

ПР 1959 1965

Том. I

1924 г.

Вып. I.

РУССКИЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

НОВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ЛАМБЕРТА и ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОРБИТ.

М. Ф. Субботин.

1. Новая форма уравнения Эйлера-Ламберта.

§ 1. Введение. Уравнение Эйлера-Ламберта представляет одно из наиболее замечательных и наиболее характерных свойств Кеплерова движения. Можно было бы, поэтому, ожидать, что это изящное соотношение будет играть видную роль при определении орбит: но в действительности, как известно, случилось иначе. Только способ Ольберса (Olbers'a), трактующий частный случай этой проблемы, широко пользуется уравнением Эйлера, что же касается до общего случая задачи определения орбиты по трем наблюдениям, то во всех предложенных способах ее решения рассматриваемое соотношение не играет заметной роли.

Ненормальность такого положения дела чувствовалась, однако, с самого начала, и еще Гаусс, изложив свой классический способ вычисления отношения площади треугольника к площади сектора, указал на возможность иного, основанного на употреблении уравнения Ламберта, трактования этого важнейшего момента вычисления орбиты. Интересная сводка наиболее замечательных исследований, к которым подала повод эта идея в течении XIX столетия, была сделана Каландро (Callandrea) в его известном мемуаре *Aperçu des méthodes pour la détermination des orbites des comètes et des planètes (Annales de l'Observatoire de Paris, Vol. XX)*.

Наибольший успех имело осуществление идеи Гаусса в отношении параболообразных кометных орбит, когда уравнение Ламберта может быть разложено в быстро сходящийся ряд. Что же касается до планетных орбит, то несмотря на замечательное преобразование уравнения Ламберта, данное Клинкерфусом (Klinkerfuss),¹⁾ нельзя сказать чтобы до настоящего времени употребление этого уравнения давало осознательные выгоды даже по сравнению с первоначальным способом Гаусса, не говоря уже о новых.

¹⁾ Theoretische Astronomie, 1871, стр. 257.

Причину такого положения дела следует видеть в том, что уравнение Ламберта, как бы нарочно существующее для определения важнейшего элемента орбиты—большой полуоси, заключает эту величину очень сложным образом, недопускающим простого разрешения. Предложенные до сих пор преобразования имели своей целью лишь облегчение вычисления правой части соотношения

$$\Theta a^{-\frac{3}{2}} = \varepsilon - \sin \varepsilon - (\delta - \sin \delta) \quad (1)$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r + r' + s}{4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r + r' - s}{4a}}, \quad \Theta = k(t - t')$$

т. е. лишь косвенное содействие разрешению этого уравнения относительно a .

Иключение представляет только упомянутое выше преобразование Клинкерфуса, который заменяет уравнение (1) таким

$$\frac{1}{2a} = \frac{2}{r + r'} - \frac{1}{\xi^2}$$

при чем ξ определяется следующим приближенным равенством:

$$\xi = \frac{\Theta}{2} \sqrt{2} + \left(\frac{2}{r + r'} \right)^3 \frac{s^2 \xi^3}{24} + \left(\frac{2}{r + r'} \right)^4 \frac{s^2 \xi^5}{32}.$$

Этим путем можно сравнительно легко найти достаточно точное значение корня уравнения (1), чем существенно облегчается его окончательное разрешение.

В настоящей работе я хочу изложить применение к определению орбит новой формы уравнения Ламберта¹⁾ дающей возможность совершенно точно и сравнительно очень просто разрешать это уравнение относительно большой полуоси. Правда, при этом требуются некоторые вспомогательные таблицы; но если ограничиться шестизначной точностью, то эти таблицы могут быть весьма коротки, а для планетных орбит при обычных промежутках времени между наблюдениями можно обходиться и совсем без таблиц (см. § 7).

С другой стороны, оказывается возможным расположить по тем же аргументам, как и только что упомянутые таблицы, таблицы дающие η —отношение площади треугольника и площади соответственного сектора. Таким образом нахождение этой важной величины неразрывно связывается с уравнением Ламберта, и открывается возможность дать способ вычисления орбит столь же простой в практическом отношении, как и в теоретическом.

¹⁾ Эта новая форма (найденная в 1918 г.) была мною впервые использована для определения орбиты в статье, переданной в июле 1919 г. редактору Известий Донского Политехнического Института. Краткое изложение результатов настоящей работы содержится в двух статьях, напечатанных в *Monthly Notices*. (Vol. 82, стр. 383 и 419). В этих же статьях помещены примеры вычисления орбит изложенным способом.

Более того—уравнение Ламберта в своем новом виде не только позволяет создать наиболее естественный и удобный метод первоначального определения орбит, но дает также возможность значительно упростить способ вариации геоцентрических расстояний и тем значительно расширить круг применений этого способа улучшения орбит.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАМБЕРТА. Ради простоты ограничимся тем, имеющим наибольшее значение, случаем, когда внутри сегмента, ограниченного дугой, описанной светилом, и соответствующей хордой, не заключается ни один из фокусов конического сечения.

Соответствующее этому случаю уравнение (1) обращается при применении к двум бесконечно близким положениям светила в интеграл живых сил

$$\left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\Theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\Theta}\right)^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}.$$

Естественно, поэтому, и в общем случае представить уравнение (1) в таком виде

$$\frac{1}{4a} = \frac{\tau}{r + r'} - \frac{s^2}{4\Theta^2}, \quad (2)$$

при чем, очевидно, при $\Theta = 0$ будет $\tau = 1$.

Полагая

$$R = \frac{r + r'}{4a}, \quad c = \frac{s}{r + r'}$$

будем иметь

$$\tau = \frac{r + r'}{4a} - \frac{s^2}{4\Theta^2}(r + r') = R + c^2 R^3 \frac{16a^3}{\Theta^2} \quad (3)$$

Следовательно, в случае эллиптического движения,

$$\tau = R + \frac{16R^3 c^2}{(e - \sin \epsilon - \delta + \sin \delta)^2}, \quad (4)$$

причем

$$\sin \frac{\epsilon}{2} = \sqrt{R(1+c)}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{R(1-c)}.$$

Хотя уравнение (2) и заключает в правой части a , тем не менее решение его относительно этой величины выполняется крайне просто по следующим двум причинам: во первых τ , зависящий лишь от R и c , может браться по этим двум аргументам из вычисленной заранее таблицы; во вторых, τ во всех встречающихся на практике случаях крайне мало отличается от единицы, а потому с изменением R изменяется лишь незначительно.

Возьмем следующий пример, рассматриваемый Клинкерфусом: (loc. cit., стр. 261) дано.

$$r + r' \dots 0,6275449, \quad s \dots 9,4525659 \quad \Theta \dots 9,5766974$$

требуется определить a .

Для первого приближения полагаем $\tau = 1$, что дает

$$\frac{1}{4a} \dots 8.97591, \quad R = 0.40128, \quad c^2 \dots 7.65004.$$

По этим значениям аргументов R и $c^2 = \sigma$ из таблиц находим $\lg \tau = -0.0001635$, после чего уравнение (2) дает

$$\frac{1}{4a} \dots 8.9754978, \quad R = 0.400906.$$

Если повторим вычисление еще раз, то получим

$$\tau \dots -0.0001630, \quad \frac{1}{4a} \dots 8.9754990,$$

следовательно, $\lg a = 0.4224410$. Последний десятичный знак не имеет, конечно, реального значения, ибо при таком небольшом промежутке времени (около 22 дней) значение r , r' и s с семью знаками позволяет найти a не более чем с шестью.

Следует заметить, что на самом деле всегда можно начать с гораздо более точного значения r , нежели $r = 1$, так что более одного раза повторять вычисление не приходится.

Так как в случае гиперболического движения ($a < 0$) уравнение Ламберта имеет вид

$$(-a)^{-\frac{3}{2}} \Theta = \sinh \varepsilon - \varepsilon - (\sinh \delta - \delta)$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{r + r^2 + s}{-4a}}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{r + r' - s}{-4a}},$$

то выражение (3) дает для этого случая

$$\tau = R - \frac{16 R^3 C^2}{(\sin h \varepsilon - \varepsilon + \delta - \sin h \delta)^2}, \quad (4a)$$

при чём

$$\sinh \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{-R(1+c)}, \quad \sin h \frac{\delta}{2} = \sqrt{-R(1-c)}.$$

Наконец, для случая параболического движения, когда $R = 0$, находим

$$\tau = \left[\frac{3c}{(1+c)^{\frac{3}{2}} - (1-c)^{\frac{3}{2}}} \right]^2. \quad (4b)$$

§ 3. ВЫРАЖЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА К ПЛОЩАДИ СЕКТОРА ЧЕРЕЗ R И c . Пользуясь известными соотношениями между эксцентрической и истинной аномалиями, получаем

$$\{ \text{пл. } \triangle - \text{ка} = \frac{1}{2} rr' \sin(v' - v) = \sqrt{\frac{p}{2}} a^{\frac{3}{2}} [\sin(u' - u) - e(\sin u' - \sin u)].$$

Вводя опять в рассмотрение углы ε и δ и замечая, что

$$u' - u = \varepsilon - \delta,$$

легко найдем, при помощи уравнений Кеплера и Ламберта, что

$$e(\sin \nu' - \sin u) = \sin \varepsilon - \sin \delta.$$

Следовательно

$$\text{пл. } \Delta\text{-ка} = \frac{\sqrt{p}}{2} a^{\frac{3}{2}} [\sin(\varepsilon - \delta) - \sin \varepsilon + \sin \delta].$$

С другой стороны, площадь соответствующего сектора равна

$$\frac{\sqrt{p}}{2} \Theta = \frac{\sqrt{p}}{2} a^{\frac{3}{2}} (\varepsilon - \delta - \sin \varepsilon + \sin \delta),$$

а потому искомое отношение η выражается так

$$\eta = \frac{\sin(\varepsilon - \delta) - \sin \varepsilon + \sin \delta}{\varepsilon - \delta - \sin \varepsilon + \sin \delta}, \quad \sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{R(1+e)}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{R(1-e)}.$$

Полагая в этом равенстве $a = \infty$, получим соответствующую формулу для параболической орбиты:

$$\eta = \frac{3 \sqrt{1-e^2}}{2 + \sqrt{1-e^2}}.$$

Для гиперболической орбиты выкладки аналогичные только что приведенным дают

$$\eta = \frac{\sinh(\varepsilon - \delta) - \sinh \varepsilon + \sinh \delta}{\varepsilon - \delta - \sinh \varepsilon + \sinh \delta} \quad (5)$$

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{-R(1+e)}, \quad \sinh \frac{\delta}{2} = \sqrt{-R(1-e)}.$$

II. ВЫЧИСЛЕНИЕ И РАСПОЛОЖЕНИЕ ТАБЛИЦ.

§ 4. Только что указанная форма уравнения Ламберта может играть большую роль в Теоретической Астрономии лишь при наличии удобного способа нахождения τ и η для данных значений R и e . Формулы, определяющие эти величины в случае эллиптического движения,

$$\begin{aligned} \tau &= R + 16 R^3 e^2 M^{-2}, & \eta &= [\sin(\varepsilon - \delta) - \sin \varepsilon + \sin \delta] M^{-\frac{1}{2}} \\ M &= \varepsilon - \delta - \sin \varepsilon + \sin \delta & & \\ \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sqrt{R(1+e)}, & \sin \frac{\delta}{2} &= \sqrt{R(1-e)} \end{aligned} \quad (6)$$

дало пригодны для этой цели, ибо, не говоря уже об их сложности, они заключают в правых частях отношение двух малых величин (соответственно второго и первого порядков); так как с обычно очень малая величина, то неудобство может быть весьма чувствительно. Еще менее пригодны соответствующие формулы для гиперболического движения, заключающие гиперболические функции.

Нетрудно освободить формулы (6) от их главного, только что указанного недостатка — достаточно, положив для краткости $\epsilon = 2A$, $\delta = 2B$, переписать их следующим образом

$$\tau := R \left\{ 1 + \frac{\sin^2(A+B)}{\left[\frac{A-B}{\sin(A+B)} - \cos(A+B) \right]^2} \right\}, \quad \eta = \frac{2 \sin A \sin B}{\frac{A-B}{\sin(A+B)} - \cos(A+B)}. \quad (7)$$

$$\sin A = \sqrt{R(1+\epsilon)} \quad \sin B = \sqrt{R(1-\epsilon)}.$$

При малых значениях ϵ в этих формулах тоже будет находиться отношение двух малых величин, но здесь его можно найти без всякой потери точности при помощи таблицы значений функции $\log \frac{v}{\sin v}$.¹⁾

Во всяком случае формулы, дающие τ и η слишком сложны и потому необходимо иметь для определения этих величин вычисленные заранее таблицы. Для вычисления таких таблиц выгодно разложить τ и η в ряды по степеням R и ϵ . Прежде, однако, чем перейти к выводу этих разложений, необходимо посмотреть, с какими значениями R и ϵ приходится иметь дело на практике, так как это определяет с одной стороны пределы таблиц, а с другой — укажет, какое число членов должно бытьдержано в разложениях.

§ 5. Значения R и ϵ , встречающиеся при вычислении орбит. Рассмотрим сначала величину

$$R := \frac{r+r'}{4a},$$

зависящую главным образом от формы орбиты.

Для эллиптической орбиты наибольшее и наименьшее значение радиуса-вектора, отвечающие моментам прохождения через афелий иperiгелий, равны соответственно $a(1+e)$ и $a(1-e)$, следовательно для такой орбиты

$$\frac{1-e}{2} < R < \frac{1+e}{2}.$$

Так как эксцентриситеты планетных орбит < 0.4 (исключение представляет лишь одна планета), то для планет

$$0.3 < R < 0.7.$$

Следует при этом заметить, что эксцентриситеты большие 0.3 имеют только 19 планет из первых 714. Поэтому крайне мало вероятно, чтобы для малой планеты R оказалось вне интервала 0.35 — 0.65.

Для периодических комет, у которых эксцентриситет бывает значительно больше, R может меняться в более широких пределах. Однак-

¹⁾ Р. Наггер поместил в *Astr. Nachr. Bd. 195* таблицу значений этой функции по аргументу $\lg v$ от $\lg v = 8.800$ до $\lg v = 9.700$. Для малых значений таблиц этой функции имеются в таблицах логарифмов.

