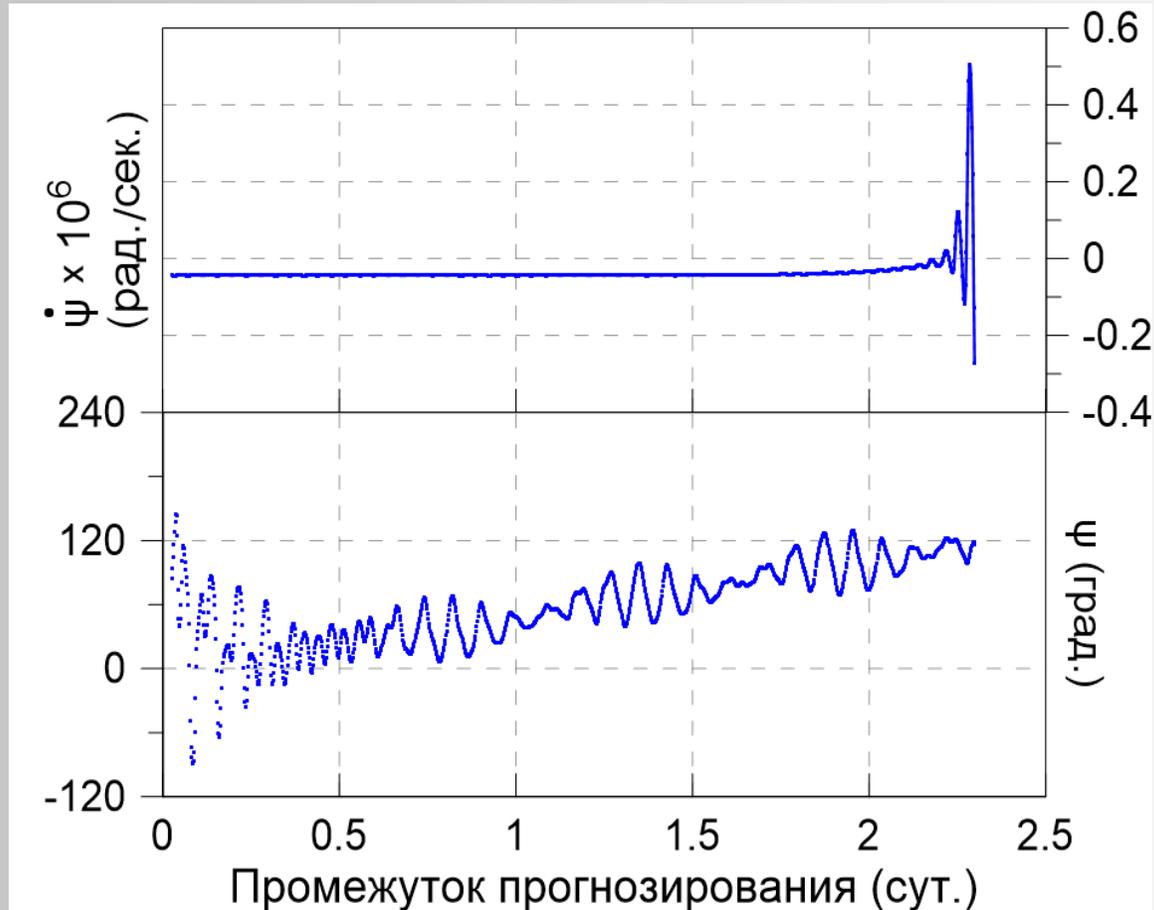
Точный метод



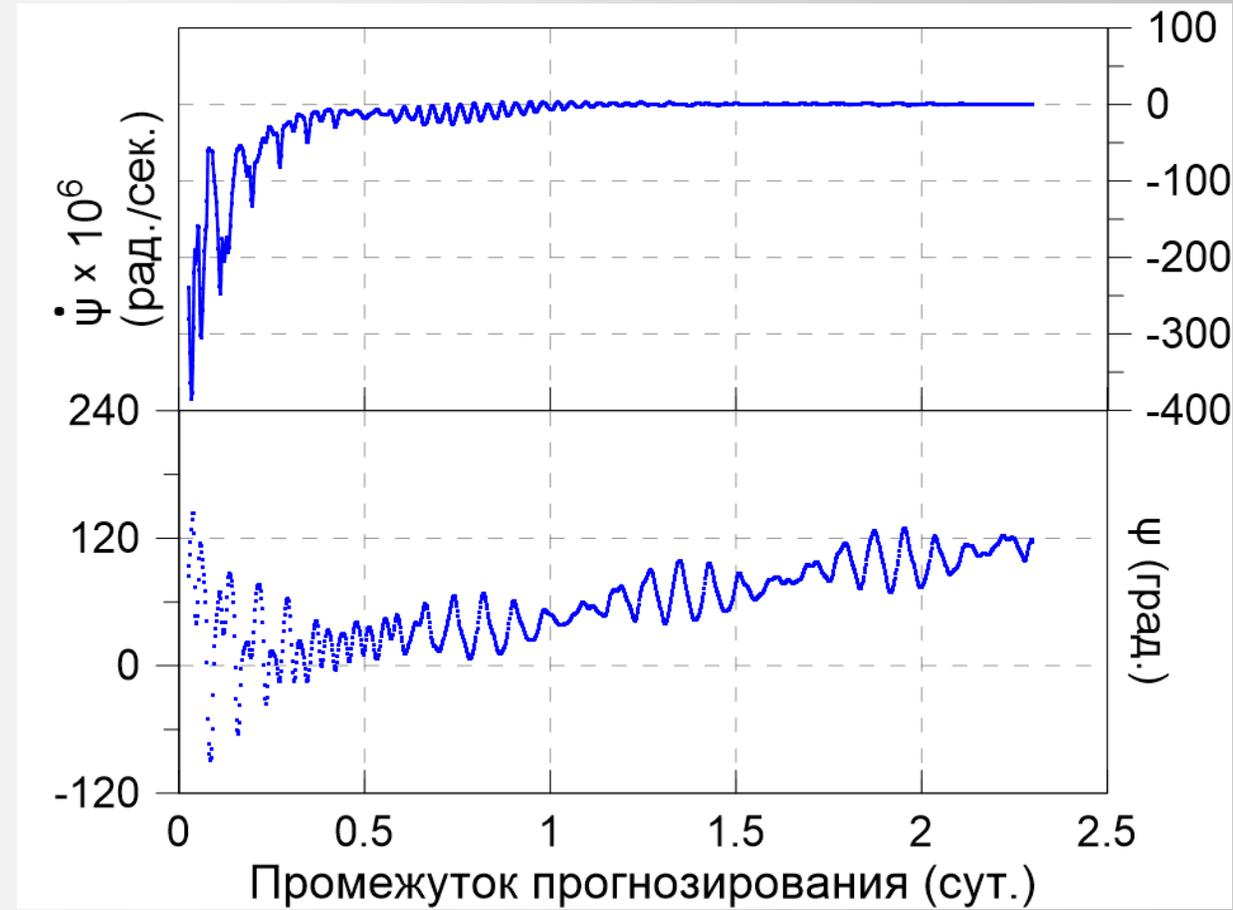
Сопоставление методик. Пример 2

$$\dot{\psi} = \dot{\omega} + \dot{\omega}_E \approx 0$$

Приближенный метод



Точный метод



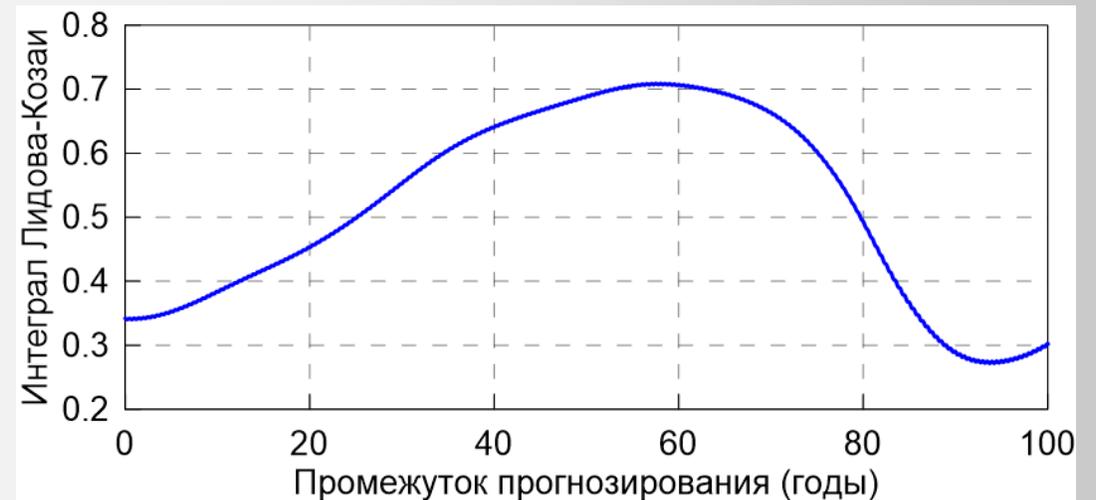
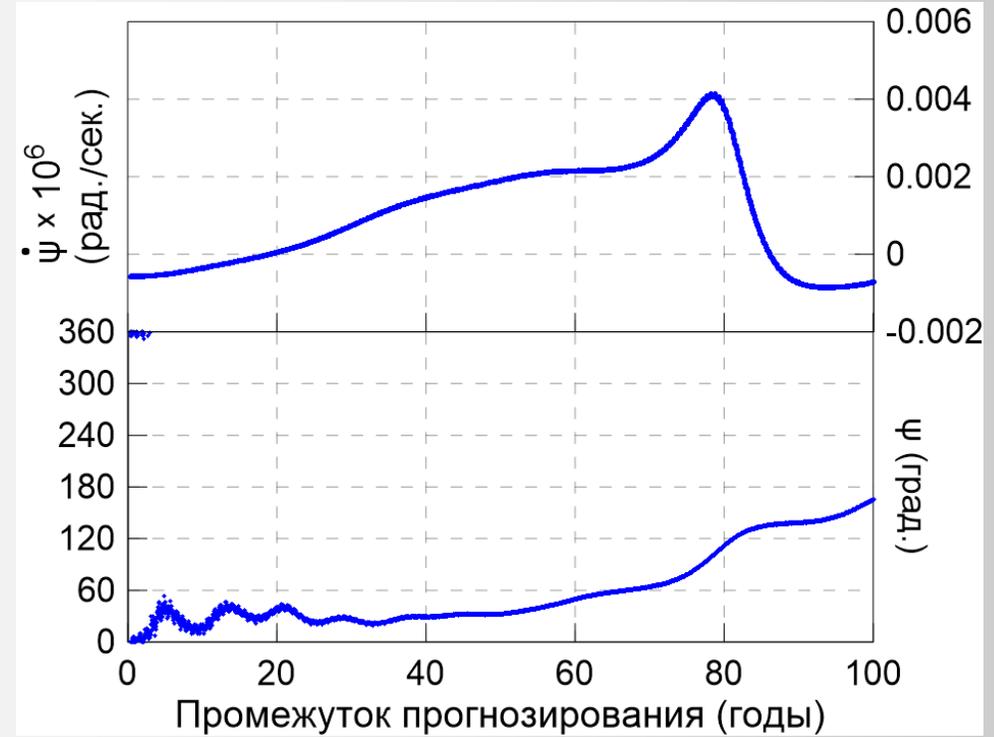
