РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК ИНСТИТУТ
АСТРОНОМИИ

На правах рукописи

УДК 520.88

Басаргина Ольга Андреевна

Оптимизация планирования наблюдений в космических проектах на примере наземного сегмента научного космического проекта Спектр-УФ

Специальность 01.03.02 —
«астрофизика и звездная астрономия»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Сачков Михаил Евгеньевич

Москва — 2019

Оглавление

Глава 1

Введение

Ещё К.Э. Циолковский в [7] поднимал вопрос планирования и реализации программ работы бортового комплекса управления для эффективного управления ракетой. Он пишет: «Необходимы автоматические приборы, управляющие движением ракеты $<\ldots>$ и силою взрывания по заранее намеченному плану», «Может быть ручное управление движением снаряда окажется не только затруднительным, но и прямо практически невозможным. В таком случае следует прибегнуть к автоматическому управлению».

Наблюдения за небесными объектами требуют тщательного планирования. Затраты на создание и использование космических телескопов настолько велики, что каждая секунда рабочего времени ценится высоко и является предметом борьбы при оптимизации расписания работы телескопа. При запуске космического телескопа Хаббла (англ. HST) в 1990, требовалось восемь недель непрерывной работы, чтобы собрать циклограмму на семь дней функционирования аппарата [1]. С тех пор, конечно, многое поменялось, изменились технологии, были разработаны новые подходы. HST представил новые возможности для сообщества UV-астрономов. Этот инструмент был разработан как многоцелевой телескоп, который находится на низкоземной орбите, и время наблюдения обязательно разделяется между различными инструментами и областями длин волн, что представляет отдельный интерес в качестве задачи моделирования и оптимизации распределения наблюдательного времени. В 2015 году Хаббл отметил 25 лет работы. Его обслуживание должно было завершиться ещё в 2009 году, но ученые НАСА решили продолжать использовать HST до тех пор, пока техника работает, а бюджетирование не прекращается.

Запуск преемника Хаббла, космического телескопа Джеймса Уэбба (англ. JWST) запланирован на 2021 год. В 2011 году на орбиту был отправлен российский научный космический аппарат «Спектр-Р», в 2019 — «Спектр-РГ». Всемирная космическая обсерватория — ультрафиолет (Спектр-УФ), пуск которой запланирован на 2025 год, представляет собой новую модель реализации программы для крупных астрофизических космических миссий и входит в число крупнейших мировых проектов внеатмосферной астрономии.

Начало использования строгой математической теории оптимизации для планирования можно отсчитывать от середины 50-х годов, когда эта область начала разрабатываться с различных направлений [19]. Построение алгоритмов планирования основывается на теоретических задачах, довольно точно аппроксимирующих реальные случаи.

Настоящая работа посвящена получению оптимального решения задачи планирования космических наблюдений и практическому применению полученного решения. Планирование наблюдений — это задача распределения заявок, выполнение которых обусловлено одним или несколькими ограничениями. В предлагаемой работе рассматривается использование тропической алгебры для улучшения работы по принятию решений и для оптимизации в целом процесса планирования наблюдений для космических обсерваторий. Для примера берётся проект Спектр-УФ, но также рассматриваются и другие космические обсерватории. .

На данный момент общепринятое планирование наблюдений состоит из нескольких стандартных этапов. После присвоения некоторым комитетом по распределению времени (будем называть его TAC, time allocation committee) рейтинга каждой заявке в зависимости от её научной ценности, набирается пул заявок для долгосрочного планирования (обычно это год), затем формируется краткосрочная программа, обычно это одна-две недели, и оперативное планирование почти в реальном времени, в течение дня.

Задача оптимизации автоматического планирования становится особенно актуальной в свете возможности более сложных наблюдений, большего количества заявок. Оптимальное оперативное планирование повышает эффективность наблюдений как за счёт устранения простоев обсерватории и подбора более подходящих заданий [27], так и за счёт экономии рабочего тела КА, и, таким образом, продления срока существования.

Оптимизация актуальна не только для космических обсерваторий, но и для наземных обсерваторий, которые сталкиваются со схожими ограничениями и системой планирования экспериментов в своей работе.

1.1 Цели диссертации

Целью исследования является разработка алгоритма оптимизации планирования наблюдений с космической обсерватории Спектр-УФ. Объектом исследования является динамическая многокритериальная задача оптимизации программы наблюдений, состоящей из заявок различного рейтинга, длительности и сложности. Предметом исследования служат методы решения задачи оптимизации, эвристические и тропической оптимизации, дающие аналитическое решение.

1.2 Результаты, выносимые на защиту

На защиту выносятся положения, совокупность которых дает решение задачи построения оптимальной программы наблюдений применительно к проекту Спектр-УФ с учётом основных способов решения этой задачи в схожих случаях, а именно: 1. Выбор алгоритма планирования оказывает существенное влияние на конечную производительность системы. Процесс выбора алгоритма должен учитывать задачу планирования (job-shop problem), которая наилучшим образом соответствует характеристикам обсерватории.

2. Численное моделирование показывает, что метод муравьиной колонии имеет преимущество перед методами имитации отжига и генетического алгоритма, для случая, когда задача может изменяться динамически; муравьиный алгоритм может работать непрерывно и адаптироваться к изменениям в реальном времени. Построено решение задачи планирования в терминах тропической алгебры

3. Проведено сравнение эвристических методов планирования наблюдений и тропической задачи оптимизации на массивах заявок на наблюдения космических обсерваторий Spitzer, HST, Herschel. Показано, что у реализации метода тропической оптимизации есть преимущество по времени при равной затрате процессорных мощностей.

1.3 Научная новизна

Следующие основные результаты получены впервые:

• Впервые построено решение задачи оптимизации планирования наблюдений в терминах тропической алгебры. Обоснован и разработан алгоритм распределения заявок на наблюдения с учётом их рейтинга на основе этого подхода. Проведено сравнение работы генетических, жадных и тропического алгоритма в рамках поиска наиболее выгодного процесса построения системы наблюдений для наземного сегмента космической обсерватории.

• На основе проведенных численных расчетов в рамках модели впервые сделан вывод о том, что генетические алгоритмы не являются лучшим из возможных решений для конкретной задачи оптимизации и показаны расхождения при различных наборах параметров.

1.4 Научная и практическая значимость

Полученные в диссертации результаты значимы для экспериментальной астрономии, при проведении наблюдений при помощи как космических, так и наземных обсерваторий.