доступной для наблюдений является лишь часть орбиты кометы, близкая к перигелию, каковое обстоятельство значительно понижает верхний предел для R . Принимая, что кометы обычно наблюдаются на расстоянии от Солнца не превышающем $r=3$, получим $R_{max} = \frac{3}{2a}$. Вот крайние значения R для некоторых периодических комет:

Комета.	Ел ск е.	B r o r s e n.	T e m p e l.	H a l l e y.
e	=	0.85	0.81	0.40
q	=	0.34	0.59	2.09
R _{min}	=	0.08	0.09	0.30
R _{max}	=	0.68	0.49	0.43
				0.08

Таким образом ради комет не приходится менять намеченную выше верхнюю границу для R , нижнюю же границу надо опустить до $R=0$.

Остается рассмотреть кометы, движущиеся по гиперболическим орбитам. Для всех таких комет, известных по настоящее время $|a| > 15$, а потому, принимая опять за предел видимость $r=3$, получим нижний предел $R=-0.1$.

Итак во всех встречающихся на практике случаях

$$-0.1 < R < 0.7$$

Рассмотрим теперь другой аргумент

$$c = \frac{s}{r + r'}$$

Для малых планет радиус-вектор изменяется сравнительно мало, следовательно величина c обусловливается, главным образом, величиной хорды s , т.-е. промежутком времени между наблюдениями. Считая, что планета движется по круговой орбите, при чем ее суточное среднее движение равно $13'$ (средняя величина для известных в настоящее время малых планет), будем иметь:

$$c = \sin \frac{13'(t' - t)}{2}$$

При промежутке времени между наблюдениями в 60 дней эта формула дает $c=0.113$, при $t' - t = 120^d$ получаем $c=0.225$.

Как увидим ниже, таблицы выгоднее располагать не по аргументу c , а по аргументу $\sigma = c^2$. Приведенный расчет показывает, что для малых планет нужно охватить таблицами интервал

$$0.0 \leqslant \sigma \leqslant 0.1$$

При вычислении кометных орбит приходится иметь дело с большими значениями σ . Эти более значительные величины σ отвечают всегда близким к нулю значениям R , ибо соответствуют наблюдениям близким к моменту прохождения через перигелий, когда гелиоцентрическое движение кометы наиболее быстро.

Все это показывает, что таблица значений каждой из величин τ и η должна охватывать две области значений аргументов: область

$$0.4 \leq R \leq 0.7, \quad 0.0 \leq \sigma \leq 0.1,$$

отвечающую, главным образом, малым планетам, и область

$$-0.1 \leq R \leq 0.4, \quad 0.0 \leq \sigma \leq 1.0,$$

обслуживающую кометы.

Мы, конечно, имеем все время в виду случай, когда все рассматриваемые наблюдения принадлежат одной оппозиции планеты или одному появлению периодической кометы. При применении излагаемого ниже способа вариации геоцентрических расстояний к наблюдениям, не удовлетворяющим этим условиям, приходится встречаться с большими значениями σ . Может даже случиться, что гелиоцентрическое движение светила превзойдет 180° и формулы (6) придется соответствующим образом изменить. Не останавливаясь в настоящей работе на относящихся сюда вопросах, мы ограничимся лишь указанием интересной зависимости, существующей между R и σ . Оказывается, при $R > 0.5$ каждому значению R отвечает некоторая верхняя граница (меньшая единицы) для значений σ .

Пусть u и u' значения эксцентриситической аномалии, отвечающие двум положениям светила, так что

$$r + r' = 2a \left(1 - e \cos \frac{u' + u}{2} \cos \frac{u' - u}{2} \right)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} s^2 &= a^2 (\cos u' - \cos u)^2 + a^2 (1 - e^2) (\sin u' - \sin u)^2 = \\ &= 4a^2 \sin^2 \frac{u' - u}{2} \left[1 - e^2 \cos^2 \frac{u' + u}{2} \right]. \end{aligned}$$

Полагая

$$\frac{u' - u}{2} = g, \quad e \cos \frac{u' + u}{2} = m$$

получим

$$R = \frac{r + r'}{4a} = \frac{1}{2} (1 - m \cos g), \quad \sigma = \left(\frac{s}{r + r'} \right)^2 = \frac{\sin^2 g (1 - m^2)}{(1 - m \cos g)^2}.$$

Исключение m дает

$$\sigma = \frac{\sin^2 g [\cos^2 g - (1 - 2R)^2]}{4R^2 \cos^2 g}.$$

Это выражение, рассматриваемое как функция $\cos^2 g$ имеет *maximum* при $\cos^2 g = -1 + 2R$, при чем этот *maximum* равен

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{1 - R}{R} \right)^2$$

Вот несколько значений последнего выражения

$$\begin{array}{ccccc} R = 0.5, & 0.6, & 0.7, & 0.8, & 0.9 \\ \frac{\sigma}{\max} = 1.000, & 0.444, & 0.184, & 0.062, & 0.012, \end{array}$$

§ 6. Разложение τ и η по степеням R . Мы только что видели, что значения τ и η приходится вычислять для двух групп аргументов: одна группа характеризуется весьма небольшими значениями σ , другая — небольшими значениями R . В первом случае удобнее разложения по степеням σ , во втором — по степеням R . Займемся сначала вторым случаем.

Без труда находим

$$M = \sin \varepsilon - \delta + \sin \delta = \frac{4}{3} R^{\frac{3}{2}} c_3 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} R^{\frac{5}{2}} c_5 + \frac{4}{7} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} R^{\frac{7}{2}} c_7 + \frac{4}{9} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} R^{\frac{9}{2}} c_9 + \dots,$$

где для краткости положено

$$c_n = (1 + c)^{\frac{n}{2}} - (1 - c)^{\frac{n}{2}}$$

С другой стороны легко видеть, что

$$\begin{aligned} \sin(\varepsilon - \delta) - \sin \varepsilon + \sin \delta = 4 R^{\frac{3}{2}} (1 - c^2) \left\{ -c_4 - \frac{1}{2} R c_4 + \frac{1}{8} R^2 c_3 + \frac{1}{16} R^3 c_5 + \right. \\ \left. + \frac{5}{128} R^4 c_7 + \frac{7}{256} R^5 c_9 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Подстановка этих рядов в формулы (6) даст искомые разложения по степеням R , которым удобно придать следующую форму (полагаем $c^2 = \sigma$)

$$\tau = \tau_0 \mu, \quad \eta = \eta_0 \nu \quad (8)$$

при чём

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \left(\frac{3c}{c_3} \right)^2 = 1 + \frac{1}{12} \sigma + \frac{1}{48} \sigma^2 + \frac{7}{864} \sigma^3 + \frac{83}{20736} \sigma^4 + \frac{95}{41472} \sigma^5 + \frac{1363}{746496} \sigma^6 + \dots \\ \tau_0 &= \frac{3c_1 \sqrt{1 - c^2}}{c_3} = 1 - \frac{1}{3} \sigma - \frac{5}{36} \sigma^2 - \frac{17}{216} \sigma^3 - \frac{269}{5184} \sigma^4 - \frac{1163}{31104} \sigma^5 - \frac{10657}{373248} \sigma^6 - \dots \\ \mu &= 1 + \mu_1 R + \mu_2 R^2 + \mu_3 R^3 + \dots \\ \nu &= 1 + \nu_1 R + \nu_2 R^2 + \nu_3 R^3 + \dots \end{aligned}$$

Коэффициенты выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \left(\frac{c_3}{3c} \right)^2 - \frac{3}{5} \frac{c_5}{c_3} = -\frac{1}{4} \sigma - \frac{1}{30} \sigma^2 - \frac{97}{8640} \sigma^3 - \frac{137}{25920} \sigma^4 - \dots \\ \mu_2 &= -\frac{1}{4} \sigma + \frac{7}{240} \sigma^2 + \frac{5}{672} \sigma^3 - \dots \\ \mu_3 &= -\frac{1}{4} \sigma + \frac{7}{240} \sigma^2 + \frac{13}{6048} \sigma^3 - \dots \\ \mu_4 &= -\frac{1}{4} \sigma - \frac{1}{30} \sigma^2 - \dots \\ \mu_5 &= -\frac{1}{4} \sigma - \frac{19}{120} \sigma^2 - \dots \\ \nu_1 &= \frac{\sqrt{1 - c^2}}{2} - \frac{3}{10} \frac{c_5}{c_3} = -\frac{1}{3} \sigma - \frac{13}{180} \sigma^2 - \frac{37}{1080} \sigma^3 - \frac{541}{25920} \sigma^4 - \frac{2239}{155520} \sigma^5 - \dots \\ \nu_2 &= -\frac{1}{3} \sigma - \frac{11}{45} \sigma^2 - \frac{67}{840} \sigma^3 - \dots, \end{aligned}$$

$$\tau_3 = -\frac{1}{3}\sigma + \frac{1}{30}\sigma^2 + \frac{1}{216}\sigma^3 + \dots,$$

$$\tau_4 = -\frac{1}{3}\sigma - \frac{7}{180}\sigma^2 - \frac{61}{1890}\sigma^3 - \dots,$$

$$\tau_5 = -\frac{1}{3}\sigma - \frac{7}{36}\sigma^2 - \frac{5}{252}\sigma^3 - \dots,$$

Можно отметить, что все коэффициенты разложений τ и τ_i по степеням R выражаются рационально через σ и $\sqrt{1-\sigma}$.

Конечные выражения τ_0 и τ_{10} удобно представить в следующей форме

$$\tau_0 = \frac{9}{2} \frac{1+3\sigma-(1-\sigma)^{3/2}}{(3+\sigma)^2}, \quad \tau_{10} = \frac{3}{1+2(1-\sigma)^{-1/2}}$$

Так как удобнее иметь таблицы, дающие не τ и τ_i , а логарифмы этих величин, то формулам (8) мы придадим такой вид

$$\lg \tau = \lg \tau_0 - \frac{R}{1-R} m + \Delta \lg \tau, \quad \lg \tau_i = \lg \tau_{10} - \frac{R}{1-R} n + \Delta \lg \tau_i, \quad (9)$$

где

$$m = M \frac{45 - 42\sigma - 115\sigma^2 - (45 + 28\sigma - 37\sigma^2)\sqrt{1-\sigma}}{45[3 + 4\sigma + \sigma^2 + (3 + \sigma)\sqrt{1-\sigma}]}$$

$$n = M \frac{2}{5} \frac{1 - (1 + 2\sigma)(1 - \sigma)^{-1/2}}{1 + 2(1 - \sigma)^{-1/2}}, \quad M = 0,43429 \dots,$$

$$\begin{aligned} \Delta \lg \tau &= \sigma^2 (0,013572 R^2 - 0,0543 R^4 - 0,109 R^5 - \dots) \\ &\quad + \sigma^3 (0,00449 R^1 + 0,0031 R^3 + \dots) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \lg \tau_i &= -\sigma^2 (0,11340 R^2 + 0,0241 R^3 + 0,058 R^4 + 0,15 R^5 + \dots) - \\ &\quad - \sigma^3 (0,03022 R^2 + 0,0343 R^3 + 0,066 R^4 + \dots) - \dots \end{aligned}$$

По этим формулам и была вычислена таблица II. Вычисление $\lg \tau_0$ и $\lg \tau_{10}$ было произведено при помощи восьмизначных таблиц, благодаря чему ошибка табличных значений этих величин может быть несколько более половины седьмого десятичного знака, что, конечно, не имеет практического значения.

Хотя мы исходили из формул (6), относящихся к эллиптическому движению, тем не менее, полученные результаты, в частности формулы (8) и (9), остаются в силе и для гиперболического движения — это ясно, *a priori* и, кроме того, легко может быть проверено при помощи формул (4а) и (5).

§ 7. Разложение τ и τ_i по степеням σ . Эти разложения могли бы быть получены из рядов, найденных в предыдущем параграфе, путем перестановки членов, но так как в рассматриваемом случае нужно принять во внимание очень высокие степени R , доводить до которых эти ряды было бы тяжело, то предпочтительнее вывести эти новые разложения независимо, тем более, что наш вывод обнаружит попутно замечательное

свойство этих разложений: коэффициенты при степенях c суть рациональные функции R .

Займемся прежде всего разложением функции

$$M = \varepsilon - \delta - \sin \varepsilon + \sin \delta$$

по степеням c . Так как

$$\frac{1}{2R} \frac{\partial M}{\partial c} = \sqrt{\frac{R(1+c)}{1-R(1+c)}} + \sqrt{\frac{R(1-c)}{1-R(1-c)}},$$

то

$$\begin{aligned} M = 4R \sqrt{\frac{R}{1-R}} c & \left[1 + \frac{-1+4R}{3.2^1} \left(\frac{c}{1-R} \right)^2 + \frac{-5+24R-48R^2+64R^3}{5.2^2} \right. \\ & \left(\frac{c}{1-R} \right)^4 + \frac{-21+140R-400R^2+640R^3-640R^4+512R^5}{7.2^6} \left(\frac{c}{1-R} \right)^6 + \\ & + \frac{-429+3696R-14112R^2+31360R^3-44800R^4+43008R^5-28672R^6+16384R^7}{9.2^8} \times \\ & \times \left(\frac{c}{1-R} \right)^8 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя этот ряд в (6) получим для τ следующее разложение

$$\begin{aligned} \tau = 1 + \frac{1-4R}{12(1-R)} c + \frac{5-28R+56R^2-48R^3}{240(1-R)^3} c^2 + \\ + \frac{245-1806R+5496R^2-8984R^3+8424R^4-4320R^5}{30240(1-R)^5} c^3 + \dots \end{aligned}$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sin(\varepsilon - \delta) - \sin \varepsilon + \sin \delta = 4R \sqrt{\frac{R}{1-R}} c & \left[1 + \frac{-3+4R}{8} \left(\frac{c}{1-R} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{-17+72R-112R^2+64R^3}{128} \left(\frac{c}{1-R} \right)^4 + \\ & + \frac{-75+476R-1264R^2+1792R^3-1408R^4+512R^5}{1024} \left(\frac{c}{1-R} \right)^6 + \\ & + \frac{-1573+13200R-48672R^2+103040R^3-136960R^4}{32768} + \\ & \left. + \frac{116736R^5-61440R^6+16384R^7}{32768} \left(\frac{c}{1-R} \right)^8 + \dots \right], \end{aligned}$$

а потому имеем

$$\begin{aligned} \tau = 1 - \frac{1}{3(1-R)} c + \frac{-25+82R-72R^2}{180(1-R)} c^2 + \\ + \frac{-595+3248R-6964R^2+7236R^3-3240R^4}{7560(1-R)^5} c^3 + \dots \end{aligned}$$

Для составления таблиц полученным выражениям была придана следующая форма:

$$\lg \tau = A \Sigma + B \Sigma^2 + \delta \lg \tau,$$

$$\lg \eta = -0.1447648 \Sigma - C \Sigma^2 + \delta \lg \tau,$$

где

$$\Sigma = \frac{\sigma}{1-R}, A = M \frac{1-4R}{12}, B = M \frac{25-123R+216R^2-208R^3}{1440(1-R)},$$

$$C = M \frac{35-92R+72R^2}{180(1-R)},$$

а через $\delta\lg t$ и $\delta\lg \eta$ обозначены совокупности членов, заключающих третью и высшую степени σ . Значения всех этих величин приведены в таблице III¹⁾.