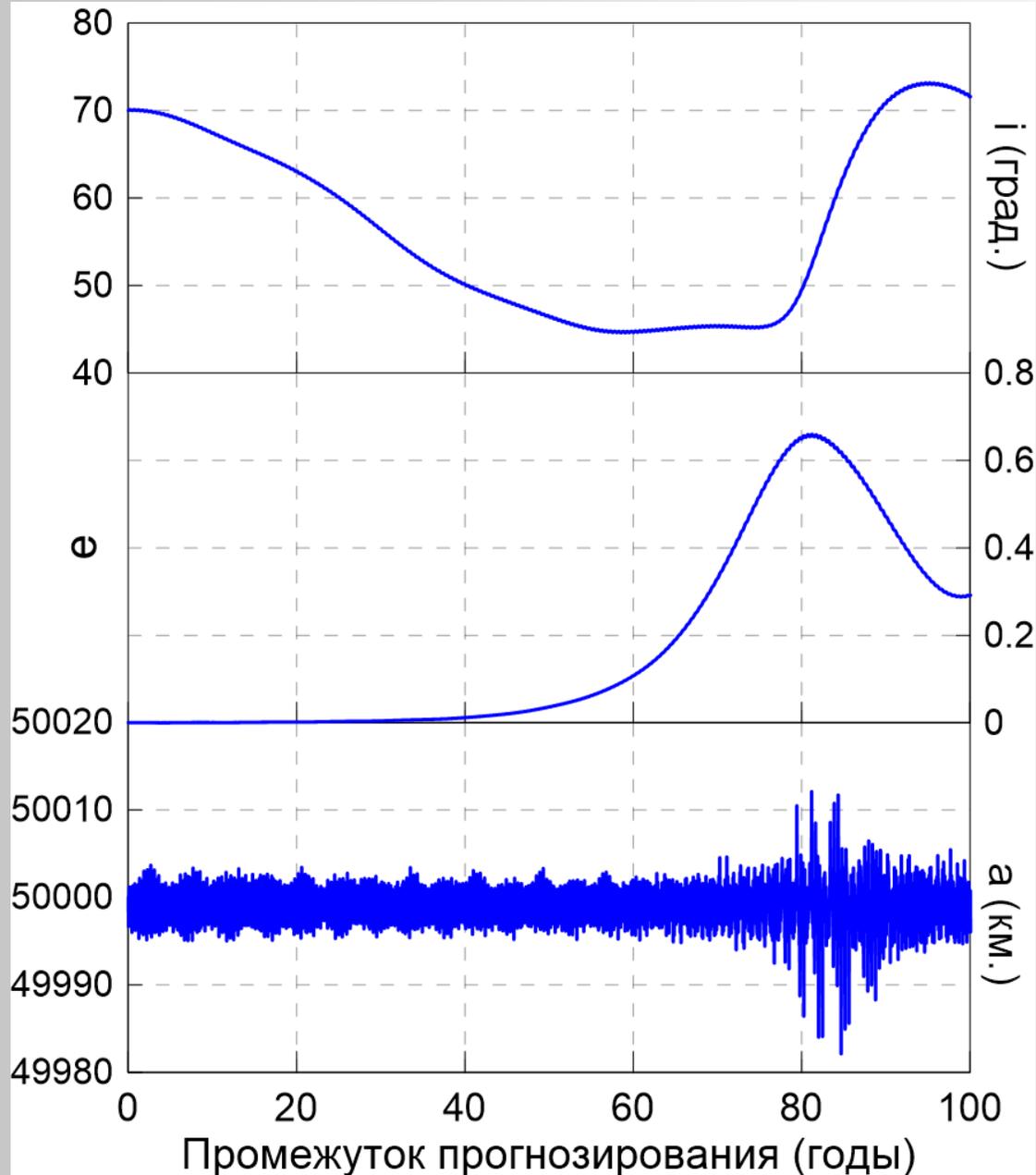
Применение численных моделей

Численная модель движения ИСЗ использовалась в самых разнообразных исследованиях:

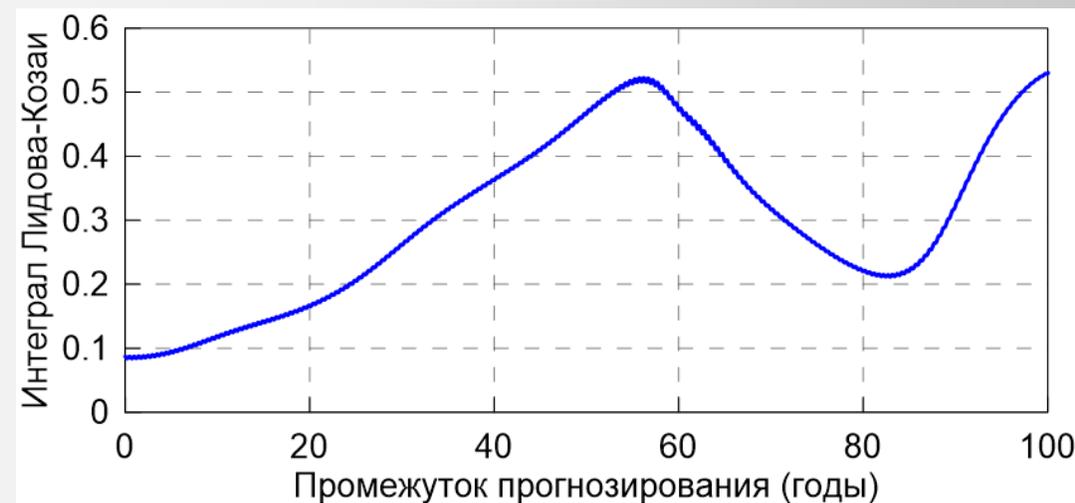
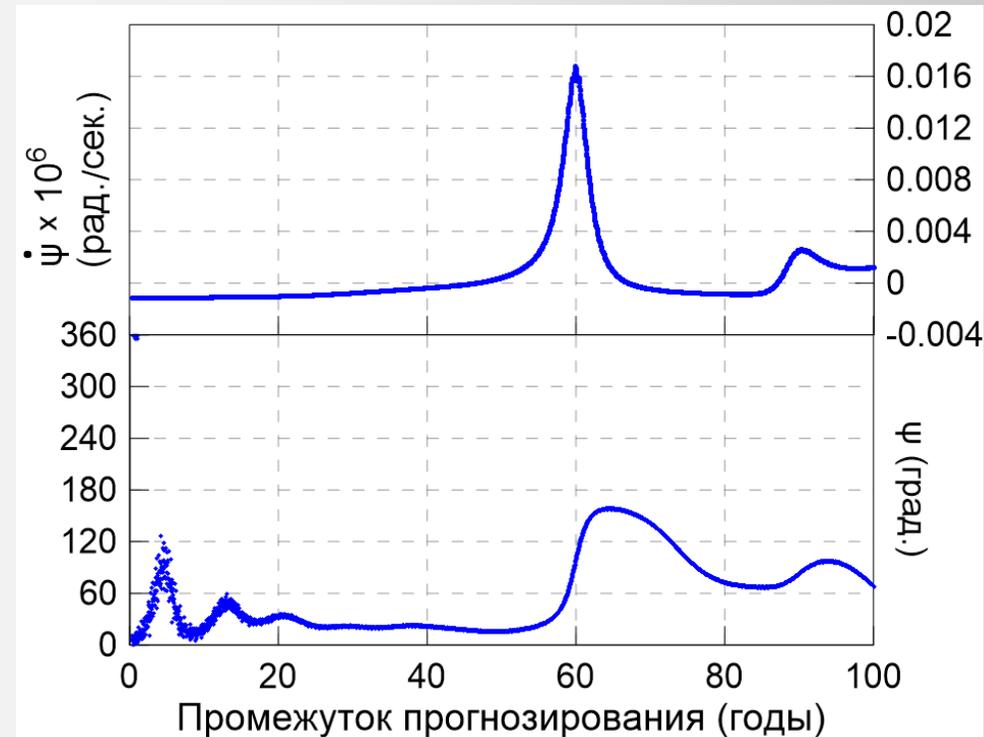
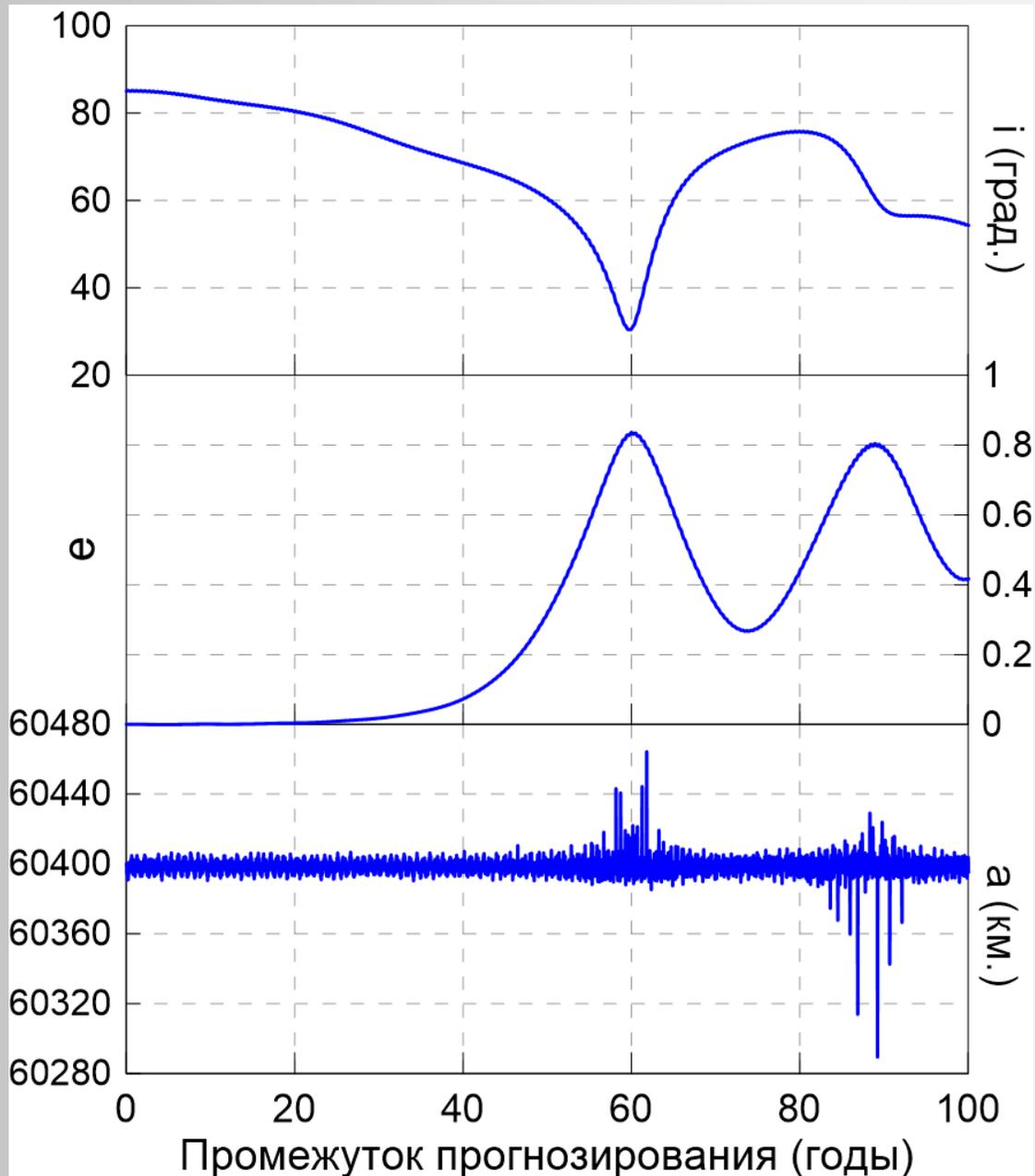
- определения параметров движения по данным измерений,
- исследование динамической структуры резонансных областей околоземного пространства,
- особенности влияния светового давления на орбитальную эволюцию ИСЗ
- и т. п.