Основные результаты можно использовать при работе с заявками на наблюдательное время как у нас в стране, так и за рубежом. Разработана библиотека на Python, которую можно использовать при формировании единой системы составления как долгосрочного, так и оперативного планирования.

Наиболее актуальная область применения разработанного алгоритма — планирование наблюдений в обсерваториях, как наземных, так и космических. Предложены новые средства описания задачи планирования, делающие возможным ускорение и повышение качества процесса планирования, что даёт, в свою очередь, значимую экономию ресурсов проекта.

Личный вклад автора

Автор поставил задачу, принимал активное участие в разработке математической модели, проведении численных расчетов, анализе результатов моделирования и подготовке к публикации полученных результатов. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором в результате личных или совместных исследований. Результаты, выносимые на защиту, согласованы с соавторами.

Достоверность представленных результатов

Достоверность представленных в диссертационной работе результатов исследования обеспечивается применением хорошо обоснованными теоретическими моделями,сравнением с имеющимися решениями задачи оптимизации данными наземных и космических наблюдений и обсуждением полученных результатов на конференциях. Основные результаты опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК.

Апробация работы Результаты, представленные в диссертации, были представлены в качестве стендовых докладов и статей: • на конференции Space Telescopes and Instrumentation 2016: Ultraviolet to Gamma Ray, part of SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation • в статье O. Basargina, M. Sachkov, «New approach to the space mission program optimisation: WSO-UV» // Proceedings of SPIE, 2018, Vol. 10704, #UNSP 107042L Основные результаты работы заявлены на конкурсной основе на доклад SpaceOps2020 в секции «Планирование и составление графиков», публикации по теме работы [42], [43].

Публикации по теме диссертации Статьи в журналах, рекомендованных ВАК [A1] O. Basargina; M. Sachkov; Y. Kazakevich; E. Kanev; «WSO-UV ground segment for observation optimization» // Published in SPIE Proceedings, 2016, Vol. 9905.

1.5 Объем и структура диссертации

Первая часть содержит обзор литературы и основные результаты по применению различных методов оптимизации планирования на космических и наземных телескопах. Во второй части ставится задача оптимизации в терминах тропической алгебры и описывается алгоритм поиска решения, полученного в явном виде, в компактной векторной форме. Результаты второй главы используются в следующей. В третьей главе оценивается время работы построенного алгоритма планирования на примере модели заявок для проекта Спектр-УФ и на примере реализации ранееописанных алгоритмов для Инфракрасной космической обсерватории, Космического телескопа Хаббла и телескопа Джеймса Уэбба, приводятся результаты проверки эффективности кода.

Глава 2

Об оптимизации в космических проектах

Оптимизация стала важной областью в области планирования работы систем. Она эволюционировала из немецкой книги 1832 года «Коммивояжер – как он должен вести себя и что делать, чтобы доставлять товар и быть успешным в своих делах – советы старого курьера» до технологии, которая оказывала и продолжает оказывать изрядное влияние на промышленность. Прежде чем обсуждать практические решения в области оптимизации, стоит упомянуть общую классификацию типов задач. Следует отметить, что подобная классификация типов задач не зависит от методов решения. В целом, задачи оптимизации сначала можно классифицировать в терминах непрерывных и дискретных переменных. Основное отличие между ними — это типы функций, на которых ищется экстремум. Для непрерывной оптимизации это гладкие функции, определенные на множестве вещественных или комплексных значений, для дискретной — функции от дискретного аргумента или структуры (например, счетного множества, графа или матроида) [15]. Непрерывная оптимизация — это, в основном, линейное и нелинейное программирование. Важным подклассом линейного программирования является проблема линейной комплементарности, а для нелинейного программирования – квадратичное программирование и полуопределенное программирование.

Математическое программирование и оптимизация в целом нашли широкое применение в разработке технологических систем. В основном, из-за того, что эти задачи зачастую имеют множественные решения, и, следовательно, часто бывает нелегко найти оптимальное. Кроме того, во многих случаях ситуация такова, что поиск оптимального решения приводит к значительной экономии ресурсов. Таким образом просто придерживаться неоптимальных решений невыгодно, и оптимизация стала важной технологией.

Что касается конкретных областей применения, любые задачи проектирования процессов чаще всего приводят к возникновению задач нелинейного программирования и частично-целочисленного нелинейного программирования, в то время как задачи планирования и составления графиков обычно сводятся к задачам линейного и частично-целочисленного линейного программирования. Задачи проектирования, как правило, в большей степени опираются на модели нелинейных процессов, в то время как для планирования и составления графиков работ физическое прогнозирование менее важно, так как большинство операций описываются при помощи требований ко времени и видам деятельности.

Из-за важности безопасности в космических операциях и стоимости космических программ, новаторство в планировании очереди наблюдений не особо приветствуется[1]. Из-за этого большая часть планирования в космических операциях выполняется методами иерархических сетевых задач (в отличие от более интенсивных поисковых методов первичных принципов), которые имеют преимущество повторимости для облегчения тестирования.

Многие космические программы использовали автоматическое планирование и планирование на местах, чтобы обеспечить значительную эксплуатационную эффективность, включая телескоп Хаббла, планирование капитального ремонта космического челнока (шаттла), операции с полезной нагрузкой космического челнока, доработанную программу по составлению карт Антарктики, роверы программы исследования Марса, аппараты дистанционного зондирования Земли, аппарата Марс Экспресс. Автоматическое планирование даже использовалось ради демонстрации методики в программе Дальний Космос 1 (англ. DS1) и как первичная операционная система на аппарате наблюдения за Землёй (EO-1) [20]. Операции космического корабля имеют ряд интересных тонкостей с точки зрения планирования и планирования приложений.