При шестизначном вычислении планетной орбиты в обычных условиях, когда промежутки времени между наблюдениями не превышают 30—40 дней, можно обойтись совсем без таблиц, употребляя следующие приближенные формулы

$$\lg \tau = -0.036191(4R-1)\Sigma,$$

$$\lg \eta = -0.14476\Sigma - 0.035\Sigma^2$$

$$\Sigma = \frac{\sigma}{1-R}.$$

III. Вычисление орбиты по трем наблюдениям.

§ 8. Определение геоцентрических расстояний в общем случае. Пусть $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \delta, \delta_1, \delta_2$, прямые восхождения и склонения (или, если угодно, долготы и широты), отвечающие трем моментам наблюдений t, t_1, t_2 (мы будем предполагать в дальнейшем, что $t_1 < t < t_2$). Обозначая через ρ, ρ_1, ρ_2 соответственные геоцентрические расстояния и полагая

$$\lambda = \cos \delta \cos \alpha, \mu = \cos \delta \sin \alpha, \nu = \sin \delta, \dots$$

будем иметь для гелиоцентрических координат светила такие выражения

$$(10) \quad x = \rho \lambda - X, \quad y = \rho \mu - Y, \quad z = \rho \nu - Z$$

$$x_1 = \rho_1 \lambda_1 - X_1, \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_2 = \rho_2 \lambda_2 - X_2, \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

где X, Y соответственные координаты Солнца.

Вводя, далее, обозначения

$$\Theta = k(t_2 - t_1), \quad \Theta_1 = k(t_1 - t), \quad \Theta_2 = k(t_2 - t)$$

$$(11) \quad n_1 = \frac{\Theta_2 \tau_2}{\Theta \eta}, \quad n_2 = \frac{\Theta_1 \tau_1}{\Theta \eta}$$

¹⁾ Первоначально я предполагал вычислить таблицы, дающие непосредственно $\lg t$ и $\lg \eta$ по аргументам $\lg R$ и σ . Неизбежная обширность таких таблиц заставила, пока что, отказаться от этого плана и ограничиться вычислением помещаемых здесь таблиц II и III, менее, конечно, удобных, но за то гораздо более коротких.

При вычислении таблиц мне была оказана помощь М. А. Субботиной.

где через η , η_1 , η_2 мы попрежнему обозначаем отношения треугольников к соответствующим секторам, будут иметь

$$\begin{aligned}x - n_1 x_1 + n_2 x_2 &= 0 \\y - n_1 y_1 + n_2 y_2 &= 0 \\z - n_1 z_1 + n_2 z_2 &= 0\end{aligned}$$

Откуда полагая

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1, \quad U = X \lambda_{12} - Y \mu_{12} + Z \nu_{12} \\ \mu_{12} &= \lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1, \quad U_1 = X_1 \lambda_{12} - Y_1 \mu_{12} + Z_1 \nu_{12} \\ \nu_{12} &= \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1, \quad U_2 = X_2 \lambda_{12} - Y_2 \mu_{12} + Z_2 \nu_{12} \\ \Delta &= \lambda \lambda_{12} - \mu \mu_{12} + \nu \nu_{12},\end{aligned}$$

находим

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} n_1 \nu_{12} \rho_1 = (\lambda \mu_2 - \mu \lambda_2) \rho - (\mu_2 X - Y \lambda) + (\mu_2 X_1 - \lambda_2 Y_1) n_1 - (\mu_2 X_2 - \lambda_2 Y_2) n_2 \\ n_2 \lambda_{12} \rho_2 = -\lambda \rho + n_1 \lambda_1 \rho_1 + X - n_1 X_1 + n_2 X_2; \end{array} \right.$$

и

$$(13) \quad \Delta \rho = U - n_1 U_1 + n_2 U_2.$$

Вместо каждого из уравнений (12) можно взять другое, аналогичное с таким расчетом, чтобы стоящий слева коэффициент имел возможно большую величину.

Для получения приближенных значений геоцентрических расстояний положим ¹⁾

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta \eta = \Theta - \gamma r^{-3}, \quad \Theta_1 \eta_1 = \Theta_1 + \gamma_1 r^{-3}, \quad \Theta_2 \eta_2 = \Theta_2 + \gamma_2 r^{-3}, \\ \gamma = -\frac{1}{6} \Theta^3, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{6} \Theta_1^3, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{6} \Theta_2^3 \end{array} \right.$$

тогда равенства (11) и (13) дадут

$$(15) \quad \rho = P + (Q + q \rho) r^{-3}$$

где

$$P = \frac{D'}{\Theta \Delta}, \quad Q = \frac{D''}{\Theta \Delta}, \quad q = \frac{1}{6} \Theta^2$$

$$D' = \Theta U - \Theta_2 U_1 + \Theta_1 U_2, \quad D'' = \gamma U - \gamma_2 U_1 + \gamma_1 U_2$$

Решения уравнения (15) совместно с уравнением

$$(16) \quad r^2 = \rho^2 + 2 S \rho + R^2$$

$$S = -(\lambda X + \nu Y + \mu Z), \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

дает ρ и r^{-3} . Вычислив, затем, по формулам (14), (11) и (12) геоцентрические расстояния ρ_1 и ρ_2 , мы сможем найти гелиоцентрические координаты светила для всех трех моментов.

¹⁾ Приводя все эти хорошо известные формулы я стараюсь придерживаться обозначений, которыми пользовался Andoudeg в своей обработке метода Lagrange'a (Bulletin Astr. V. 34 p. 36).

После этого находим, пользуясь формулами

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

$$s_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2, s_2^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2$$

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

радиусы-векторы и хорды, соединяющие попарно положения светила.

Взяв теперь какиенибудь два положения светила и применив к ним уравнение Ламберта, мы сможем определить большую полуось орбиты a . Если, например, возьмем два крайние положения, то для этого послужит уравнение.

$$\frac{1}{4a} = \frac{\tau}{r_1 + r_2} - \frac{s^2}{4\Theta}$$

Затем вычислив аргументы

$$R_1 = \frac{r_1 + r}{4a}, \quad R_2 = \frac{r_2 + r}{4a}, \quad R = \frac{r_2 + r_1}{4a},$$

$$\sigma_1 = \left(\frac{s_1}{r_1 + r}\right)^2, \quad \sigma_2 = \left(\frac{s_2}{r_2 + r}\right)^2, \quad \sigma = \left(\frac{s}{r_2 + r_1}\right)^2$$

и определив при помощи таблиц τ_1 , τ_{12} и τ мы найдем более точные значения геоцентрических расстояний, пользуясь формулами (11), (13) и (12). Таким же образом могут быть проведены, если это окажется нужным, третье и дальнейшие приближения.

Легко видеть, что каждое приближение дает выигрыш точности на два порядка (принимая, как обычно, промежутки времени между наблюдениями за малые величины первого порядка). В самом деле, пусть геоцентрические расстояния известны с ошибкой i -го порядка, тогда радиусы-векторы мы будем иметь с той же точностью, а хорды с ошибкой $(i+1)$ -го порядка. Таким образом аргументы R , R_1 , R_2 и σ , σ_1 , σ_2 получим с ошибками соответственно i -го и $(i+2)$ -го порядков, благодаря чему мы будем иметь τ , τ_1 и τ_{12} с ошибками $(i+2)$ -го порядка (что видно из разложений предыдущей главы) и с тою же точностью получим новые геоцентрические расстояния.

Если взятые наблюдения достаточно далеки от случая большого круга, то решение системы уравнений (15), (16) не представляет затруднений. Исходное значение ρ может быть получено следующим образом (*Andoyer loc. cit. p. 46*). Так как приблизительно

$$q = o, \quad Q = -P R^3,$$

то полагая

$$x = \frac{\rho}{R}, \quad p = \frac{R}{P}, \quad s = \frac{2S}{R}$$

и исключая из этих уравнений r , получим

$$xp = 1 - (x^2 + s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Это соотношение позволяет, благодаря таблице 1, дающей p в функции x и s , легко найти приближенную величину x , а следовательно и p .

§ 9. Вычисление элементов. После того как получены окончательные значения геоцентрических расстояний и попутно определена большая полуось орбиты, вычисление остальных элементов не представляет затруднений и может быть выполнено различно.

Для случая эллиптической орбиты наиболее удобным представляется следующий путь.

Прежде всего находим эксцентриситет и эксцентрические аномалии для крайних моментов при помощи формул.

$$(17) \quad \begin{aligned} \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sqrt{R(1 + \sqrt{\sigma})}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \sqrt{R(1 - \sqrt{\sigma})}, \quad \frac{1}{2}(u_2 - u_1) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta), \\ e \sin \frac{1}{2}(u_2 + u_1) &= \frac{r_2 - r_1}{2a} \cosec \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \\ e \cos \frac{1}{2}(u_2 + u_1) &= (1 - 2R) \sec \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \end{aligned}$$

Соотношения

$$(18) \quad \begin{aligned} \tg \frac{r_1}{2} &= \tg(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \tg \frac{u_1}{2}, \quad \sin \varphi = e \\ M_1 &= u_1 - e \sin u_1 \end{aligned}$$

дадут соответствующую истинную и среднюю аномалию, после чего остается только определить среднее суточное движение

$$(19) \quad n = K a^{-\frac{3}{2}} = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}$$

и среднюю аномалию эпохи.

Когда употребление эксцентрической аномалии является благодаря форме орбиты недопустимым, а также в случае гиперболической орбиты ($a < 0$), можно пользоваться следующими формулами *Fabritius'a* (*Über die Berechnung der richtigen Distanzen durch successive Annäherungen in dem Problem der Bahnbestimmung aus drei beobachteten Oertern, Kiew 1877*).

Полагаем

$$\begin{aligned} K &= n_1 r_1 + r + n_2 r_2, \\ L &= n_1 r_1 + r - n_2 r_2, \quad \alpha = r_1 - r_2 \\ M &= -n_1 r_1 + r - n_2 r_2, \quad \alpha_1 = \frac{r - r_1}{n_2} \\ N &= n_1 r_1 - r - n_2 r_2, \quad \alpha_2 = \frac{r - r_2}{n_1} \quad U = \sqrt{\frac{N}{KLM}}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{N \alpha \alpha_1 \alpha_2}{(n_1 - n_2 - 1)^2} \left(\frac{K}{\alpha_2} - \frac{Z}{\alpha} + \frac{M}{\alpha_1} \right) \\ \tg v_1 &= U \frac{Ma - Za_1}{\alpha_1 - \alpha}, \quad \tg v_2 = U \frac{Ma_2 + Ka_1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad \tg v_3 = U \frac{Za_2 - Ka}{\alpha - \alpha_2}. \end{aligned}$$

Наконец элементы, определяющие положение плоскости орбиты, даются уравнениями.

$$\begin{aligned} Q \sin i \sin \Omega &= y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ Q \sin i \cos \Omega &= x_1 z_2 - x_2 z_1 \quad Q = r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) > 0 \\ Q \cos i &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ r_1 \sin(v_1 + \omega) &= z_1 \operatorname{cosec} i \\ r_1 \cos(v_1 + \omega) &= x_1 \cos \Omega + y_1 \sin \Omega \end{aligned}$$

§ 10. Случай большого круга. Изложенный способ определения геоцентрических расстояний неприменим, если $\Delta = 0$, т.-е. если три наблюденные положения светила лежат на большом круге. Известная теорема Ламберта о кривизне видимого пути светила показывает, что подобный случай может иметь место лишь тогда, когда гелиоцентрические расстояния светила и Земли мало между собой отличаются, так что этот случай может встречаться лишь при определении кометных орбит.

Практически случаем большого круга приходится считать всякий случай, когда определитель Δ настолько мал, что коэффициенты уравнения (15) не могут быть определены с достаточной точностью. Во всех таких случаях решение системы

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= H - n_1 U_1 + n_2 U_2 \\ r^2 &= \rho^2 + 2 \gamma S \rho + R^2 \end{aligned} \quad \dots \quad (20)$$

приходится выполнять способом отличным от указанного в § 8. Сохранив обозначения этого параграфа, первое из уравнений (20) напишем так.

$$r^3 = \frac{D'' - \gamma \Delta \rho}{\nu \Delta \rho - D'}$$

Принимая сначала $\Delta = 0$, получим

$$r^3 = -\frac{D''}{D'},$$

внося эту величину во второе из соотношений (20), найдем приближенную величину ρ , которая позволит определить более точное значение r , и т. д.

В остальном проведение первой гипотезы не отличается от изложенного в § 8. Если точность доставляемая первой гипотезой неудовлетворительна, то можно применить способ вариации геоцентрических расстояний в излагаемой ниже форме, что даст возможность легко присоединить к основным трем наблюдениям еще новые. Этот путь следует избирать в том случае, когда первая гипотеза указывает на заметное уклонение орбиты от параболы.