Эффект Лидова-Козаи в динамике ИСЗ. Пример 1

$$\sqrt{1 - e^2} \cos i = const$$

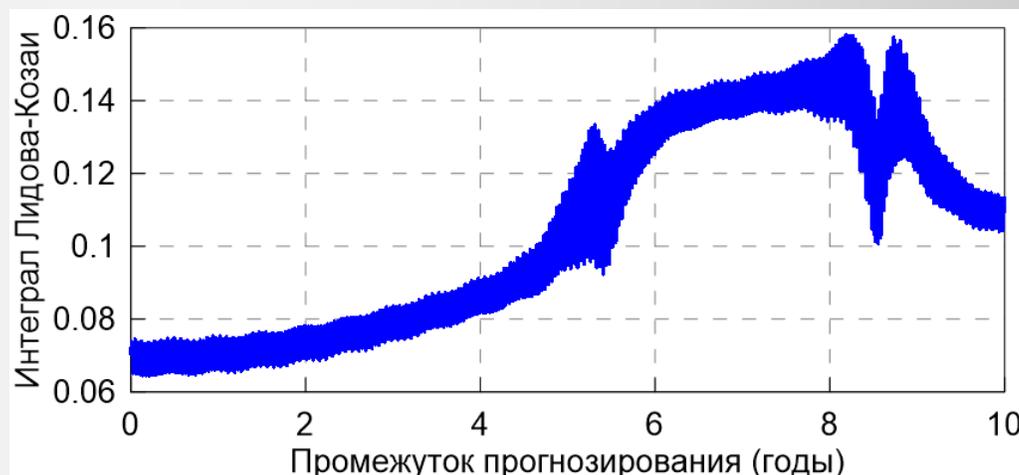
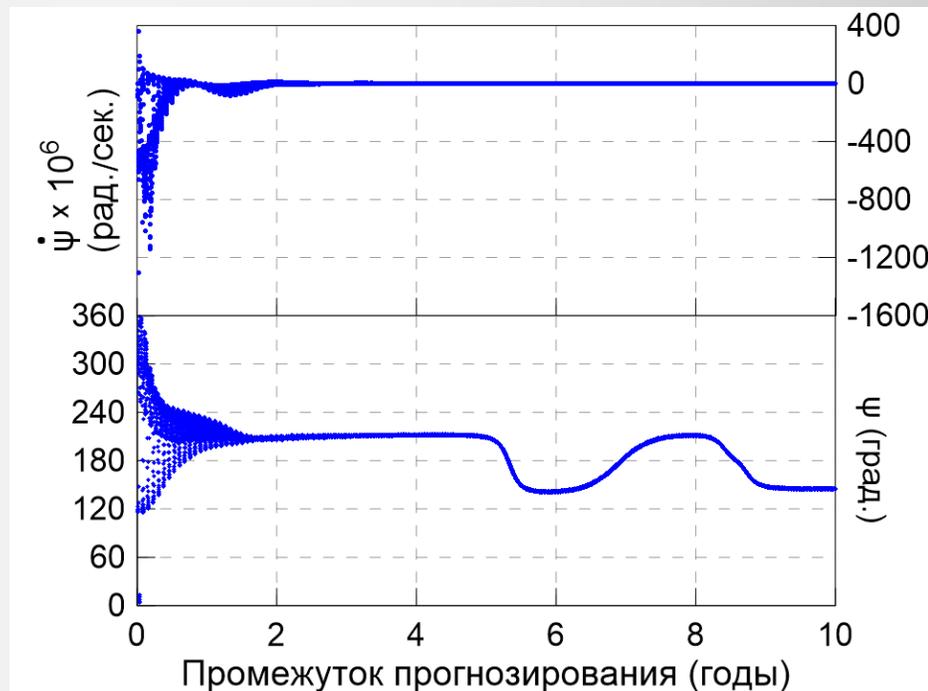
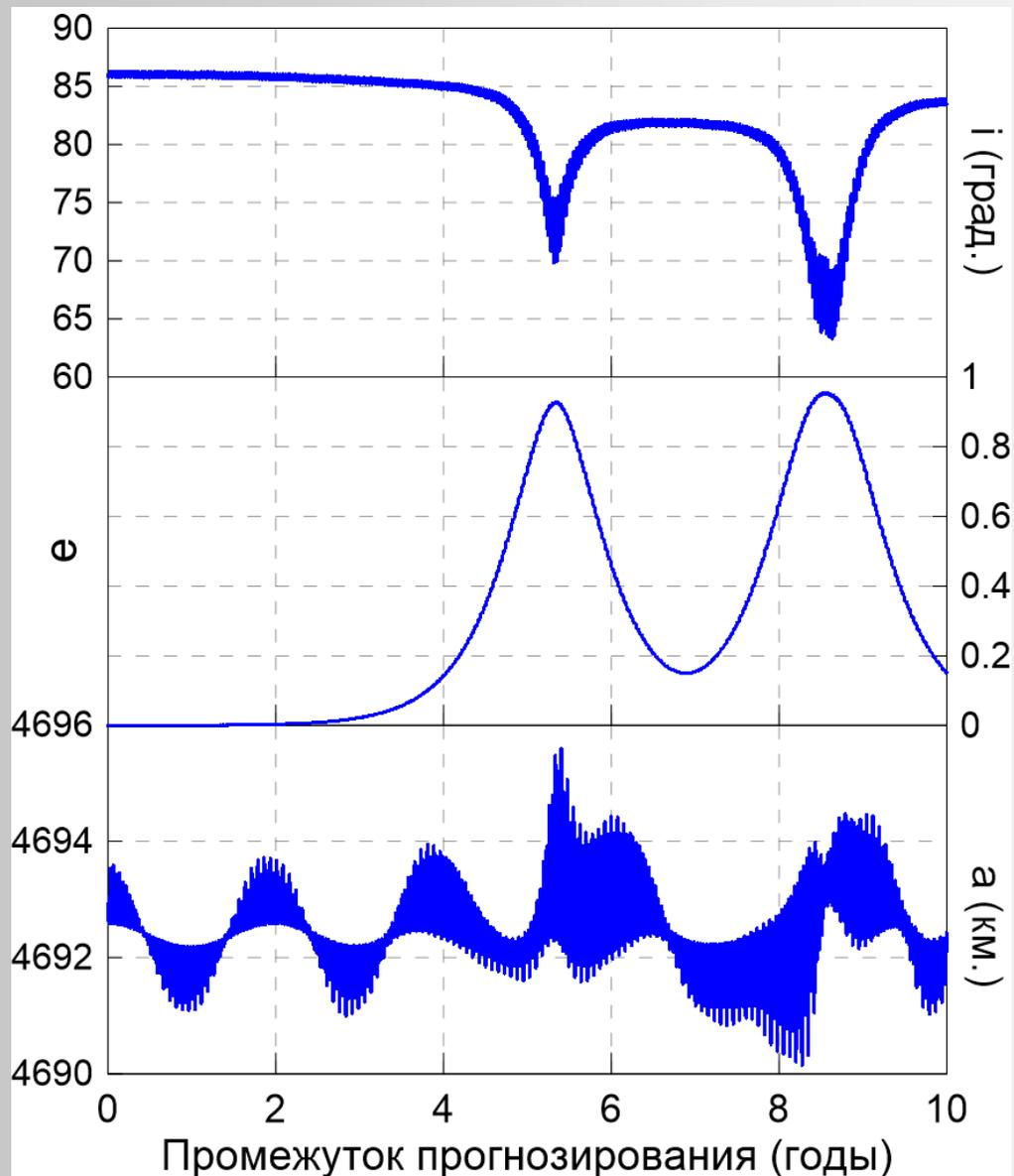