2.1 EO-1

Космический аппарат EO-1 был первой миссией в серии наблюдений за Землей, разработанной НАСА. Он был запущен 21 ноября 2000 года и был деактивирован 30 марта 2017 (оставшись на орбите до пятидесятых годов этого века, когда он сгорит в атмосфере Земли). После одногодичной предварительной программы EO-1 перешёл на расширенную программу в январе 2002 года, отлично выполнив все первоначальные цели по проверке технологий. К 2004 году непрерывные улучшения в стандартных операциях EO-1 позволили получить около 100 сцен в неделю, что значительно улучшилось по сравнению с предварительными критериями успеха в 7 сцен в неделю (сцена представляет собой типичную научную визуализацию, состоящую из 50-километрового изображения с использованием двух основных инструментов аппарата – ALI и Hyperion). В 2004 году оперативное автоматизированное программное обеспечение для лётного и наземного планирования было развернуто для автоматизации и планирования программы и упорядочения элементов миссии EO-1. Это программное обеспечение, называвшееся R4, было направлено на автоматизацию существующих оперативных политик в большей степени, чем на увеличение количества научных сцен, полученных в программе. Этот подход был принят, поскольку он предлагал самый низкий риск, наименее дорогостоящий путь к автоматизации. Эта автоматизация была чрезвычайно успешной, что позволило существенно сократить расходы на управление программой и обеспечить более быструю реакцию на научные события и аномалии, такие как сбои наземных станций. Эта автоматизация смогла продолжить этот темп около ста сцен в неделю. Автоматизация 2004 года отработала безупречно и за 5 лет работы получила более 25 000 сцен.

Не так давно (2008-2009 гг.) программное обеспечение для планирования наземных и летных миссий для EO-1 было модернизировано с уделением особого внимания, во-первых, увеличению оперативной гибкости для непосредственной смены сцен перед захватом и, во-вторых, захватом большего научных сцен.

2.2 Hubble

Задача планирования работы телескопа Хаббла входила в число самых больших и сложных задач планирования: от 10 000 до 30 000 наблюдений запланированы в год, и каждое из них ограничивается большим количеством оперативных и научных условий. Претенденты на время телескопа могли указывать различные ограничения на наблюдения, соответтсвующие научным задачам. К ним относились относительные требования к времени, такие как приоритет, минимальное и максимальное время наблюдения, порядок наблюдений, возможность прервать наблюдение и повторяемость. Некоторые наблюдения должны были выполняться в течение определенного абсолютного интервала времени. В заявке могла быть ограничена ориентация апертуры инструмента относительно цели или наблюдение должно было проводиться, пока HST находится в тени Земли. Чтобы обеспечить гибкость в работе, разработчики имеют возможность отмечать экспозиции как «условные» или «выборочные». «Условные» воздействия зависят от результатов, полученных из других работ в программе наблюдений, или, в некоторых случаях, от результатов, основанных на наблюдениях с земной поверхности. Эти наблюдения не планируются до тех пор, пока заявитель не уведомил комитет по распределению о том, что условие выполнено. «Выборочные» позволяют разработчику выбрать альтернативные списки задач наблюдений, из которых одна или несколько будут выбраны для выполнения. Как и в случае «условных» заявок, заявки, содержащиеся в «выборочных» наборах, помещаются в расписание работ только после того, как заявитель сообщит комитету о решении. Прочие ограничения на работы телескопа касаются физических ограничений, как то: необходимая энергия на разворот аппарата, температурный режим работы приборов, прохождение сквозь радиационные пояса (телескоп работает на низкой орбите), требующее отключения целевой аппаратуры, прецессия земной орбиты, наличие источников яркого света, таких, как Солнце, засвечивающих приборы, направленность солнечных батарей. Система долгсрочного планирования наблюдений SPIKE, разработанная для телескопа Хаббла (но также использующаяся и в других программах, таких, как SIRTF и AXAF) рассматривает составление графика наблюдений как задачу оптимизации с ограничениями и использует технику планирования, основанну на эвристическом методе восстановления [21]. Система научного планирования (SPSS) использует созданный SPIKE долгосрочный график и выполняет подробное и точное планирование действий космического телескопа Хаббла, необходимых для сбора научных данных, указанных в группах заявок. Действия должны планироваться в соответствии с ограничениями, налагаемыми на функциональность КА, научную целостность, а также на максимизацию научной отдачиот телескопа. Как правило, наблюдения и другие действия планируются с точностью до секунды с погрешностью наведения меньше, чем в одну угловую секунду. План составляется, как правило, за несколько недель до фактической работы. Все научные требования к наблюдениям собраны в единицу структуру данных SchedulingUnit (SU), которая является основной единицей планирования в SPSS. Таким образом, планировщик будет указывать, что SU надо добавить в график, и для того, чтобы считать его успешно выполненным, все вспомогательные операции должны также быть выполнены. Операции HST штатно планируются на неделю вперёд, так называемое краткосрочное планирование. Перед построением графика требования заявок преобразуются в специфические типы данных и строго проверяются. В итоге сосаётся пустой график с избыточным списком наблюдений (избыточность списка определяется как превышение суммарной длительностью наблюдений максимального времени, возможного в планируемую неделю работ), И тут, собственно, возникает актуальная задача — какие заявки и в каком порядке надо поместить в графике, чтобы максимизировать«эффективность»? Автоматическое средство планирования HST, которое реализует эвристический алгоритм жадного поиска, используется для достижения оптимального расписания. Большая часть эвристики для была разработана на основе многолетнего опыта работы и сильно зависит от конкретных ограничений HST каждого наблюдения [22].

2.3 JWST

Процесс краткосрочного планирования работы JWST предполагается похожим на HST. Ожидается понедельное планирование. Заполненные графики будут добавляться в исходную базу краткосрочного планирования, которая составляется на две-три недели вперёд с текущего времени.[1]

2.4 ASCA

ASCA (ex-ASTRO-D, 1993) — одна из первых миссий, которая принимала заявки через электронную систему подачи, тоже юзают SPIKE (которая формирует годовую программу, поделенную на недельные циклы), а для краткосрочного – Needle собственной разработки, которая сортирует заявки сразрешением в минуту по time-critical, bright earth, star tracker, затем уведомляют учёного и держат наготове ещё пару таких же оперативных планов, TOO – за час, оперативный обмен позволяет обсудить, согласовать и запланировать наблюдение вспышки гамма-излучения за 36 часов. В целом — торжество работы через e-mail.