Можно, также, легко закончить определение орбиты, вводя дополнительное условие $a = \infty$. Для этого подставляем в уравнения (12) значения n_1 и n_2 , полученные в ходе первой гипотезы; вычисляем ρ_1 и ρ_2 , отвечающие некоторым значениям ρ , близким к только что найденному, и

интерполированием находим то значение ρ , которое обращает в нуль выражение

$$\frac{r_0}{r_1 + r_2} - \frac{s^2}{4\Theta^2}$$

В случае надобности можно, конечно, повторить это вычисление, определив, при помощи таблицы II, более точные значения n_1 , n_2 .

Изложенный способ вычисления орбит становится совершенно неприменим только тогда, когда не только $\Delta = 0$, но $U = U_1 = U_2 = 0$ т.-е. когда светило движется в плоскости эклиптики и, следовательно, для определения орбиты необходимы четыре наблюдения.

IV. НОВАЯ ФОРМА СПОСОБА ВАРИАЦИИ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ.

§ 11. Вычисление орбиты вариированием двух геоцентрических расстояний. Сохраняя за буквами прежние значения обозначим через ρ' , λ' , μ' , . . . , и ρ'' , λ'' , μ'' , . . . величины, относящиеся к тем двум наблюдениям, геоцентрические расстояния для которых мы предполагаем вариировать. Пусть ρ_i , λ_i , μ_i , . . . величины, относящиеся к какому-нибудь третьему наблюдению. Условия нахождения трех гелиоцентрических положений в одной плоскости дает следующее соотношение между геоцентрическими расстояниями

$$\rho_i = \frac{M_i \rho' \rho'' + N_i \rho' + P_i \rho'' + \Theta_i}{A_i \rho' \rho'' + B_i \rho' + C_i \rho'' + D_i},$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \lambda \lambda_i - \mu \mu_i + \nu \nu_i & M &= \lambda X_i - \mu Y_i + \nu Z_i \\ B_i &= l' \lambda_i - m' \mu_i + n' \nu_i & N_i &= l' X_i - m' Y_i + n' Z_i \\ C_i &= l'' \lambda_i - m'' \mu_i + n'' \nu_i & P_i &= l'' X_i - m'' Y_i + n'' Z_i \\ D_i &= X \lambda_i - Y \mu_i + Z \nu_i & \Theta_i &= X X_i - Y Y_i + Z Z_i \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu' \nu'' - \mu'' \nu', l' = \nu' Y'' - \mu'' Z'', l'' = \mu'' Z' - \nu'' Y', X = Y' X'' - Y'' X' \\ \mu &= \lambda' \nu'' - \lambda'' \nu', m' = \nu' X'' - \lambda'' Z'', m'' = \lambda'' Z' - \nu'' X', Y = X' Z'' - X'' Z' \\ \nu &= \lambda' \mu'' - \lambda'' \mu', n' = \mu' X'' - \lambda' Y'', n'' = \lambda'' Y' - \mu'' X', Z = X' Y'' - X'' Y'. \end{aligned}$$

Этого рода, чисто геометрические, соотношения позволяют выразить через ρ и ρ'' все гелиоцентрические координаты, радиусы-векторы и хорды, соединяющие попарно положения светила.

Применяя теперь к комбинации каждого из промежуточных наблюдений с каждым из двух основных теорему Ламберта в ее новой форме, получим для каждого промежуточного наблюдения пару уравнений вида

$$\frac{1}{4a} = \varphi'_i(\rho', \rho''), \quad \frac{1}{4a} = \varphi''_i(\rho', \rho''),$$

правые части которых можно считать свободными от a . Пользуясь аналогичным соотношением, полученным от применения той же теоремы к двум

основным наблюдениям, мы можем исключить $\frac{1}{4a}$, что даст два уравнения

$$A_i(\rho', \rho'') = 0, \quad B_i(\rho', \rho'') = 0, \dots \quad (21)$$

для определения ρ' и ρ'' .

Хотя эти уравнения много проще уравнений

$$A R_{\text{набл.}} - A R_{\text{выч.}} = 0, \quad \delta_{\text{набл.}} - \delta_{\text{выч.}} = 0, \dots \quad (22)$$

которыми приходится пользоваться в общеизвестной форме способа вариации геоцентрических расстояний, тем не менее единственным практически выполнимым способом их решения является обычный прием линейного интерполирования.

Простота уравнений (21) по сравнению с (22) сказывается в том, что в то время как обычную форму способа вариации геоцентрических расстояний можно с успехом применять лишь когда ρ' и ρ'' известны уже с точностью не меньшей чем до 0.001 (т.-е. когда можно ограничиться 4—5 гипотезами), новый способ оказывается выгодным и тогда, когда ρ' и ρ'' известны с ошибкой не превосходящей нескольких сотых,

§ 12. Возможность паразитных решений. Так как каждая гипотеза (т.-е. вычисление значений функций $A_i(\rho', \rho'')$, $B_i(\rho', \rho'')$ для той или иной системы значений ρ', ρ'') требует сравнительно небольшого труда, то изложенный способ может, конечно, быть применен и для вычисления неизвестной орбиты — тем более, что геоцентрические расстояния во многих случаях могут быть угаданы с ошибкой, не превосходящей нескольких десятых.

При употреблении только трех наблюдений такой прием определения орбиты конечно уступает в смысле удобства изложенному выше нормальному способу (§ 6). Однако он может иметь перед ним некоторые преимущества тогда, когда к первоначально взятым наблюдениям нужно бывает сейчас же присоединять следующие. Это присоединение производится в рассматриваемом способе с самой незначительной затратой труда, тогда как при употреблении нормального приема всю вычислительную работу приходится повторять. Кроме того, подобного рода обстоятельства всегда сопровождаются затратой большого труда, что еще более уменьшает выгоды нормального приема.

Благодаря всему этому приобретает интерес вопрос о возможности нескольких решений системы (21), к которой сводится задача определения орбиты рассматриваемым способом (если взяты только три наблюдения, то $i=1$).

Причиной появления таких посторонних задач решений является следующее обстоятельство. Решение уравнений (21) дает нам возможность найти три (при $i=1$) точки P' , P , P'' , удовлетворяющие следующим условиям: 1° эти три точки лежат в одной плоскости с центром Солнца; 2° светило, двигающиеся по законам Кеплера, проходят дуги $P'PPP'$, $P'P''$ в данные промежутки времени $(t-t')$, $(t''-t)$, $(t''-t')$.

Может, однако, случиться, что последнее условие удовлетворяется тремя дугами, принадлежащими трем различным орбитам. Соответствующие ρ' , ρ'' будут удовлетворять уравнениям (21), но будут являться паразитным решением с точки зрения определения орбиты. Пример случая вычисления орбиты, когда действительно встречается подобное паразитное решение, был мною дан в статье, помещенной в *Monthly Notices*.

Отличить паразитное решение от настоящего нетрудно. Прежде всего нужно, пользуясь двумя крайними из трех полученных гелиоцентрических положений светила, вычислить эксцентриситет и эксцентрические аномалии для крайних моментов наблюдений; потом определяем M и n (формулы (17), (18) и (19) § 9); наконец вычисляем, пользуясь соотношениями

$$M + n(t - t') = u - e \sin u, r = a(1 - e \cos u),$$

радиус-вектор для момента среднего наблюдения. Рассматриваемое решение системы (21) будет настоящим или паразитным смотря по тому, совпадает ли это значение r с тем, которое было получено раньше при решении системы (21) или нет.

§ 13. Об окончательном определении орбит. Изложенное видоизменение способа вариации геоцентрических расстояний, весьма сокращающее вычислительную работу, должно способствовать расширению круга его применений. Однако новая форма не устраивает основного недостатка метода вариации геоцентрических расстояний — именно выделение двух наблюдений и распределение присущих им ошибок на остальные наблюдения.

Правда прием, предложенный Клипперфусом¹⁾ для ослабления этого неудобства, настолько достигает своей цели, что полученная орбита часто может считаться равносценной с найденной таким громоздким способом, как способ вариации элементов. Но если для планет и можно почти всегда ограничиться способом вариации геоцентрических расстояний, то при определении окончательных орбит комет полное удовлетворение может дать лишь метод вариации элементов, или, во всяком случае, прием, основанный на тех же принципах.

Из попыток заменить метод улучшения орбит вариацией элементов другим методом, столь же равномерно учитывающим все наблюдения, интересна идея Леверье. Обратив внимание на то, что главнейшим неудобством обычного метода является несравненность по величине вариаций элементов и соответствующих изменений геоцентрических координат светила, Леверье предлагает принимать за неизвестные не вариации элементов, а вариации геоцентрических координат трех нормальных мест.²⁾ В этом случае коэффициенты условных уравнений получаются вполне однородные по величине и их достаточно вычислять с тремя, много с четырьмя, знаками.

¹⁾ *Theoretische Astronomie*, стр. 374 (изд. 1871 г.).

²⁾ *Comptes Rendus*, v. XX, 1845

ТАБЛИЦА I
дающая величину $r = \frac{1 - (x^3 + 5x + 1)^{\frac{5}{2}}}{x}$

$s \diagdown x$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2
2,0	2,11	1,59	1,26	1,04	0,88	0,76	0,66	0,59	0,53	0,48	0,44	0,41	0,38	0,35	0,33	0,31
1,8	1,98	1,53	1,23	1,02	0,86	0,75	0,66	0,59	0,53	0,48	0,44	0,41	0,38	0,35	0,33	0,31
1,6	1,85	1,46	1,20	1,00	0,85	0,74	0,65	0,58	0,53	0,48	0,44	0,40	0,38	0,35	0,33	0,31
2,4	1,70	1,39	1,16	0,98	0,84	0,73	0,65	0,58	0,52	0,48	0,44	0,40	0,37	0,35	0,33	0,31
1,2	1,55	1,31	1,11	0,95	0,83	0,72	0,64	0,58	0,52	0,48	0,44	0,40	0,37	0,35	0,33	0,31
1,0	1,38	1,22	1,06	0,92	0,81	0,71	0,63	0,57	0,52	0,47	0,43	0,40	0,37	0,35	0,33	0,31
0,8	1,20	1,11	1,00	0,89	0,79	0,70	0,63	0,57	0,51	0,47	0,43	0,40	0,37	0,35	0,33	0,31
0,6	1,00	0,99	0,93	0,84	0,76	0,68	0,62	0,56	0,51	0,47	0,43	0,40	0,37	0,35	0,33	0,31
0,4	0,78	0,85	0,84	0,79	0,73	0,67	0,61	0,55	0,51	0,46	0,43	0,40	0,37	0,34	0,32	0,30
+ 0,2	0,54	0,69	0,76	0,73	0,69	0,64	0,59	0,54	0,50	0,46	0,43	0,40	0,37	0,34	0,32	0,30
0,0	0,28	0,50	0,62	0,65	0,65	0,61	0,57	0,53	0,49	0,46	0,42	0,39	0,37	0,34	0,32	0,30
- 0,2	0,09	0,27	0,46	0,56	0,59	0,58	0,55	0,52	0,48	0,45	0,42	0,39	0,36	0,34	0,32	0,30
0,4	- 0,32	0,00	0,26	0,43	0,51	0,53	0,52	0,50	0,47	0,44	0,41	0,39	0,36	0,34	0,32	0,30
0,6	- 0,67	- 0,33	0,00	0,25	0,40	0,46	0,48	0,45	0,43	0,41	0,38	0,36	0,34	0,32	0,30	
0,8	- 1,06	- 0,75	- 0,35	0,00	0,24	0,37	0,43	0,44	0,42	0,40	0,39	0,37	0,35	0,33	0,32	0,30
1,0	- 1,49	- 1,27	- 0,85	- 0,37	0,00	0,23	0,35	0,40	0,41	0,40	0,39	0,37	0,35	0,33	0,32	0,30
1,2	- 1,99	- 1,96	- 1,59	- 0,98	- 0,40	0,00	0,22	0,33	0,37	0,38	0,37	0,36	0,35	0,33	0,31	0,30
1,4	- 2,55	- 2,88	- 2,78	- 2,08	- 1,15	- 0,42	0,00	0,21	0,31	0,35	0,36	0,34	0,32	0,31	0,29	0,29
- 1,6	- 3,18	- 4,17	- 4,92	- 4,54	- 2,95	- 1,39	- 0,45	0,00	0,21	0,29	0,33	0,33	0,32	0,31	0,29	0,29

ТАБЛИЦА II

служащая для определения $lg \tau_0$ и $lg \eta$, когда эксцентриситет близок к единице.