Эффект Лидова-Козаи в динамике ИСЗ. Пример 2 $\sqrt{1-e^2} \cos i = const$



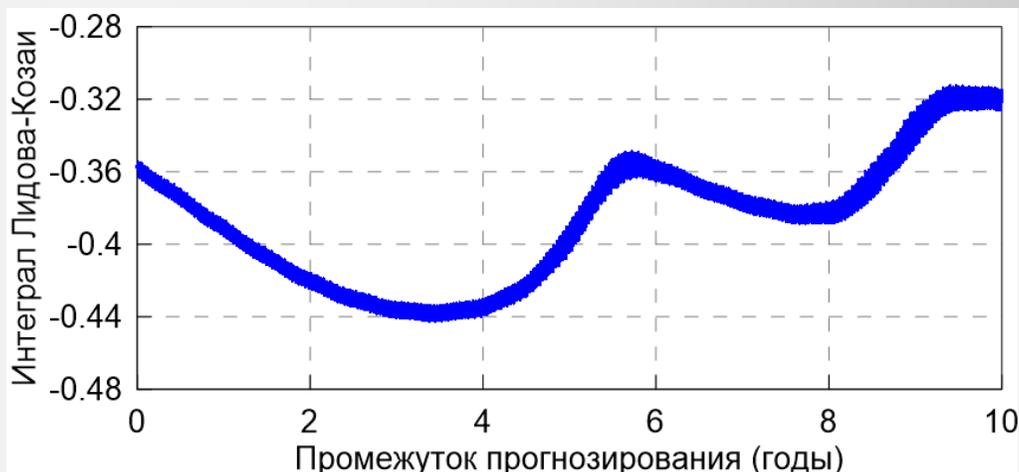
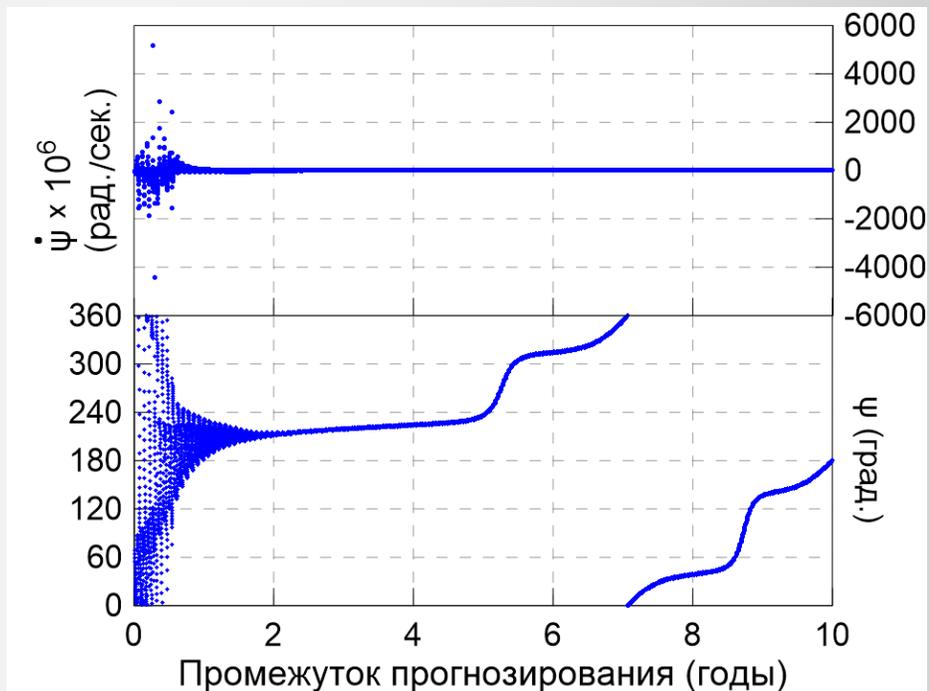
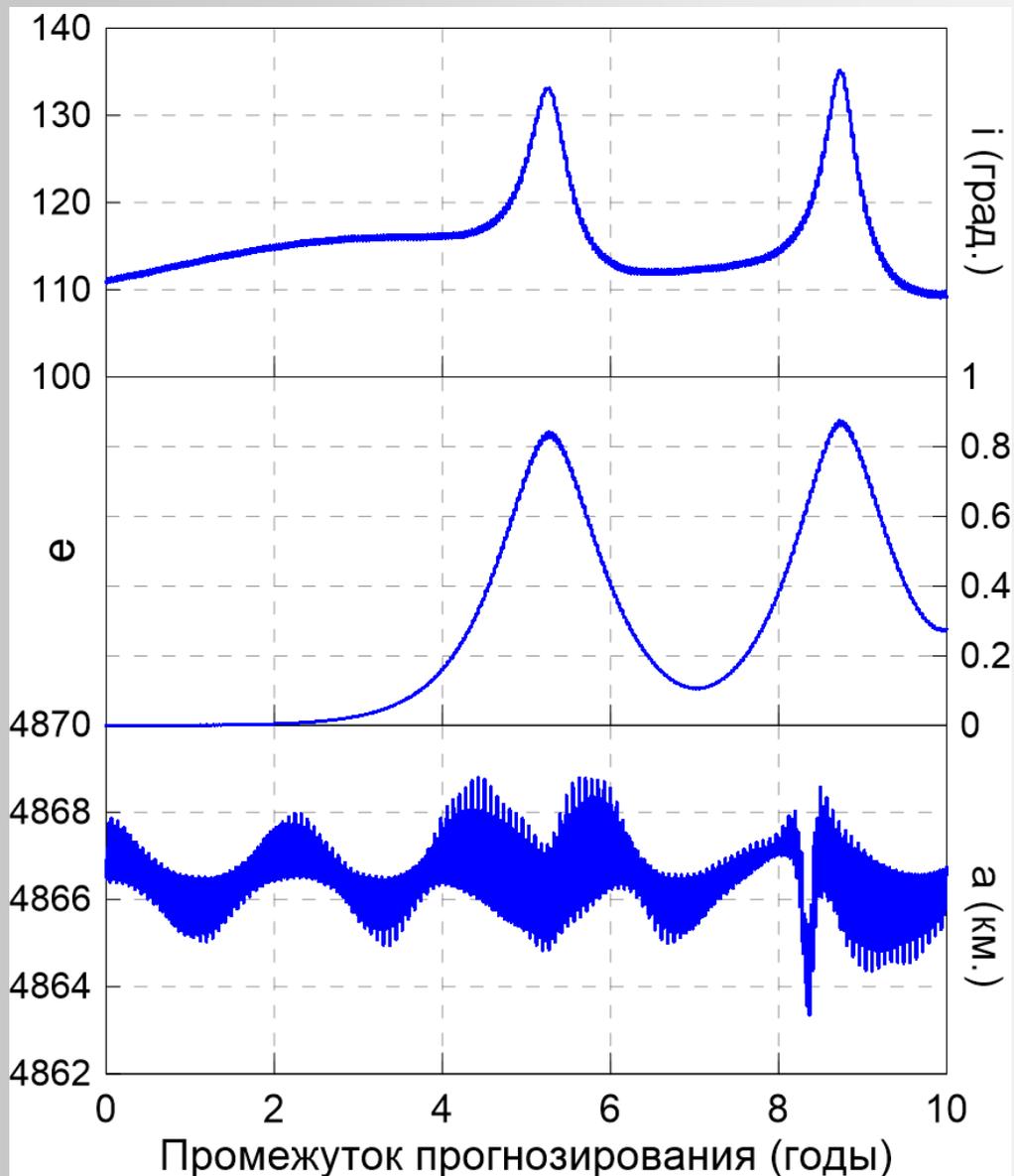
Эффект Лидова-Козаи в динамике ИСЛ (идеализированная модель). Пример 1