2.5 WSO-UV

Этапы планирования для обсерватории Спектр-УФ похожи, сперва формируется долгосрочный план наблюдений, основывающийся на рейтинге заявок, физических ограничениях заявок, и т.д., затем составляется краткосрочный план на неделю, и потом уже распределяются операции на один оборот [9] Главное ограничивающее условие наблюдений — это количество доступного времени наблюдений в целом. Также работу ограничивают такие условия, как например предельный объём рабочего тела, затрачиваемого на каждую операцию по развороту, объём памяти на борту, объём информации, которую способны обработать наземные системы в единицу времени и прочие подобные ограничения. Есть большой класс задач по по поиску оптимального решения, где функцию и граничные условия удобно выразить через операции взятия минимума или максимума. Задачи сетевого планирования и размещения, а также задача о назначениях, к которой можно свести часть наших задач по планированию времени наблюдения, относятся к этому классу. Нередко целевая функция нелинейна и не является гладкой, что осложняет их решение. Но в большом количестве случаев поиск решения в этом классе задач значительно упрощается (снижается время, затрачиваемое на поиск) при помощи представления их в терминлгии тропической, или, что то же самое, идемпотентной математики.

2.6 Об инструментарии

Идемпотентная математика является относительно новым видом прикладной математики, работающим с теорией и практикой использования полуколец с идемпотентными сложениями. Первыми работами, закладывавшими фундамент для этой области, были работы Каннингема-Грина, Пандита, Ниффлера и Хоффмана, относящиеся к началу 1960-х годов [23], [24], [25]. Произведения, опубликованные в то же время или несколько ранее Клини, Беллманом и Карушем также дали необходимое развитие области.

В основе идемпотентной математики лежит замена традиционного поля $\mathbb{R}$ действительных чисел идемпотентным полукольцом, где обычные арифметические операции сложения и умножения чисел подменяются, соответственно, идемпотентной (то есть равной собственному квадрату) операцией взятия максимума и дистрибутивным относительно нее стандартным сложением. Эффективным следствием этой подмены будет то, что многие нелинейные над полем задачи сводятся к линейным задачам над идемпотентным полукольцом. Предпосылки подобных преобразований арифметических операций содержатся в теоретической арифметике, восходя к классическим результатам Н.Х. Абеля.

Одной из основных причин растущего интереса к этой теме является то, что многие классические задачи оптимизации (задача оптимизации на графах, задача о назначении и другие) линеаризуются, т.е. сводятся в терминах идемпотентной алгебры к решению линейных уравнений, нахождению собственных чисел и векторов линейного оператора и тому подобным вычислениям. При этом часть известных алгоритмов решения подобных задач, при переводе их в термины идемпотентной алгебры, оказываются идемпотентными аналогами стандартных вычислительных процедур линейной алгебры таких, как метод Гаусса-Зейделя и метод Якоби [4].

Дальнейшее развитие это область получила в материалах научной школы, возглавляемой академиком Масловым, в рамках изучения идемпотентного анализа как теории полумодулей функций со значением в идемпотентном полукольце. Эти и другие работы отечественных математиков Маслова, Колокольцова, Литвинова, Соболевского и их коллег заложили основы и методологически сформировали базу нового направления – идемпотентной математики, объединяющей идемпотентный вариант алгебры, анализа, и примыкающих областей функционального анализа.

Различные аспекты теории и применения идемпотентной алгебры при решении прикладных задач исследовали Бачелли, Олсдер, Голан, Хейдерготт [44] и прочие авторы.

К числу публикаций, в которых развитие моделей и методов идемпотентной алгебры авторы сочетали с поиском решений для прикладных задач, относятся работы Матвеенко, Блюмина и Кривулина.

В частности на основе методов идемпотентной алгебры был решен ряд задач исследования структуры моделей динамики. Например, была рассмотрена задача собственных значений для полумодуля над идемпотентным полукольцом, которое полуполем не является. В то же время некоторое количество публикаций было посвящено изучению взаимосвязей и параллелей между обычной линейной алгеброй и обобщенной линейной алгеброй над полукольцами разного вида, включая идемпотентные их варианты. Обсуждались различные приложения, а также роль и значения обобщенной линейной алгебры в задачах программирования искусственного интеллекта и в смежных областях прикладной математики.

Среди значительного числа публикаций в области идемпотентной алгебры существует относительно небольшая часть, которая посвящена решению стохастических задач. Такие задачи обычно связаны с исследованием эргодических свойств стохастических обобщенных линейных динамических систем и включают в себя проверку асимптотического поведения вектора состояний системы. Одной из наиболее известных математикам задач такого типа является вычисление средней асимптотической скорости роста вектора состояний, которую принято именовать показателем Ляпунова системы.

При решении многих практических задач вместо общего идемпотентного полукольца возникает идемпотентное полуполе, то есть идемпотентное полукольцо с определённым в нём единичным элементом, и в котором каждый ненулевой элемент имеет относительно умножения обратный элемент. Понятно, что существование группового свойства у операции умножения должно бы в известной степени обогащать теорию и аппарат идемпотентной алгебры. Вопрос о том, какие новые результаты могут быть получены с учетом этого свойства, представляет значительный интерес и требует дальнейшего изучения, особенно в смысле использования его для оптимизации задачи о назначениях.

В качестве согласованной математической дисциплины комбинаторная оптимизация относительно молода. При изучении истории области виден ряд независимых направлений исследований, отдельно рассматривающие задачи, такие как оптимальное назначение, кратчайшее дерево графов, передвижение и, конечно, задача коммивояжера. Только в 1950-х годах, когда стал доступен унифицирующий инструмент линейного и целочисленного программирования, а область исследований операций получила интенсивное внимание, эти задачи были объедиены в одну структуру и были заложены отношения между ними.

Если вспоминать Эйлера, то ещё в 18 веке он говорил, что ничего в мире не происходит без оптимизации, и нет сомнений в том, что все аспекты мира, которые имеют рациональную основу, могут быть объяснены методами оптимизации. Оптимизация – это математическая дисциплина, которая значительно отличается от других областей математики. В центре внимания находятся практические задачи, в более общем плане – классы задач, обычно возникающие в областях науки вне математики, и для них придуманы математические модели, которые каким-то образом учитывают суть задачи. Затем разрабатывается математическая теория, чтобы понять структуру уже этих моделей. И здесь каждая отрасль математики, которая помогает обеспечить понимание, привлекается для поддержки исследований. Таким образом, оптимизация во многом зависит от различных источников и не имеет единой теории, хотя существуют «основные технологии», такие как линейная, нелинейная, комбинаторная и стохастическая оптимизация, каждая с богатым набором результатов. Но нет ничего необычного в том, что внезапно, методы, кажущиеся далекими от неё на первый взгляд, начинают играть важную роль. Конечная цель оптимизации - не просто хорошее понимание моделей, исследование должно дать алгоритмы, которые эффективно решают задачи, с которых вы начали. И это связывает оптимизацию с вычислительными науками.