τ	$lg \tau_0$	m	$lg \eta^{\circ}$	n
0.01	0.000 3627	— 0.001 087	9.998 5439	— 0.001 451
02	000 7269	002 177	997 0704	002 908
03	001 0926	003 270	995 5794	004 372
04	001 4599	004 366	994 0704	005 842
0.05	0.001 8288	0.005 466	9.992 5429	0.007 319
06	002 1992	006 568	990 9966	008 802
07	002 5713	007 673	989 4310	010 293
08	002 9451	008 781	987 8458	011 790
09	003 3204	009 893	986 2404	013 294
0.10	0.003 6975	0.011 007	9.984 6144	0.014 806
11	004 0763	012 125	982 9673	016 325
12	004 4568	013 246	981 2985	017 851
13	004 8390	014 371	979 6076	019 385
14	005 2230	015 498	977 8941	020 927
0.15	0.005 6087	0.016 629	9.976 1573	0.022 476
16	005 9963	017 764	974 3967	024 033
17	006 3857	018 902	972 6116	025 598
18	006 7770	020 043	970 8015	027 172
19	007 1701	021 188	968 9658	028 753
0.20	0.007 5652	0.022 337	9.967 1036	0.030 343
21	007 9622	023 489	965 2144	031 942
23	008 3611	024 645	963 2974	033 550
23	008 7620	025 804	961 3518	035 166
24	009 1650	026 968	959 3769	036 792
0.25	0.009 5700	0.028 135	9.957 3719	0.038 427
26	009 9771	029 306	955 3358	040 071
27	010 3962	030 481	953 2678	041 725
28	010 7976	031 659	951 1670	043 389
29	011 2110	032 842	949 0324	045 063
0.30	0.011 6267	0.034 029	9.946 8630	0.046 747
31	012 0446	035 220	944 6577	048 442
32	012 4648	036 415	942 4155	050 147
33	012 8873	037 615	940 1352	051 863
34	013 3121	038 818	937 8155	053 590
0.35	0.013 7393	0.040 026	9.935 4553	0.055 329
36	014 1689	041 239	933 0532	057 079
37	014 6010	042 456	930 6078	058 841
38	015 0356	043 677	928 1177	060 815
39	015 4727	044 903	925 5813	062 401
0.40	0.015 9124	0.046 134	9.922 9970	0.064 201
41	016 3548	047 370	920 3632	066 013
42	016 7998	048 610	917 6780	067 838
43	017 2476	049 856	914 9397	069 678
44	017 6981	051 106	912 1462	071 531
0.45	0.018 1514	0.052 362	9.909 2954	0.073 399
46	018 6076	053 622	906 3851	075 281
47	019 0668	054 888	903 4131	077 179
48	019 5289	056 159	900 3768	079 092
49	019 9941	057 436	897 2736	081 021
0.50	0.020 4624	— 0.058 718	9.894 1009	— 0.082 966

ТАБЛИ

дающая

$\sigma \backslash R$	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01
0.00	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0
0.3	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0
0.4	2.1	1.7	1.4	1.1	0.8	0.5	0.3	0.2	0.1	0.0
0.05	+ 3.3	+ 2.7	+ 2.1	+ 1.7	+ 1.2	+ 0.8	+ 0.5	+ 0.3	+ 0.1	+ 0.0
0.6	4.8	3.9	3.1	2.4	1.8	1.2	0.8	0.4	0.2	0.1
0.7	6.6	5.3	4.2	3.3	2.4	1.7	1.1	0.6	0.3	0.1
0.8	8.6	7.0	5.6	4.3	3.2	2.2	1.4	0.8	0.4	0.1
0.9	10.9	8.9	7.0	5.5	4.0	2.8	1.8	1.0	0.5	0.1
0.10	+ 13.6	+ 11.0	+ 8.7	+ 6.7	+ 5.0	+ 3.5	+ 2.2	+ 1.3	+ 0.6	+ 0.1
1.1	16.4	13.4	10.6	8.2	6.0	4.2	2.7	1.5	0.7	0.2
1.2	19.6	16.0	12.6	9.8	7.2	5.0	3.2	1.8	0.8	0.2
1.3	23.1	18.8	14.9	11.5	8.5	5.9	3.8	2.1	0.9	0.3
1.4	26.9	21.9	17.3	13.4	9.9	6.9	4.4	2.5	1.1	0.3
0.15	+ 31.0	+ 25.2	+ 20.0	+ 15.4	+ 11.4	+ 7.9	+ 5.1	+ 2.9	+ 1.3	+ 0.3
1.6	35.4	28.8	22.8	17.6	13.0	9.0	5.8	3.3	1.5	0.4
1.7	40.0	32.6	25.9	19.9	14.7	10.2	6.6	3.7	1.7	0.4
1.8	45.0	36.7	29.1	22.4	16.5	11.5	7.4	4.2	1.9	0.5
1.9	50.3	41.0	32.5	25.1	18.5	12.9	8.3	4.7	2.1	0.5
0.20	+ 55.9	+ 45.5	+ 36.2	+ 27.8	+ 20.5	+ 14.3	+ 9.2	+ 5.2	+ 2.3	+ 0.6

A IIa,

 $\tau \Delta \lg \tau$.

+ 0.01	+ 0.02	+ 0.03	+ 0.04	+ 0.05	+ 0.06	+ 0.07	+ 0.08	+ 0.09	+ 0.10
+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0	+ 0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5
0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1.1	1.4	1.7	2.1
+ 0.0	+ 0.1	+ 0.3	+ 0.5	+ 0.8	+ 1.2	+ 1.7	+ 2.1	+ 2.7	+ 3.3
0.1	0.2	0.4	0.8	1.2	1.8	2.4	3.1	3.9	4.7
0.1	0.3	0.6	1.1	1.7	2.4	3.3	4.2	5.3	6.5
0.1	0.4	0.8	1.4	2.2	3.2	4.3	5.6	6.9	8.5
0.1	0.5	1.0	1.8	2.8	4.0	5.5	7.0	8.8	10.8
+ 0.1	+ 0.6	+ 1.3	+ 2.2	+ 3.5	+ 5.0	+ 6.7	+ 8.7	+ 11.0	+ 13.4
0.2	0.7	1.5	2.7	4.2	6.0	8.2	10.6	13.3	16.3
0.2	0.8	1.8	3.2	5.0	7.2	9.8	12.6	15.9	19.4
0.3	0.9	2.1	3.8	5.9	8.5	11.5	14.9	18.7	22.9
0.3	1.1	2.5	4.4	6.9	9.9	13.4	17.3	21.8	26.6
- 0.3	+ 1.3	+ 2.9	+ 5.1	+ 7.9	+ 11.4	+ 15.4	+ 20.0	+ 25.2	+ 30.7
0.4	1.5	3.3	5.8	9.0	13.0	17.6	22.8	28.6	35.0
0.4	1.7	3.7	6.6	10.2	14.7	19.9	25.9	32.4	39.7
0.5	1.9	4.2	7.4	11.5	16.5	22.4	29.1	36.5	44.7
0.5	2.1	4.7	8.3	12.9	18.5	25.1	32.5	40.8	49.9
- 0.6	+ 2.3	+ 5.2	+ 9.2	+ 14.3	+ 20.6	+ 27.8	+ 36.1	+ 45.4	+ 55.5

ТАБЛИЦА IIб.

дающая $10^7 \Delta \lg \pi$.

$\frac{R}{c}$	- 0,05	- 0,04	- 0,03	- 0,02	- 0,01	+ 0,01	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,05	+ 0,06	+ 0,07	+ 0,08	+ 0,09	+ 0,010
0,00	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0
0,01	0,3	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7	0,9	1,2
0,02	1,1	0,7	0,4	0,2	0,0	0,0	0,0	0,2	0,4	0,7	1,2	1,7	2,3	3,0	4,7
0,03	2,5	1,6	0,9	0,4	0,1	0,1	0,4	0,9	1,7	2,6	3,8	5,1	6,7	8,5	10,6
0,04	4,5	2,9	1,6	0,7	0,2	0,2	0,7	1,7	3,0	4,6	6,7	9,2	12,0	15,3	18,9
0,05	7,1	4,5	- 2,6	- 1,2	- 0,3	- 0,3	- 1,2	- 2,6	- 4,6	- 7,3	- 10,5	- 14,3	- 18,8	- 23,8	- 29,6
0,06	10,3	6,6	3,7	1,7	0,4	0,4	1,7	3,7	6,7	10,5	15,2	20,7	27,1	34,4	42,7
0,07	14,0	9,0	5,1	2,3	0,6	0,6	2,3	5,1	9,1	14,3	18,7	28,2	37,0	47,0	58,3
0,08	18,3	11,8	6,6	3,0	0,7	0,7	3,0	6,7	12,0	18,8	27,1	37,0	48,5	61,6	76,3
0,09	23,3	14,9	8,4	3,7	0,9	0,9	3,8	8,5	15,2	23,8	34,4	47,0	61,5	78,2	96,9
0,10	- 28,8	- 18,5	- 10,4	- 4,6	- 1,2	- 1,2	- 4,7	- 10,6	- 18,8	- 29,5	- 42,6	- 58,1	- 76,2	- 96,8	- 120,0
11	34,9	22,4	12,6	5,6	1,4	1,4	5,7	12,8	22,8	35,8	51,7	70,5	92,4	117,4	145,6
12	41,7	26,7	15,1	6,7	1,7	1,7	6,8	15,3	27,2	42,7	61,8	84,2	110,3	140,1	173,8
13	49,0	31,4	17,7	7,9	2,0	2,0	8,0	18,0	32,1	50,2	72,6	99,0	129,9	164,9	204,5
14	57,0	36,6	20,6	9,2	2,3	2,3	9,3	20,9	37,3	58,4	84,4	115,2	151,0	191,8	237,8
0,15	67,6	- 44,1	- 23,7	- 11,6	- 2,6	- 2,7	- 11,7	- 24,1	- 42,9	- 67,3	- 107,2	- 132,6	- 174,8	- 221,8	- 273,8

ТАБЛИЦА III,

служащая для нахождения $lg \tau$ и $lg \eta$ в случае эллиптической орбиты не очень большого эксцентриситета.

$$lg \tau = A\Sigma + B\Sigma^2 + \delta \lg \tau, \quad lg \eta = -0,1447648 \Sigma - C\Sigma^2 + \delta \lg \eta, \quad \Sigma = \frac{\sigma}{1-R}.$$

R	A		B		C		R	A		B		C	
	A	B	B	C	C	R		A	B	B	C		
0.10	+ 0.021	7147	+ 0.004	910	+ 0.071	096	0.40	- 0.021	7147	- 0.001	484	+ 0.039	087
1.1	0.020	2671	0.014	679	0.69	810	41	- 0.023	1624	- 0.01	767	+ 0.038	372
1.2	0.18	8194	0.014	452	0.68	535	42	0.24	6100	0.02	063	0.037	692
1.3	0.17	3714	0.014	230	0.67	271	43	0.26	5077	0.02	375	0.037	550
1.4	0.15	9241	0.014	013	0.66	017	44	0.27	5053	0.02	704	0.036	446
1.5	+ 0.014	4765	+ 0.003	799	+ 0.064	775	0.45	- 0.028	9530	- 0.003	051	+ 0.035	884
1.6	0.13	0288	0.003	590	0.63	545	46	- 0.30	4006	0.03	418	0.035	356
1.7	0.11	5812	0.003	383	0.62	327	47	0.31	8483	0.03	807	0.034	893
1.8	0.10	1335	0.003	180	0.61	121	48	0.33	2959	0.04	220	0.034	459
1.9	0.08	6859	0.002	979	+ 0.058	750	49	- 0.034	7436	0.04	660	0.034	096
2.0	+ 0.007	2382	+ 0.002	781	+ 0.058	750	50	- 0.036	1912	- 0.005	127	+ 0.033	778
2.1	0.05	7906	0.002	584	0.57	586	51	- 0.037	6389	0.05	626	0.033	518
2.2	0.04	3429	0.002	389	0.56	436	52	0.39	0865	0.06	158	0.033	321
2.3	0.02	8953	0.002	196	0.55	301	53	0.40	5342	0.06	726	0.033	187
2.4	+ 0.001	4476	0.002	003	0.54	183	54	0.41	9818	0.07	335	0.033	124
0.25	0.030	0000	+ 0.001	810	+ 0.053	080	55	- 0.043	4294	- 0.007	986	+ 0.033	135
2.6	- 0.001	4476	0.001	616	0.51	995	56	- 0.044	8771	- 0.008	685	0.033	226
2.7	- 0.002	8953	0.001	422	0.50	928	57	0.046	3247	0.09	435	0.033	401
2.8	0.04	3429	0.001	227	0.19	880	58	0.047	7724	0.10	249	0.033	668
2.9	0.05	7905	0.001	029	0.48	850	59	0.049	2200	0.11	107	0.034	033
0.30	- 0.007	2382	+ 0.000	829	+ 0.047	841	60	- 0.050	6677	- 0.012	040	+ 0.034	502
31	- 0.008	6859	0.000	626	0.6	853	61	0.052	1153	0.013	045	0.035	093
32	0.10	1335	0.000	418	0.45	888	62	0.053	5630	0.14	129	0.035	790
33	0.11	5812	+ 0.000	216	0.44	945	63	0.055	0106	0.015	299	0.036	627
34	0.13	0288	- 0.000	012	0.44	026	64	- 0.056	4583	0.016	564	0.037	607
0.35	- 0.014	4765	0.000	236	+ 0.043	132	65	- 0.057	9059	- 0.017	934	+ 0.038	742
36	0.15	9241	0.000	467	0.42	265	66	0.059	3536	0.19	417	0.040	046
37	0.17	3718	0.000	706	0.11	426	67	0.060	8012	0.21	026	0.041	534
38	0.18	8194	0.000	955	0.40	625	68	0.062	2489	0.22	774	0.043	224
39	0.20	2671	0.001	214	0.39	835	69	0.063	6965	0.24	674	0.045	135
0.40	- 0.021	7147	- 0.001	484	- 0.039	087	70	- 0.065	1442	- 0.026	745	+ 0.047	290

ТАБЛИЦА IIIa,

дающая $10^7 \delta \lg \tau$.

$R \backslash \sigma$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,10	+ 0,0	+ 0,2	+ 0,6	+ 1,5	+ 2,9
20	0,0	0,1	0,5	1,2	2,3
30	+ 0,0	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,7	+ 1,4
0,40	- 0,0	- 0,0	- 0,2	- 0,4	- 0,7
45	0,0	0,3	0,9	2,1	4,1
0,50	0,1	0,8	2,8	6,5	12,8
55	0,3	2,3	7,8	18,6	36,2
0,60	- 0,8	- 6,6	- 22,4	- 53,1	- 103,6

ТАБЛИЦА IIIb,

дающая $10^7 \delta \lg \tau_l$.

$R \backslash \sigma$	0,01	0,02	0,03	0,04
0,10	- 1	- 5	- 17	- 39
20	1	5	17	40
30	1	5	18	42
0,40	1	6	19	45
45	1	6	20	48
0,50	1	7	23	56
55	1	9	31	74
0,60	- 2	- 16	- 53	- 125

Несмотря на то, что эта идея не осталась не замеченной ²⁾ практического осуществления она не пашла до сих пор, ибо формулы, данные Н. Стояновым для вычисления коэффициентов условных уравнений, настолько сложны, что он сам воздержался от применения их к числовому

¹⁾ О ней упоминает Radeau (*Bull. astr.* V. X et U. XXI; подробно ее развивает N. Stoyanoff в мемуаре *Sur une méthode de Le Verrier pour la correction des orbites* *Bull. astr.* V. XXVII).

примеру, приведенному в его статье, и предпочел найти коэффициенты условных уравнений обходным путем.