$$\sqrt{1-e^2} \cos i = \text{const}$$

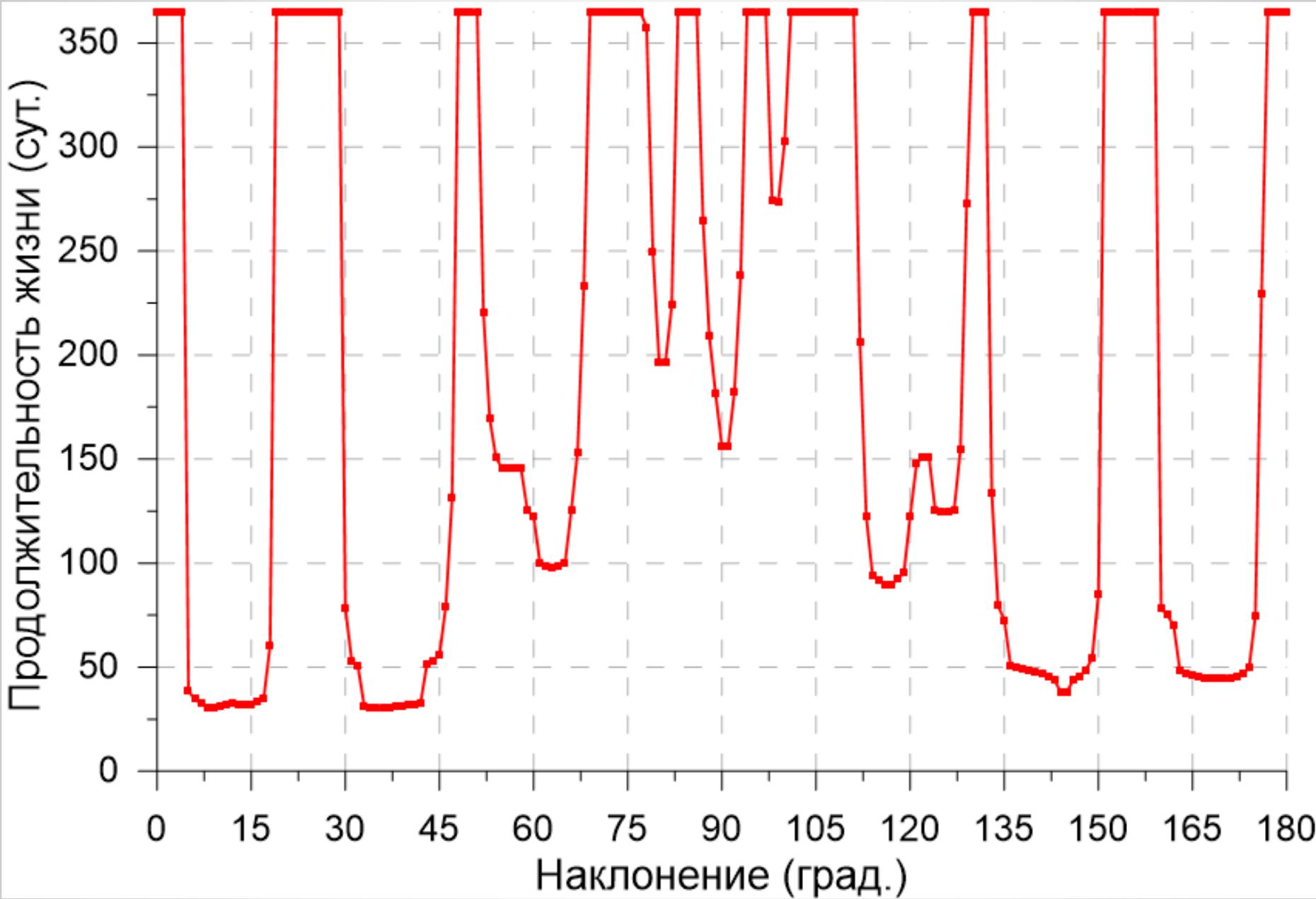


Эффект Лидова-Козаи в динамике ИСЛ (идеализированная модель). Пример 2

$$\sqrt{1 - e^2} \cos i = \text{const}$$



Нерешенная проблема: динамика низколетящих ИСЛ



Спасибо за внимание!