Линейное программирование стало радикальным поворотом в истории комбинаторной оптимизации. Его первоначальная концепция Канторовича и Купманса была мотивирована комбинаторными применениями, в частности в области задачи о перевозках. После формулировки линейного программирования как общей задачи и развития в 1947 году Данцигом симплекс-метода в качестве инструмента, он пытался решить все комбинаторные задачи оптимизации с помощью методов линейного программирования, довольно часто очень успешно. Причина разнообразия корней комбинаторной оптимизации — то, что некоторые из ее задач происходят непосредственно из практики, а примеры их были и продолжают рассматриваться ежедневно. Можно себе представить, что даже в очень примитивных (даже животных) обществах нахождение кратчайших путей и поиск (например, пищи) имеют важное значение. Проблема коммивояжера возникает при планировании покупок или осмотре достопримечательностей, или когда врач или почтальон планируют свои визиты. Или когда нам необходимо распланировать наблюдательное время научного космического аппарата в зависимости от большого числа в том числе и случайных факторов. Точно так же назначение рабочих мест служащим, транспортировка товаров и установление связей образуют элементарные задачи, которые рассматриваются не только математиками. Это приводит к тому, что эти задачи, вероятно, можно отследить в исторически.

Проблема решения линейных уравнений возникает почти везде в математике — многим алгоритмам оптимизации нужны быстрые подпрограммы для этой задачи. Поэтому неудивительно, что алгоритмы решения линейных уравнений разрабатывались на протяжении всей истории, и не вполне ясно, кто изобрел что первым и какая версия алгоритма должна носить какое имя. Наиболее известный алгоритм часто называют исключением переменных из линейной системы по методу Гаусса, хотя Гаусс никогда не утверждал, что изобрел этот метод. На 21-м международном симпозиуме по математическому программированию в Берлине в 2012 г. упоминалось о появлении метода гауссового исключения в Китае более 2000 лет назад (скорее всего речь шла о Цзю Чжан Суан Шу, Девять глав о математическом искусстве, древней китайской книге, которую писало несколько поколений ученых с десятого по второй век до нашей эры). Не менее интересно рождение вариационного исчисления после изобретения брахистохроны. Все это произошло в 1696 году и было вызвано вызовом Иоганна Бернулли своим коллегам-математикам. Точно так же рождение теории графов в 1736 году не может быть пропущено. Эйлер, однако, не рассмотрел задачу о семи мостах Кёнигсберга как задачу оптимизации и, таким образом, не стал отцом комбинаторной оптимизации. (Занимательно узнать, что потребовалось более 200 лет, пока не была рассмотрена оптимизационная версия проблемы графа Эйлера. Это произошло в Китае.)

Задача о назначениях является одной из первых рассмотренных задач комбинаторной оптимизации. Она была исследована Монжем (можно добавить сюда про матрицы Монжа из второй главы!!!), хотя сперва она представлялась частным случаем задачи о непрерывности и часто называлась задачей о перевозках. Монжа интересовала задача о транспортировке земли, которую он считал дискретной комбинаторной задачей о переносе молекул. Есть две области одинаковой площади: одна заполнена землей, другая пустая. Вопрос состоит в том, чтобы переместить землю из первой области во вторую, таким образом, чтобы общее расстояние транспортировки было как можно меньшим. Общее расстояние транспортировки – это расстояние, на которое перемещается молекула, и которое суммируется по всем молекулам. Следовательно, это пример задачи о назначениях, очевидно, с огромной матрицей затрат.

Прорыв в решении задачи о назначениях случился, когда Данциг в 1951 году показал, что задачу назначения можно сформулировать как задачу линейного программирования, которая автоматически имеет целочисленное оптимальное решение. Причиной является теорема Биркгофа 1946 года, в которой утверждается, что выпуклая оболочка матриц перестановок равна множеству дважды стохастических матриц – неотрицательных матриц, в которых каждая сумма строк и столбцов равна 1. Поэтому минимизация линейного функционала над множеством этих дважды стохастических матриц (что является задачей линейного программирования) дает матрицу перестановок, являющуюся оптимальным назначением. Таким образом, проблема назначения может быть решена с помощью симплекс-метода. Вотау в 1952 сообщил, что решение проблемы назначения 10×10 с помощью симплекс-метода на системе «Восточный стандартный автоматический компьютер» (англ. SEAC) заняло 20 минут. С другой стороны, в своих воспоминаниях

Кун в 1991 году упоминал, что истстория началась летом 1953 года, когда Национальное бюро стандартов и другие правительственные учреждения США собрали выдающуюся группу комбинаториков и алгебраистов в Институте численного анализа (англ. INA), расположенном в кампусе Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе. Довольно уникальной особенностью INA было наличие «Западного стандартного автоматического компьютера» (англ. SWAC), вся память которого состояла из 256 электронно-лучевых трубок Уильямсона. SWAC был быстрее, но меньше, чем его родственная машина SEAC, который обладал жидкостной ртутной памятью и был закодирован для решения линейных программ.

Согласно Куну: задача назначения 10 на 10 представляет собой линейную программу с 100 неотрицательными переменными и 20 уравнениями (из которых требуется только 19). В 1953 году в мире не было машины, которая была запрограммирована на решение настолько большой линейной программы. Это также подстегнуло развитие оптимизации до вида, в каком мы работаем (и продолжаем улучшать) на настоящий момент.

Автоматизация процесса наблюдений всегда предполагалась для космических телескопов. Использование оптимизированных алгоритмов снижает затраты на управление, повышает безопасность проекта и оставляет больше времени для астрономов на занятия, собственно, астрономией.

Задача оптимизации наблюдений в самом общем случае — это задача сложности NP, как задача, относящаяся к динамическим многокритериальным задачам оптимизации. Идемпотентные аналоги численных алгоритмов удобны при решении как раз оптимизационных задач. Бесконечномерные линейные задачи в этом случае сводятся к конечномерным линейным аппроксимациям, а нелинейные алгоритмы приближаются к линейным.