В связи со всем этим интересно отметить, что вычисление коэффициентов условных уравнений, отвечающих способу Леверье, можно сделать достаточно удобным при помощи вспомогательных таблиц, расположенных по тем же самым аргументам $R = \frac{r+r'}{4a}$, $\varepsilon = \left(\frac{s}{r+r'} \right)^2$, как и таблицы, данные в настоящей статье. Соответствующее преобразование коэффициентов достигается употреблением уравнений Ламберта в его новой форме. Таким образом эти две величины являются как бы универсальным аргументом для таблиц Теоретической Астрономии как относящихся к первоначальному определению орбиты, так и служащих для улучшения орбиты вариацией геоцентрических расстояний, и, наконец, служащих для вычисления окончательной орбиты.

Май 1922 г.

A NEW FORM OF LAMBERT'S THEOREM AND ITS APPLICATION TO THE DETERMINATION OF THE ORBITS.

By M. T. Subbotin.

SUMMARY.

The utilisation of the well-known Lambert's theorem for computing the orbit of a body, moving round the sun according to Kepler's laws, has been the subject of much investigation. But of practical interest are only methods proposed for cometary orbits with very large semiaxis a .

A new form of Lambert's theorem (given by the author in 1919) permit to extend considerably the use this fundamental relation. This new form is

$$\frac{1}{4a} = \frac{\tau}{r+r'} - \frac{s^2}{4\Theta^2}, \quad \Theta = k(t' - t) \dots \dots \dots \quad (2)$$

where r and r' are the radii-vectores of the body at the times t and t' , respectively, s is the chord joining its positions at these times, and τ is a function of

$$R = \frac{r+r'}{4a}, \quad e = \frac{s}{r+r'}$$

given by (4) for elliptic motion and by (4a), (4b) for hyperbolic and parabolic motions respectively.

As in all cases of practice τ differs very little from unit and changes slowly, the equation (2) is very convenient for finding a from $r+r'$, s and $t-t'$.

It is shown, in § 3, that τ , the ratio of the triangle, formed by r , r' and s , to the corresponding sector, may be expressed by the same two

quantities R and c (or $s=c^2$) as τ . We obtain therefore a suitable method, based directly upon Lambert's theorem, for finding η from r , r' , s and $t-t'$ (by means of Tables II and III, giving $\lg \tau$ and $\lg \eta$).

This method may replace with advantage (from practical as well as from theoretical points of view) the other methods now in use. Therefore retaining the geometrical part of these classical methods without changes and substituting for dynamical part (it is for calculating the ratios n_1 and n_2 of triangles) the method given in the present paper, we shall have a new method for computing an orbit after three observations. The corresponding formulae are developed in §§ 8, 9 and 10.

The new form of Lambert's theorem may be also useful in correcting an orbit by varying two geocentric distances, for it enables us to replace the very complicated equations of the form

$$AR_{obs} - AR_{comp} = 0, \delta_{obs} - \delta_{comp} = 0$$

by the equations (21), involving only the radii — vectores, the chords and the mean distance of the body from the sun.

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НЕОСВЕЩЕННОЙ ЧАСТИ ЛУННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПЛОТНОСТИ ЛУННОЙ АТМОСФЕРЫ.

B. Г. Фесенков.

§ 1. Поверхностное телескопическое наблюдение над лунной поверхностью показывает, что луна не имеет сколько-нибудь заметной атмосферы. Резкость теней, отчетливость деталей, отсутствие самого легкого облачного слоя говорит, что на нашем спутнике господствуют условия, совершенно отличные от земных. Делалось много попыток определить следы рефракции в лунной атмосфере. Bessel определил, как верхний предел плотности атмосферы луны $\frac{1}{968}$ плотности земной¹⁾. Franz (Franz)²⁾ на основании большого числа покрытий звезд считает, что этот предел следует уменьшить до $\frac{1}{2000}$. По вычислениям Нейсона (Neison)³⁾ можно принять, что плотность атмосферы луны составляет 0,0025 плотности земной, причем этот вывод также основан на определении горизонтальной рефракции. Пюизэ (Puiseux)⁴⁾ считает, что при покрытиях звезд обнаруживается легкое отклонение их света в лунной атмосфере и такого же мнения придерживается Пиккеринг (W. Pickering)⁵⁾. Надо заметить, что величина рефракции, выводимая из разности лунного диаметра, получаемого путем микрометрических измерений и покрытий звезд, не может считаться сколько нибудь реальной по мнению такого специалиста в этой области как Л. Струве, так как мы сравниваем величины в сущности неприводимые. Правда, Пиккеринг⁶⁾ указывает, что фотографии Юпитера до и после покрытия луны показывают легкое сжатие планеты, производимое рефракцией, величина которой не превышает 0",5. Но фотографии планет, особенно в таких исключительных условиях, не могут быть подвергнуты

¹⁾ *Astr. Nachr.* № 236.

²⁾ *Franz. Der Mond*, стр. 60.

³⁾ *Neison. The Moon and the Conditions and Configurations of its Surface*, London 1876 гд. 2-я.

⁴⁾ *Puiseux. La Terre et la Lune*.

⁵⁾ *Annals of the Astr. Obs. Harvard College Vol. 32. Part I.*

⁶⁾ *ibidem*.

точным измерениям, к тому же результат Пиккеринга остается единичным. Строго говоря, мы должны заключить, что рефракционные явления не дают никаких положительных указаний на существование лунной атмосферы.

Заметим, что подобные определения поставлены в особенно неблагоприятные условия вследствие того, что наблюдатель должен иметь дело с атмосферой луны, простирающейся над видимым краем ее, который покрыт высокими горами. Если бы покрытия звезд происходили за низкими котловинами, возможно получился бы другой результат.

С другой стороны, на луне констатированы явления, заставляющие думать, что ее крайне разреженная атмосфера временами делается менее прозрачной. Клейн (Klein) говорит, что иногда ему не удавалось рассмотреть такие подробности в известных местах лунного диска, которые в другое время и при том же освещении были видны совершенно отчетливо. Пиккеринг¹⁾ подробно описывает местность к западу от Аристарха, где расположены 7 маленьких кратеров. Эти кратеры отчасти покрываются выделяющимися из них парами. Деятельность главного кратера зависит от высоты солнца. Она начинается через 1 или 2 дня после восхода, достигает постепенно максимума и исчезает за немногих дней до заката солнца. Наблюдения Пиккеринга относятся к 1891, 2, 3, 7, и 1898 годам.

7 августа 1889 года произошло покрытие луной Юпитера, и при выступлении планеты на светлом краю лунного диска можно было прямо видеть подобное же, по всей вероятности, местное помутнение лунной атмосферы.

На диске Юпитера была ясно заметна тень в виде полосы в $\frac{1}{5}$ диаметра планеты, параллельная краю луны. Явление не изменялось в течение более чем одной минуты. Светлые и темные полосы Юпитера хорошо были видны через тень, хотя и в ослабленном виде. В таком виде явление наблюдалось Петерсон в Боткампе. Здесь важнее всего то, что то же самое наблюдалось одновременно на разных обсерваториях. Стиверт (E. Stuyvaert) в Брюсселе, Кюстнер (Küstner) и Брендель (Brendel) в Берлине, Штернек (Sternbeck) в Вене также видели лунную тень. Кроме того, есть некоторые указания на наличие лунных сумерок. Шрётер (Schröter), Груйтусен (Gruithuisen), Генри (Henry) говорят о сумерках, видимых на рогах молодой луны. Пиккеринг²⁾, разбирая этот вопрос, считает однако, что пепельный свет не позволяет видеть сумерки. Это явление можно видеть, когда луна находится в квадратуре. По его мнению при увеличении около 400 раз заметно удлинение лунных рогов. Сумерки видимы на протяжении около 60''. Наконец различные периодические изменения на луне, констатированные многими наблюдателями, косвенным образом указывают на существование лунной атмосферы.

¹⁾ Ibidem.

²⁾ Harvard Annals. Vol. 32.

Итак, на луне весьма правдоподобно существование разреженной атмосферы, но до сих пор не получено никаких достоверных указаний на ее плотность. Температура на луне в течение долгой лунной ночи также совершенно неизвестна, и путем прямых наблюдений нет никакой возможности прийти к ее определению. Можно думать, что она должна быть необычайно низка. Гюнтер (S. Günther)¹⁾ думает, что она может достигать -150°C и даже -200°C . Это, конечно, совершенно гипотетические цифры. Было бы интересно получить приблизительное определение этой температуры и путем сравнения с результатами Ланглея (S. Langley) и особенно Вери (Fr. Very)²⁾ относительно температуры освещенной части лунной поверхности найти колебания температуры между лунными днем и ночью. В дальнейшем я рассматриваю способ определения плотности лунной атмосферы и температуры лунной ночи, основанный на фотометрическом исследовании сумерок. Чувствительность этого способа, по моему мнению, далеко превышает до сих пор употреблявшиеся методы, так что во всяком случае применение его дало бы возможность значительно понизить верхний предел плотности.

Предположим, что около квадратуры в части луны, соответствующей морю т.-е. наиболее низкому месту, исследуется фотометрически распределение яркости в неосвещенной части лунной поверхности начиная от самого терминатора. Получаем некоторую кривую. Эта кривая сначала быстро падает в яркости, затем постепенно убывает.

Кривая состоит из совместного наложения трех кривых:

1. Кривая яркости атмосферы земли, освещенной луной.
2. Кривая яркости пепельного света.
3. Сумерочная кривая, зависящая от лунной атмосферы.

Необходимо выделить последнюю кривую.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ. Для определения плотности атмосферы луны необходимо предварительно исследовать закон рассеяния света в земной атмосфере от какого-либо небесного источника света небольшого видимого протяжения на малых расстояниях от него. Исследование должно вестись с постоянным эталоном силы света, за который удобно принять экстрафокальное изображение какой-либо яркой звезды и окончательно выразить наблюденные яркости в числе звезд первой величины на один квадратный градус. Для исследования температуры неосвещенной части лунной поверхности абсолютные измерения можно и не делать.

Исследуем, например, яркость фона неба на разных расстояниях от Юпитера или от Венеры, которые дают достаточно сильное освещение. В качестве контроля можно взять Сириус. Юпитер имеет значительный диск, а между тем искомая кривая должна быть отнесена к светящейся

¹⁾ S. Günther. Vergleichende Mond und Erdkunde, стр. 97.

²⁾ Fr. Very. The probable range of Temperature on the Moon. Astroph. Journal Vol. 8, стр. 199 и 265.

точке. Можно принять, что в случае светила, не слишком близкого к горизонту, яркость атмосферы есть функция одного y , расстояния от источника света. От целого диска имеем:

$$i = \iint f(y) dy$$

где i суть наблюденные значения. Мы представляем $f(y)$ в виде ряда с неопределенными коэффициентами, руководствуясь видом интегральной кривой, которая в случае малого диска не будет существенно отличаться от искомой. Имея i для разных расстояний от центра диска, получаем значения неопределенных коэффициентов. Имея $f(y)$ и зная распределение яркости на лунной поверхности в момент наблюдений над сумерками на луне, вычисляем путем механической квадратуры яркость в наблюдаемых точках и, следовательно, находим кривую яркости зависящую от рассеяния света луны в земной атмосфере. Надо полагать, что эта кривая будет понижаться в интересующих нас местах луны весьма медленно, так как эти места удалены от наиболее ярких частей видимого лунного диска, а яркость частей около терминатора и особенно впадин весьма невелика.

Далее необходимо учесть влияние пепельного света. В ярком пепельном свете молодой луны ясно выделяются различные подробности неосвещенной части лунной поверхности. Около квадратуры пепельный свет слаб и темная половина луны кажется почти однородной, что происходит без сомнения, от наложения рассеянного света атмосферы. Как бы то ни было, при определении яркости пепельного света в намеченных точках необходимо принять во внимание закон отражения света от лунной поверхности и (сравнительное) альбедо разных частей луны.

Для строгого решения поставленной проблемы нельзя довольствоваться какими либо законами отражения света от матовых поверхностей, хотя в первом приближении введение этих законов облегчает вывод окончательного результата. Необходимо, поэтому, произвести специальное исследование относительно фотометрических свойств луны. Это можно сделать визуальным или фотографическим путем. Я лично поступал следующим образом. При помощи окулярной камеры с увеличительной системой линз получалось при строго определенной экспозиции, изображение луны диаметром около 10 см. Экспозиция бралась от 5 до 15 секунд для чего отверстие объектива экваториала соответственным образом диафрагмировалось. Затем непроявленная еще пластина вставлялась в копировальную рамку и плотно закрывалась картоном, имеющим прорез у края пластиинки, занятой фотометрическим клином. Рамка переносилась на стойку оптической скамьи на определенном расстоянии от источника света, яркость которого могла регулироваться миллиамперметром. При той же самой экспозиции производился снимок клина рядом со снимком луны. Яркость эталона света подбиралась опытным путем так, чтобы изображение клина удовлетворяло в смысле интенсивности потемнения всем точкам лунного диска. Изображение луны сравнивалось с отпечатком клина в отсчетах

шкалы клина и таким образом определялось количество света, исходящее от определенных частей луны, которое способно произвести данное потемнение. При разных фазах видимая яркость луны значительно меняется и потому нельзя пользоваться эталоном силы света одинаковым во всех случаях. Чтобы различные пластиинки были сравнимы между собой, я получал на клише два отпечатка клина по обеим сторонам изображения луны, оба с экспозицией строго одинаковой с луной. Один отпечаток делался с эталоном прежней яркости, при втором же эталон ослаблялся или усиливался, смотря по надобности. На двух отпечатках клина находились точки одинаковой интенсивности, при помощи которых можно было отсчиты одного клина перевести в отсчеты другого и наоборот. Собственно говоря, мы получали один клин, но с более расширенной градацией потемнения.

Изучение фотографий луны подобного рода должно повести к определению закона отражения света от разных частей ее при всевозможных углах падения и отражения, а также к определению их относительного альбедо. Так как общее альбето луны хорошо известно, то можно определить абсолютное альбето разных частей лунного диска. Предполагая, что это предварительное исследование сделано, можно легко получить кривую яркости пепельного света в исследуемых точках луны в некоторых произвольных единицах. Для перехода к абсолютной кривой надо знать альбето земного шара, которое определено весьма неточно. Поэтому лучше просто определять одновременно с наблюдениями над лунными сумерками яркость пепельного света недалеко от края луны и, исправив ее за влияние фона неба, переходить, пользуясь известной отражательной способностью разных местностей на луне, к интересующим нас точкам вблизи терминатора. Кривая пепельного света будет также понижаться весьма медленно. Около края диска пепельный свет представляется по первому впечатлению даже ярче, чем в центре.