Глава 3

Предлагаемое решение

Основная цель настоящей работы — разработка (на примере проекта Спектр-УФ) подхода к моделированию оптимального распределения наблюдательного времени для работы космических обсерваторий при помощи средств тропической алгебры. Для этого необходимо решить следующие задачи:

- разработать математическую модель распределения наблюдательного времени;
- исследовать структурную и вычислительную сложность модели на основе существующих методов;
- реализовать численный метод, при помощи которого найти решение за полиномиальное по размерности задачи время.
- разработать математическую модель задачи планирования наблюдений, для решения которой может быть использовано полученное решение и разработанный вычислительный метод.

Для решения поставленных задач использованы методы теории алгоритмов, теории графов, многокритериальной оптимизации, математического программирования, идемпотентной алгебры и теории нечетких множеств.

3.1 Модель

Пусть у нас есть j заявок на наблюдательное время. Они ранжируются по значимости *r(j)* (этим занимается астрофизический комитет по распределению наблюдательного времени), кроме того при создании модели необходимо учитывать положение цели наблюдения на небе *a(j)* (с целью минимизировать затраты на переход от одной цели к следующей), необходимую конфигурацию оборудования *c(j)* (с той же целью минимизации энергетических затрат при её смене), видимость объекта наблюдения *v(j)* (это определяется калькулятором зон засветки), а также является ли заявка триггерной (выполняемой только в определённых, заранее описанных случаях), пилотной (отправной для серии наблюдений) или связанной (входящей в состав связанного набора наблюдений)[9].

Таким образом мы получаем весовую функцию качества

$$F = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} q(j)a(j)s(j)$$

Это многокритериальная задача оптимизации, решением для которого явлется перестановка требований, и в общем случае это *NP-полная* задача[10]. Осуществим линейную свёртку критериев, будем решать вместо исходной многокритериальной задачи, задачу с одним взвешенным критерием [48]

$$max \sum_{j=1}^{N} \lambda_j q(j) \tag{3.1}$$

при разных значениях $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$, это позволяет свести задачу к задаче однокритериальной максимизации целевой функции.

3.2 О матроиде

Рассмотрим множество заявок на наблюдения и подмножество успешно выполненных заявок этого множества. Если обозначить рейтинг каждой заявки как её вес, то эта пара является матроидом, поскольку выполняются три условия:

– подмножество успешно выполненных заявок непусто, оно как минимум содержит пустое множество.

– любое подмножество множества успешно выполненных заявок входит в это же множество (как выполненные заявки ни выбирай, они будут входить в список выполненных).

– если у нас есть два подмножества A и B множества выполненных заявок и мощность A $\leqslant$ мощности множества B, то очевидно, что объединение множества A и любой выполненной заявки множества B, не входящей в множество A, всё равно будет принадлежать множеству выполненных заявок.

тогда можно применить «жадный» алгоритм поиска решения (см. [11]).

3.3 О кольце с идемпотентным сложением

Оптимизация наблюдательного времени «жадными» методами довольно распространена при составлении графиков работ обсерваторий [12], [13], [14], но использование тропической оптимизации позволяет получить прямое решение в компактной векторной форме.

Определим числовое множество $\mathbb{X}$, на котором заданы операции идемпотентного сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$. $\langle \mathbb{X}, \oplus, \otimes \rangle$ — коммутативное полукольцо с заданными единичным и нулевыми элементами $\mathbb{1}$ и $\mathbb{0}$. Сложение идемпотентно, для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$, выполняется $\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Умножение дистрибутивно относительно сложения и обратимо для всех элементов кроме $\mathbb{0}$. На множестве вещественных чисел примеры идемпотентных полуколец — $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$, $\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_{+} \cup \{+\infty\}, \min, \times, +\infty, 1 \rangle$, где $\mathbb{R}_{+}$ — множество положительных действительных чисел.

Для матриц $A, C \in \mathbb{X}^{m \times n}$ и векторов $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in \mathbb{X}^{m}$ общее линейое уравнение для неизвестного вектора $\in \mathbb{X}^{n}$ будет

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = C\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{d} \tag{3.2}$$

В силу отсутствия обратных по сложению элементов, данному уравнению не получится, как в стандартной алгебре, придать вид, в котором все слагаемые, содержащие неизвестный вектор $\boldsymbol{x}$, оказываются слева, а слагаемые без него — справа. Многие практические задачи (уравнения Беллмана) сводятся к частным случаям (3.2)

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

$$A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$$

В частности, (3.1).

Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц над $\mathbb{X}$, состоящих из m строк и n столбцов. Матрица, все элементы которой равны 0, считается нулевой. Матрица, у которой нет нулевых строк (столбцов), — регулярная по строкам (столбцам). Вектором назовём матрицу, состоящую из одного столбца или строки. Множество вектор-столбцов размерности n с элементами из $\mathbb{X}$ обозначается $\mathbb{X}_n$. Вектор регулярен, если у него нет нулевых компонент. Матрично-векторные операции сложения и умножения вводятся аналогично операциям в стандартной алгебре с заменой соответствующих покомпонентных операций на $\oplus$ и $\otimes$.

Мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ будем называть преобразование, при котором она трансформируется в транспонированную матрицу $\boldsymbol{A}^{-} = (a_{ij}^{-})$ с элементами $a_{ij}^{-} = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ij} \neq 0$, и $a_{ij}^{-} = 0$ в прочих случаях.

Рассмотрим квадратные матрицы из $\mathbb{X}^{n \times n}$. Обозначим через $\boldsymbol{I}$ единичную матрицу, на главной диагонали которой стоят $\mathbb{1}$, а вне её — $\mathbb{0}$. Тогда след квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле $tr\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus ... \oplus a_{nn}$.

Введем функцию, которая ставит в соответствие любой матрице $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ скаляр по правилу $\mathbf{Tr}\boldsymbol{A} = tr\boldsymbol{A} \oplus ... \oplus tr\boldsymbol{A}^n$.

При условии, что $\mathbf{Tr}\boldsymbol{A} \leqslant \mathbb{1}$, введем оператор, который сопоставляет матрице $\boldsymbol{A}$ матрицу $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus ... \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}$. Скаляр λ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A}$, если $\exists$ ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$.

Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ и вычисляется по формуле $\lambda = tr(\boldsymbol{A}) \oplus ... \oplus tr^{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{A}^n)$. Вектор, все компоненты которого равны $\mathbb{1}$, обозначается $\mathbf{1} = (\mathbb{1}...\mathbb{1})^{\mathrm{T}}$. Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^n$, и скаляр $r \in \mathbb{X}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$,, которые решают задачу

$$\min \boldsymbol{x}^{-} A\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r\,\boldsymbol{Bx} \leqslant \boldsymbol{x} \qquad (3.3)$$

Полное решение задачи получено в следующей теореме 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица с радиусом $\lambda\mathbb{0}$, а $\boldsymbol{B}$ — матрица, для которой $\mathbf{Tr}\boldsymbol{B} \leqslant \mathbb{1}$. Для любого натурального m и $l = 1..m$, введем обозначения

$$S_{0m} = \bigoplus_{i=0}^{m} \boldsymbol{B}^i,$$

$$S_{lm} = \bigoplus_{0\leqslant i_0+...+i_l\leqslant m_l} \boldsymbol{B}^{i_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}...\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_l},$$

Тогда минимум в задаче (3.3) равен

$$\theta = r \oplus \bigoplus_{l=1}^{n} tr^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{S}_{ln}) \oplus \bigoplus_{l=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{S}_{l,n-1}\boldsymbol{p})^{\frac{1}{l+2}}$$

, [29]

Глава 4

Результаты

Для сравнения алгоритмов применялись следующие предположения. Упростим задачу до 24 конфигураций оборудования (исходя из предположения, что у нас 4 прибора), необходимо расположить n заявок при учёте ограничений на видимость (учитывается наличие у телескопа мёртвых зон, а также наличие засветки), отдельно планируется последовательность исполнения заявок с учётом простоя, связанного со сменой конфигурации. Из предположения, что в среднем время экспозиции от 1000 до 2000 секунд, переконфигурирование может занимать до 10 минут, это сравнимые величины, которые нельзя не учитывать. Местонахождение аппарата моделируется как функция угловой скорости.

В литературе есть описание жадных алгоритмов поиска оптимального решения и генетического алгоритма для Инфракрасной космической обсерватории ISO [3], которые было реализовано в работе с моделью для проведения сравнения алгоритмов. В работе [28] для работы HST, который тоже был реализован на той же модели.

Для решения задачи перебора тропическими методами, предположим, что необходимо провести исследование списка заявок, выработать график их выполнения и осуществить его. Перед началом выполнения каждой заявки осуществляется конфигурация оборудования и разворот телескопа, а после завершения работы — сообщение об успешности/нет выполнения, при этом имеются ограничения на наиболее позднюю дату начара наблюдения, а также на наиболее раннюю возможную дату завершения работ. Для каждой завки известна продолжительность наблюдения, а также наличие зависимости между выполнением этих наблюдений и выполнением других заявок. Необходимо запланировать график работ таким образом, чтобы минимизировать максимальное время наблюдения для всех заявок с учетом всех ограничений.

Пусть имеется проект, состоящий из n операций. Для каждой операции с номером $i = 1..n$, обозначим время начала через x_i, а время окончания — через y_i. Каждая заявка завершается сразу, как только заданные условия для ее выполнения оказываются выполненными. Введем следующие обозначения: $a_i j$ — минимально возможная задержка между началом выполнения заявки, $j = 1..n$ и её окончанием i, $b_i j$ — наименьший допустимый интервал времени между началом наблюдений $j = 1..n$ и началом связанного наблюдения i, l_i — время начала выполнения последней заявки и k_i — время завершения программы работ на заданный период.

Запишем задачу планирования в виде задачи нахождения времени начала x_i и времени завершения y_i выполнения каждой заявки, которые минимизируют максимальное время выполнения программы наблюдений, представленное как разность между началом

S_i и завершением F_i программы:

$$\min \max_{1\leqslant i\leqslant n}(F_i - S_i), S_i = -\max(-x_i, -l_i), F_i = \max(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(a_ij + x_j), k_i)x_i \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}(b_ij + x \tag{4.1}$$

Задачу (4.1) представим в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Планирование выполнения заявок принимает форму задачи тропической оптимизации:

$$\min \boldsymbol{x}^{-} A \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{l}^{-} A \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{k} \oplus \boldsymbol{l}^{-} \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}$$

Заменив $\boldsymbol{l}^{-} A$ на $\boldsymbol{q}^{-}$, $\boldsymbol{l}^{-} \boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{r}$ и применив теорему 1, получаем решение задачи над полуполем $\mathbb{R}_{\max,+}$.

Оглавление

Содержание

Литература

[1] D. Adler, W. Kinzel, I. Jordan — «Planning and scheduling at STScI: from Hubble to the James Webb Space Telescope» Proc. SPIE 9149, Observatory Operations: Strategies, Processes, and Systems V, 91490D, 2014.

[2] Edited by Denis Bouyssou — «Decision-making Process Concepts and Methods»

[3] A. I. Gómez de Castro and J. Yañez — «Optimization of telescope scheduling. Algorithmic research and scientific policy»

[4] Г.Л. Литвинов, В.П. Маслов — Идемпотентная математика: принцип соответствия и его компьютерные приложения, УМН, 1996, том 51, выпуск 6(312), 209– 210

[5] А.А. Лазарев, Е.Р. Гафаров — Теория расписаний, задачи и алгоритмы. Москва, 2011

[6] M. Drummond, K. Swanson, J. Bresina, A. Philips, R. Levinson — Applying artificial intelligence to the control of space telescopes

[7] К.Э. Циолковский — Исследование мировых пространств реак-

тивными приборами, Научное обозрение №5, С.-Петербург, май 1903

[8] Г.Л. Литвинов — «Универсальные алгоритмы и идемпотентная математика» КИО. 2000. №6. URL:https://cyberleninka.ru/article/n/universalnye-algoritmy-i-idempotentnaya-matematika (дата обращения: 27.03.2018).

[9] O. Malkov, M. Sachkov et al. — Scientific program construction principles and time allocation scheme for the WSO-UV mission, Astrophys Space Sci (2011) 335: 323–327

[10] B.J. Lageweg, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan — Computer aided complexity classification of deterministic scheduling problems, 1981, Report BM 138, Centre for Mathematics and Computer Science.

[11] В.Е. Алексеев, В.А. Таланов — Графы и алгоритмы, Intuit, 2006 - ISBN 5-9556-0066-3.

[12] J. Colomé et al, «Research on schedulers for astronomical observatories,"Proc. SPIE 8448, Observatory Operations: Strategies, Processes, and Systems IV», 2012;

[13] Balzano, V., Zak, D., and Whitman, W., "The Care and Feeding of the JWST On-board Event-driven System", Proc. SPIE, 7737-18 (2010).

[14]

[15] Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. — «Основы

дискретной комбинаторной оптимизации.» М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016

[16] F. Hochbaum «Approximation Algorithms for NP-Hard Problems». PWS, Boston, 1996.

[17] U. Asano et al «Designing high-quality approximation algorithms for combinatorial optimization problems», IEICE Transactions on Communications/Electronics/Information and Systems E83-D. 2000. P. 462-478.

[18] R. R. Nazirov et al — «Mission Design Problems for the Spectrum-Roentgen-Gamma Project», 2019, Kosmicheskie Issledovaniya, 2019, Vol. 57, No. 1, pp. 74–80.

[19] P. Verderame, J. Elia, Jie Li, C. Floudas — «Planning and Scheduling under Uncertainty: A Review Across Multiple Sectors», 2010б Ind. Eng. Chem. Res.20104993993-4017

[20] M. Johnston — The Application of Artificial Intelligence to Astronomical Scheduling Problems, 1993, ASPC vol. 52, pp 329-339.

[21] L. Kramer and M. Giuliano — «Reasoning About and Scheduling Linked HST Observations with SPIKE», In Workshop Notes of the International Workshop on Planning and Scheduling for Space Exploration and Science, Oct. 1997.

[22] S. Minton, M. Johnston, A. Philips, P. Laird — «Minimizing conflicts: a heuristic repair method for constraint satisfaction and scheduling problems», 1992, Artificial Intelligence. 58 (1): 161–205

[23] R. Cuninghame-Green «Projections in minimax algebra.» Math. Program., 1976, vol. 10, pp. 111–123.

[24] A. J. Hoffman. On abstract dual linear programs. Naval Res. Logist. Quart., 10(1):369–373, 1963

[25] S. N. N. Pandit. A new matrix calculus. J. SIAM, 9(4):632–639, 1961.

[26] Skiena S. S. The Algorithm Design Manual. Second edition. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

[27] Корнилов М. «Оперативное планирование астрономических наблюдений на основе информации астроклиматического монитора на примере 2.5 м телескопа», дисс. канд. физ-мат наук, 01.03.02, МГУ им. М.В.Ломоносова – Москва, 2016, 137 л.

[28] R. Samson — «Greedy search algorithm used in the automated scheduling of Hubble Space Telescope activities», Proc. SPIE 3349, Observatory Operations to Optimize Scientific Return, 1998

[29] Кривулин Н. К., Сорокин В. Н. Решение задач тропической оптимизации при наличии ограничений с приложением к управлению сроками проектов // Модели и методы тропической математики в прикладных задачах экономики и управления. Сб. науч. статей. Вып. 2 / Под ред. Н. К. Кривулина.— СПб.: «ВВМ», 2014. — С. 24–45.

[30] Krivulin N. K., Gubanov S. A. Solution of a project scheduling problem by using methods of tropical mathematics. Vestnik of Saint

Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes, 2016, issue 3, pp. 62–72.

[31] В.П. Маслов, В. Н. Колокольцов «Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении». М.: Физматлит, 1994. 144 с.

[32] Г. Шпиз, «Решение алгебраических уравнений в идемпотентных полуполях» // Успехи математических наук. 2000. Т. 55. Вып. 5(335). С. 185–186.

[33] W. Cook «In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation». Princeton University Press, 2012. P. 19–39.

[34] А. Левитин «Алгоритмы. Введение в разработку и анализ.» Вильямс, 2006. P. 160.

[35] Е.М. Захарова, И.К. Минашина «Обзор методов многомерной оптимизации» // Информационные процессы, 2014. Том 14, № 3. стр. 265–266.

[36] F. Delgado, G. Schumacher «The LSST OCS scheduler design» // Proc. SPIE. Vol. 9149. 2014. P. 91490G–91490G–13.

[37] J. Colomé et al «The TJO-OAdM Robotic Observatory: the scheduler» // Proc. SPIE. Vol. 7740. 2010. P. 77403K–77403K–12.

[38] W. Mahoney W., C. Veillet, K. Thanjavur «A genetic algorithm for groundbased telescope observation scheduling» // Proc. SPIE. Vol. 8448. 2012. P. 84480W–84480W–14. 10.

[39] D. Silva «Service mode scheduling at the ESO very large telescope» // Proc. SPIE. Vol. 4844. 2002. P. 94–103.

[40] M. Garey, D. Johnson, «Computers and Intractability — A Guide to the Theory of NP-Completeness», 1979, (New York: W. H. Freeman and Co.)

[41] P. Martínez, J. Yañez, «Neural Networks», 2002, 15 (3), 363

[42] O. Basargina, M. Sachkov, «New approach to the space mission program optimisation: WSO-UV» // Proceedings of SPIE, 2018, Vol. 10704, #UNSP 107042L

[43] O. Basargina; M. Sachkov; Y. Kazakevich; E. Kanev; «WSO-UV ground segment for observation optimization» // Published in SPIE Proceedings, 2016, Vol. 9905.

[44] Ermakov S.M., Krivulin N.K. Efficient algorithms for tandem queueing system simulation // Applied Mathematics Letters. 1994. Vol. 7, N 6. P. 4549.

[45] Antunes, A.; Nagase, F.; Isobe, T. — «Interactive Dynamic Mission Scheduling for ASCA» Astronomical Data Analysis Software and Systems III, A.S.P. Conference Series, Vol. 61, 1994, Dennis R. Crabtree, R.J. Hanisch, and Jeannette Barnes, eds., p. 485.

[46] Gómez-Alvarez, P.; Brumfitt, J.; Lorente, R.; García-Lario, P. — «HILTS: The Herschel Inspector and Long-Term Scheduler» Astronomical Data Analysis Software and Systems XX. ASP Conference Proceedings, Vol. 442, proceedings of a Conference held

at Seaport World Trade Center, Boston, Massachusetts, USA on 7-11 November 2010.

[47] Brumfitt, Jon; Gómez-Alvarez, Pedro; Villacorta, Antonio; García-Lario, Pedro; Lorente, Rosario; O'Rourke, Laurence— «Herschel Mission Planning Software », 2011, eprint arXiv:1106.3245

[48] В.Д. Ногин — «Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации», 2014, Искусственный интеллект и принятие решений, 4/2014, стр. 73-82