§ 3. Вывод яркости лунных сумерек. Яркость лунных сумерек должна быстро убывать от терминатора, так как только около терминатора солнце освещает нижние слои атмосферы. Характер сумеречной кривой зависит от высоты однородной атмосферы, а, следовательно, от температуры. Абсолютная яркость сумерек определяет ее плотность. Поэтому для определения одной первой величины достаточно вести лишь относительные наблюдения, выполнив тем не менее все предварительное исследование. Если все наблюдения ведутся с определенным эталоном яркости, например, экстрафокальным изображением яркой звезды, то все отсчеты фотометра выражаются в определенных единицах и задача может быть решена полностью. Одно констатирование наличия лунной атмосферы не требует никаких предварительных исследований, если сумерки на луне достаточно интенсивны, потому что сумеречная кривая совершенно иная, чем указанные посторонние влияния.

Предположим, что сумеречная кривая найдена в абсолютных единицах и разовьем теорию нашего способа.

Теория Рэлея (Rayleigh) рассеяния света молекулами воздуха дает следующее выражение:

$$dQ = S \frac{\pi^2}{2\lambda^4 r^2} \frac{(n^2 - 1)^2}{N} \left(1 + \cos^2 \theta\right) dv,$$

где Q — количество рассеянного света, падающее нормально на единицу поверхности на расстоянии r от рассеивающего объема dv ; S — количество света, проходящее через единицу объема атмосферы; N — количество молекул в единице объема плотности δ ; θ — угол между падающими и рассеянными лучами. Имеем:

$$n^2 - 1 = 2c\delta; \delta = \delta_0 \frac{N}{N_0}$$

Положим:

$$k_0 = \frac{2\pi^2}{\lambda^4} \frac{c^2 \delta_0}{N_0}.$$

Тогда

$$dQ = \frac{Sk_0 \delta}{r^2} \left(1 + \cos^2 \theta\right) dv.$$

Пусть объем dv наблюдается под телесным углом ω .

Тогда:

$$dv = r^2 \omega dr,$$

а потому

$$dQ = Sk_0 \delta (1 + \cos^2 \theta) \omega dr.$$

В случае атмосферы луны ω для всех слоев лунной атмосферы соответствует одной и той же ширине наблюдаемого слоя. dr есть элемент высоты атмосферы h . Видимая яркость элемента dv , наблюдаемого под углом ω есть

$$dQ' = \frac{dQ}{\omega} = Sk_0 \delta (1 + \cos^2 \theta) dh.$$

Условие равновесия атмосферы дает:

$$dp = -g\delta dh = -\delta g_0 \frac{a^2}{(a+h)^2} dh$$

(p — давление, δ — плотность, g — ускорение силы тяжести. a — радиус луны).

Далее

$$p = \delta RT — закон Бойля-Мариотта.$$

Отсюда

$$dp = RT d\delta, \text{ если температуру } T \text{ предположить постоянной.}$$

Следовательно

$$\frac{d\delta}{\delta} = -\frac{g_0}{RT} \frac{a^2}{(a+h)^2} dh.$$

Положим

$$\frac{g_0}{RT} = z.$$

Интегрируя предыдущее выражение находим:

$$\delta = \delta_1 e^{-\frac{zh}{a}}.$$

В случае рассеивающего столба атмосферы перпендикулярного к поверхности (ось столба совпадает с лучом зрения) имеем:

$$Q^1 = Sk_0 \delta_1 (1 + \cos^2 \vartheta) \int_0^{h_2} e^{-\frac{xh}{1+\frac{h}{a}}} dh.$$

Если за верхний предел взять ∞ , то интеграл превращается в бесконечность. Практически достаточно взять некоторую высоту h_2 .

Для точки, находящейся на расстоянии $\frac{s}{a}$ от центра лунного диска имеем:

$$Q^1 = Sk_0 \delta_1 (1 + \cos^2 \vartheta) \int_{h_1}^{h_2} e^{-\frac{xh}{1+\frac{h}{a}}} dl,$$

где l — длина рассеивающего столба атмосферы в данном случае наклонного к поверхности. Из треугольника, образованного данным объемом в атмосфере, основанием атмосферного столба и центром луны имеем:

$$(h+a)^2 = a^2 + l^2 + 2al \cos z.$$

Угол z есть наклон l к нормали к поверхности; отсюда имеем:

$$dl = \frac{(h+a) dh}{l + a \cos z}; \quad l = -a \cos z + \sqrt{a^2 \cos^2 z + h^2 + 2ah};$$

Следовательно

$$dl = \frac{(h+a) dh}{\sqrt{a^2 \cos^2 z + h^2 + 2ah}}$$

или

$$dl = \frac{dh}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 z}{(a+h)^2}}}.$$

Итак имеем окончательно для случая квадратуры, т.-е. для $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ формулу:

$$(I) \quad Q = Sk_0 \delta_1 \int_{h_1}^{h_2} \frac{e^{-\frac{xh}{1+\frac{h}{a}}}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{(1+\frac{h}{a})^2}}} dh.$$

Для случая какой угодно фазы α мы имеем:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q^i = Sk_0 \delta_i (1 + \cos^2 \alpha) \int_0^{h_2} \frac{e^{-\frac{xh}{1 + \frac{h}{a}}}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(90^\circ - \alpha)}{(1 + \frac{h}{a})^2}}} dh; \\ Q^i = \delta k_0 \delta_i (1 + \cos^2 \alpha) \int_{h_1}^{h_2} \frac{e^{-\frac{xh}{1 + \frac{h}{a}}}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{(1 + \frac{h}{a})^2}}} dh; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(для точки} \\ \text{на термина-} \\ \text{торе).} \end{array}$$

Здесь

$$\sin z = \sin(\alpha - 90^\circ) \mp \frac{s}{a}.$$

Величина s есть видимое расстояние от точки на терминаторе, знак — относится к положению по ту же сторону от центра диска, как и терминатор, знак $+$ по другую сторону. Случай (II) относится к любой фазе α , но к положениям всех точек на экваторе интенсивности. Наконец, в самом общем случае, когда фаза есть α и положение точки определяется координатами φ и λ , считаемых от экватора интенсивности и центрального меридиана, имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \cos z_0 = \cos(\alpha - 90^\circ) \cos \varphi_0 \\ \cos z = \cos \lambda \cos \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{точка на терминаторе,} \\ \text{точка, где угодно на диске.} \end{array}$$

и формулы:

$$(III) \quad \left. \begin{array}{l} Q^i = Sk_0 \delta_i (1 + \cos^2 \alpha) \int_0^{h_2} \frac{e^{-\frac{xh}{1 + \frac{h}{a}}}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z_0}{(1 + \frac{h}{a})^2}}} dh \\ Q^i = Sk_0 \delta_i (1 + \cos^2 \alpha) \int_{h_1}^{h_2} \frac{e^{-\frac{xh}{1 + \frac{h}{a}}}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{(1 + \frac{h}{a})^2}}} dh \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(точка на} \\ \text{термина-} \\ \text{торе)} \end{array}$$

$$Q^i = Sk_0 \delta_i (1 + \cos^2 \alpha) \int_{h_1}^{h_2} \frac{e^{-\frac{xh}{1 + \frac{h}{a}}}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{(1 + \frac{h}{a})^2}}} dh.$$

Остается определить нижний предел h_1 ,
В первом случае очевидно

$$(I) \quad h_1 = a \frac{2 \sin^2 \frac{z}{2}}{\cos z}$$

Во втором

$$(II) \quad \frac{h_1}{a} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha - 90^\circ - z}{2}}{\cos(\alpha - 90^\circ - z)};$$

В третьем имеем:

$$\cos z = \cos \varphi \cos \lambda,$$

где φ, λ суть координаты точки. Для наблюдателя в этой точке B имеем: направление BL к центру луны определяется углами $-\varphi, \pi + \lambda$, в той же системе координат. Направление на солнце S определяется углами $\lambda = \alpha$; $\varphi = 0$, так как солнце находится на экваторе интенсивности. Угол $LBS = \psi$ определяется поэтому так:

$$\cos \psi = \cos \varphi \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \lambda \right).$$

Далее

$$h_1 + a = \frac{a}{\sin \psi}$$

или

$$(III) \quad \frac{h_1}{a} = \frac{1 - \sin \psi}{\sin \psi}.$$

Остальные формулы (I) и (II) получаются как частные случаи этого. Итак нижний предел интеграции определен.

Возьмем наш интеграл:

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{e^{-\frac{xh}{1+\frac{h}{a}}}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2}}} dh$$

$$= \frac{xh}{1 + \frac{h}{a}}$$

Выражение $e^{-\frac{xh}{1+\frac{h}{a}}}$ можно разложить в сходящийся ряд при всяком h , так как

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{xh}{1 + \frac{h}{a}} \neq \infty.$$

Именно:

$$e^{-\frac{xh}{1+\frac{h}{a}}} = 1 - \frac{xh}{1 + \frac{h}{a}} + \frac{x^2 h^2}{2 \left(1 + \frac{h}{a}\right)^2} - \frac{x^3 h^3}{6 \left(1 + \frac{h}{a}\right)^3} + \dots$$

кроме того

$$\left[1 - \frac{\sin^2 z}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2} \right]^{-1} = 1 + \frac{\sin^2 z}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2} + \frac{3}{8} \frac{\sin^4 z}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^4} + \frac{15}{48} \frac{\sin^6 z}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^6} + \dots$$

Второй ряд также сходится, так как $\sin z$ есть малая величина. После некоторых преобразований имеем:

$$\left[1 - \frac{\pi \sin^2 z}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2} \right]^{-1} = \sec z \left[1 - \frac{h}{a} \operatorname{tg}^2 z + \frac{3}{2} \frac{h^2}{a^2} \left(\operatorname{tg}^2 z + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 z \right) - \frac{2h^3}{a^3} \left(\operatorname{tg}^3 z + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{9}{2} \operatorname{tg}^4 z + \frac{15}{6} \operatorname{tg}^6 z \right) + \dots \right]$$

Пусть $\frac{h}{a} = x; ax = k$

Имеем:

$$e^{-\frac{kx}{1+x}} = 1 - kx + x^2 \left(k + \frac{1}{2} k^2 \right) - x^3 \left(k + k^2 + \frac{1}{6} k^3 \right) + x^4 \left(k + \frac{3}{2} k^2 + \frac{1}{2} k^3 + \dots \right) + \dots$$

Перемножая оба ряда и вычисляя интеграл, определяющий Q , находим:

$$Q' = Sk_0 \delta_1 a (1 + \cos^2 a) \int_{h_1}^{h_2} \frac{\frac{e^{-\frac{kx}{1+x}}}{x}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 z}{(1+x)^2}}} dx = Sk_0 \delta_1 a (1 + \cos^2 a) \sec z \int_{h_1}^{h_2} \left[1 - (\text{I}) x + \right.$$

$$\left. + (\text{II}) x^2 - (\text{III}) x^3 + \dots \right] dx$$

или

$$Q' = Sk_0 \delta_1 a (1 + \cos^2 a) \sec z \left[x_2 - x_1 - (\text{I}) \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + (\text{II}) \frac{x_2^3 - x_1^3}{2} - (\text{III}) \frac{x_2^4 - x_1^4}{4} + \dots \right],$$

где

$$x_1 = \frac{h_1}{a}; x_2 = \frac{h_2}{a}$$

и

$$(\text{I}) = \operatorname{tg}^2 z + k$$

$$(\text{II}) = \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 z + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 z + k \operatorname{tg}^2 z + \left(k + \frac{1}{2} k^2 \right)$$

$$(\text{III}) = 5 \operatorname{tg}^6 z + \left(9 + \frac{3}{8} k \right) \operatorname{tg}^4 z + \left(2 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} k^2 \right) \operatorname{tg}^3 z + \left(k + k^2 + \frac{1}{6} k^3 \right)$$

При $z = 0$ имеем:

$$Q' = Sk_0 \delta_1 (1 + \cos^2 a) \left[x_2 - x_1 - \left(x_2^2 - x_1^2 \right) \frac{k}{2} + \left(x_2^3 - x_1^3 \right) \frac{k + \frac{1}{2} k^2}{3} - \right.$$

$$\left. - \left(x_2^4 - x_1^4 \right) \frac{k + k^2 + \frac{1}{6} k^3}{4} + \dots \right]$$

Ряд сходящийся, но медленно, потому что k может быть велико.

Можно также вычислять выражение Q' при помощи механической квадратуры, исходя из точной формулы.

В предыдущем мы пренебрегали рефракцией и поглощательной способностью лунной атмосферы.

§ 4. Влияние света рассеянного земной атмосферой. Я имею в виду в изложенной работе разработать способ определения температуры и плотности лунной атмосферы и исследовать его чувствительность. Примем, что для луны справедлив закон Ламберта и вычислим в этом предположении влияние света, рассеянного земной атмосферой.

Количество света, рассеянного элементом ds лунной поверхности на расстоянии R от луны, есть согласно Ламберту

$$dq = \frac{\Gamma \cos i \cos \varepsilon ds}{R^2},$$

где $\Gamma = \frac{A}{\pi}$ (A — альбедо луны), а i и ε суть углы падения и отражения света. Примем за полюс видимый центр луны, т.-е. точку на поверхности, находящуюся в центре видимого диска. Видимая яркость элементы ds есть

$$\frac{\Gamma \cos i \cos \varepsilon ds}{R^2 d\omega},$$

где $d\omega$ есть видимая величина элемента ds . Имеем, очевидно, что

$$d\omega = \frac{ds \cos \varepsilon}{R^2},$$

при чем R можно принять одинаковым для всех элементов поверхности луны. Поэтому:

$$\frac{dq}{d\omega} = \Gamma \cos i.$$

Возьмем где-либо точку небесного свода A на видимом расстоянии r от рассматриваемого элемента. Положение элемента ds определяется расстоянием его r от полюса и углом φ , который вектор составляет с экватором интенсивности. Угол φ будем отсчитывать от освещенной части луны к неосвещенной, т.-е. по стрелке часов в случае, если луна находится до первой четверти и обратно в случае последней четверти. Элемент A имеет подобные же координаты ρ_1 и φ_1 . Освещение в A , производимое элементом лунной поверхности ds с видимой величиной $d\omega$, есть функция одного расстояния r , как мы уже предполагали.

Следовательно элемент $d\omega$ производит освещение в A .

$$\Gamma \cos i f(r) d\omega,$$

а вся освещенная лунная поверхность

$$J = \Gamma \int_{\Sigma} \cos i f(r) d\omega.$$

Интеграция распространена на всю поверхность Σ луны, освещенную солнцем.

Имеем из сферического треугольника с вершинами в $d\omega$, s — направлением на солнце из центра луны и T — направлением на землю, т.-е. полюсом, что

$$\cos i = \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi,$$

при чем

$$\rho = \sin \alpha \quad (\rho \text{ выражено в частях лунного радиуса}).$$

Далее

$$d\omega = \rho d\varphi d\rho,$$

отсюда

$$\cos i = \cos \alpha \sqrt{1 - \rho^2} + \sin \alpha \cdot \rho \cos \varphi$$

и потому

$$J = \Gamma \cos \alpha \int_{\Sigma} \sqrt{1 - \rho^2} f(r) \rho d\varphi d\rho + \Gamma \sin \alpha \int_{\Sigma} f(r) \rho^2 d\varphi d\rho.$$

Но из прямолинейного треугольника, образованного отрезком r , ρ и ρ_1 , имеем:

$$r^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Здесь ρ_1 и φ_1 полярные координаты, определяющие элемент А по отношению к центру лунного диска. Из моих прежних наблюдений выведено, что приблизительная форма $f(r)$ такова

$$f(r) = \frac{1}{1 + 2r^3},$$

r — выражена в радиусах лунного диска, а $f(r)$ — дано до коэффициента пропорциональности.

Необходимо вычислить выражение:

$$J = \Gamma \cos \alpha \int_{\Sigma} \frac{\sqrt{1 - \rho^2} \rho d\varphi d\rho}{1 + 2[\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)]} + \Gamma \sin \alpha \int_{\Sigma} \frac{\rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho}{1 + 2[\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)]}$$

Можно вести первую интеграцию по ρ , но при этом получается крайне сложное выражение. Я предпочел, поэтому, взять первую интеграцию по другому переменному φ .

Положим:

$$1 + 2\rho^2 + 2\rho_1^2 = a, \quad 4\rho\rho_1 = b.$$

Надо взять интегралы типа

$$\int \frac{d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)}.$$

Составляем разность $a^2 - b^2$:

$$a^2 - b^2 = 1 + 4(\rho^4 + \rho_1^4 - 4\rho^2\rho_1^2);$$

Требуется определить знак этой разности, имея в виду, что наблюдение должно производиться вблизи квадратуры. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\rho = 0$ имеем, что $a^2 - b^2 > 0$. В каких пределах это неравенство сохраняется?

Для некоторой фазы α изменение ρ заключено между пределами ρ_1 и 1. Так как во всем промежутке интеграции должно иметь место неравенство $a^2 - b^2 > 0$, то мы должны взять самый неблагоприятный случай, именно $\rho = 1$.

Тогда

$$a^2 - b^2 = 1 + 4(1 + \rho_1^4 - 4\rho_1^2) = 5 + 4\rho_1^4 - 16\rho_1^2 \geq 0;$$

отсюда

$$(4 - \rho_1^2) 4\rho_1^2 \leq 5.$$

Предельное значение ρ_1 определяется из уравнения

$$16\rho_1^2 - 4\rho_1^4 - 5 = 0,$$

откуда

$$\rho_1^2 = 2 - \frac{\sqrt{11}}{2} \quad (\text{перед радикалом знак --, так как } \rho_1 < 1)$$

и

$$\rho_1 = \sqrt{2 - \frac{\sqrt{11}}{2}} = 0,58455,$$

Значит если $\rho_1 \leq 0,58455$ видимого радиуса луны, то знак разности $a^2 - b^2$ положителен. Но ρ_1 , как и ρ считаются от видимого центра луны. Так как мы должны взять одну точку на терминаторе, то предельная фаза, удовлетворяющая условию $a^2 - b^2 > 0$ определяется из условия

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \rho_1 = 0,58455,$$

откуда

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = 35^\circ, 7.$$

Если мы желаем сохранить поставленное условие, то наблюдения можно делать между квадратурой и фазой за три дня до или после квадратуры.

Теперь перейдем к интеграции:

$$\int \frac{d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc tg} \frac{(a + b) \operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C,$$

Площадь интеграции Σ разбиваем на две: $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$; Σ_1 отвечает квадратуре; Σ_2 — ограничена терминатором и центральным меридианом. Пределы φ для Σ_1 суть $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\Sigma_1} \frac{d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\operatorname{arc tg} \frac{(a + b) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\sqrt{a^2 - b^2}} + \operatorname{arc tg} \frac{(a + b) \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right].$$

Второй интеграл приводится к тому же типу. Действительно

$$\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} = \int \frac{(\cos \varphi \cos \varphi_1 - \sin \varphi \sin \varphi_1) d\varphi}{a - b \cos \varphi}, \text{ где полагаем } \psi = \varphi - \varphi_1;$$

Имеем:

$$\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} = -\frac{\cos \varphi_1}{b} (\varphi - \varphi_1) - \frac{\sin \varphi_1}{b} \log \left[a - b \cos(\varphi - \varphi_1) \right] + \\ + \frac{a}{b} \cos \varphi_1 \int \frac{d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)}.$$

Последний интеграл преобразовываем следующим образом:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{t \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]}{1 - t^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

или

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{At}{\sqrt{1 - Bt^2}},$$

где полагаем

$$t = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{1+2(\rho+\rho_1)^2}{1+2(\rho-\rho_1)^2}};$$

$$A = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right); \quad B = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right).$$

Для площади интегрирования $\Sigma_1 \varphi$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

, , , , $\Sigma_2 \varphi$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, если
 $\rho \leq \beta$.

Если $1 \geq \rho \geq \beta$, то φ изменяется от φ_0 до $\frac{\pi}{2}$ и от $-\varphi_0$ до $-\frac{\pi}{2}$,
причем φ_0 есть некоторая функция ρ .

Найдем эту функцию.

Рассмотрим полуэллипс, образованный терминатором и центральным меридианом. Большая полуось a — радиус луны, принимаемый за единицу, малая полуось β .

В прямоугольных координатах имеем:

$$x^2 + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

где

$$x = \rho \sin \varphi, \quad y = \rho \cos \varphi.$$

Следовательно

$$\rho^2 \sin^2 \varphi + \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{\beta^2} = 1,$$

а потому

$$\sin^2 \varphi = \frac{\rho^2 - \beta^2}{\rho^2(1 - \beta^2)}.$$

Если пределы зависят от ρ , то имеем:

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{A_1 t}{1 + B_1 t^2},$$

$$\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a - b \cos(\varphi - \varphi_1)} = - \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{A_2 t}{1 + B_2 t^2}.$$

где

$$A_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}$$

$$B_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}$$

$$A_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$$

$$B_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}.$$

В этом случае интеграция распространяется на область, заключенную между терминатором и полукругом радиуса β и ограниченную центральным меридианом.

Если α угол фазы, то

$$\beta = \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \text{ (радиус луны принят за единицу).}$$

Этим определяются все величины, входящие в формулу.

Площадь Σ_2 разобъем на две $\Sigma_2 = \Sigma'_2 + \Sigma''_2$, где Σ'_2 представляет полуокружность радиуса β , а Σ''_2 есть только что упомянутая площадь. Собирая проинтегрированные выражения, будем иметь:

$$J_1 = \Gamma \cos \alpha \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{At}{1 - Bt^2} + \\ + \Gamma \sin \alpha \int_0^1 \rho^2 d\rho \left[-\frac{\pi \cos \varphi_1}{b} - \frac{\sin \varphi_1}{b} \log \frac{a - b \sin \varphi_1}{a + b \sin \varphi_1} + \frac{a}{b} \cos \varphi_1 \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{At}{1 - Bt^2} \right];$$

$$\begin{aligned}
 J'_2 &= \Gamma \cos \alpha \int_0^{\beta} \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arg \operatorname{tg} \frac{At}{1-Bt^2} + \\
 &+ \Gamma \sin \alpha \int_0^{\beta} \rho^2 d\rho \left[-\frac{\cos \varphi_1}{b} - \frac{\sin \varphi_1}{b} \log \frac{a-b \sin \varphi_1}{a+b \sin \varphi_1} + \frac{a}{b} \cos \varphi_1 \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc tg} \frac{At}{1-Bt^2} \right]; \\
 J''_2 &= \Gamma \cos \alpha \int_{\beta}^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \left(\operatorname{arc tg} \frac{A_1 t}{1+B_1 t^2} - \operatorname{arc tg} \frac{A_2 t}{1+B_2 t^2} \right) + \\
 &+ \Gamma \sin \alpha \int_{\beta}^1 \rho^2 d\rho \left[-\frac{\cos \varphi_1}{b} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) - \frac{\sin \varphi_1}{b} \log \frac{a-b \sin \varphi_1}{a+b \cos(\varphi_0 - \varphi_1)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a}{b} \cos \varphi_1 \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc tg} \frac{A_1 t}{1+B_1 t^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos \varphi_1}{b} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) - \frac{\sin \varphi_1}{b} \log \frac{a+b \sin \varphi_1}{a-b \cos(\varphi_0 + \varphi_1)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a}{b} \cos \varphi_1 \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc tg} \frac{A_2 t}{1+B_2 t^2} \right]
 \end{aligned}$$

и $J = J_1 - J'_2 - J''_2$.

Два первых интеграла соединяются в один с пределами от β до 1. В частном случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$J = \Gamma \int_0^1 \rho^2 d\rho \left[-\frac{\cos \varphi_1 \pi}{b} - \frac{\sin \varphi_1}{b} \log \frac{a-b \sin \varphi_1}{a+b \sin \varphi_1} + \frac{2a}{b \sqrt{a^2-b^2}} \cos \varphi_1 \operatorname{arc tg} \frac{At}{1-Bt^2} \right],$$

так как

$$A_1 = A_2 = 0 \quad J''_2 = 0 \quad J'_2 = 0.$$

Здесь

$$a = 1 + 2\rho^2 + 2\rho_1^2; b = 4\rho\rho_1; t = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Пусть исследуемые точки на неосвещенной части луны находятся на экваторе интенсивности

$$\varphi_1 = \pi.$$

Имеем:

$$J = \Gamma \int_0^1 \rho^2 d\rho \left[\frac{\pi}{b} + \frac{2a}{b \sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc tg} \frac{2\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}{1-\frac{a+b}{a-b}} \right]$$

или

$$J = \Gamma \int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{4\rho\rho_1} \left[\pi - \frac{2a}{b \sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \right]$$

Заменяя a и b их выражениями, получаем:

$$\begin{aligned}
 J &= \Gamma \frac{\pi}{8\rho_1} - \frac{\Gamma}{2\rho_1} \int_0^1 \rho d\rho \frac{1+2\rho^2+2\rho_1^2}{\sqrt{(1+2\rho_1^2)^2+4\rho^2(\rho^2-2\rho_1^2+1)}} \times \\
 &\times \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(1+2\rho_1^2)^2+4\rho^2(\rho^2-2\rho_1^2+1)}}{4\rho\rho_1}.
 \end{aligned}$$

Если точка находится на терминаторе, то $\rho_1 = 0$ и предыдущая формула получает неопределенный вид $\infty - \infty$.

Действительно нетрудно видеть, что подрадикальное выражение есть в этом случае точный квадрат числителя.

Очевидно, что интеграл сводится к $\frac{\pi}{4}$.

В этом случае вычисляем двойной интеграл, полагая в нем с самого начала $\rho_1 = 0$ и $\varphi_1 = \pi$. Имеем:

$$J = \Gamma \int_{\Sigma} \frac{\rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi}{1 + 2\rho + 2\rho_1^2 - 4\rho \rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)} = \Gamma \int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{1 + 2\rho^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi.$$

Отсюда

$$J = \Gamma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \Gamma \cdot 0,32449.$$

Итак

$$J = \Gamma \cdot 0,32449, \text{ для } \alpha = \frac{\pi}{2}, \rho_1 = 0 \text{ и } \varphi_1 = \pi.$$

Для других значений ρ_1 вычисляем J при помощи механической квадратуры. Мы берем $\rho_1 = 0,1, 0,2, 0,3$ и изменяем ρ при вычислении подинтегрального количества через каждую десятую долю единицы. В этих трех случаях подинтегральная функция такова:

ρ	$\rho_1 = 0,1$	$\rho_1 = 0,2$	$\rho_1 = 0,3$
0,0	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,15335	0,15022	0,14781
0,2	0,30036	0,28925	0,28098
0,3	0,44524	0,42147	0,40532
0,4	0,58462	0,55060	0,52568
0,5	0,72570	0,67962	0,64536
0,6	0,86771	0,80936	0,76645
0,7	1,01082	0,94234	0,89001
0,8	1,15621	1,07730	1,01650
0,9	1,30279	1,21477	1,14602
1,0	1,45074	1,35454	1,27836

Применяя способ интеграции Стирлинга, я получил:

$$\rho_1 = 0,1 \quad \rho_1 = 0,2 \quad \rho_1 = 0,3$$

$$J = \Gamma \cdot 0,2909 \quad \Gamma \cdot 0,2603 \quad \Gamma \cdot 0,2318$$

и при

$$\rho_1 = 0,0, \quad J = \Gamma \cdot 0,3245.$$

Мы видим, что падение яркости, вследствие наличности освещенной земной атмосферы, происходит довольно медленно.

Влияние пепельного света я здесь не рассматриваю, так как закон Ламберта и вообще всякий другой закон рассеяния света от матовых

поверхностей, дает слишком проблематичные результаты. Пепельный свет кажется почти равномерной яркости на всем лунном диске и, налагаясь на кривую рассеяния в земной атмосфере, должен дать результатирующую еще с меньшим градиентом падения.

Различие в применении закона Ламберта в случае рассеянного атмосферой земли света и в случае пепельного света заключается в том, что в первом случае мы рассматриваем интегральный эффект всего освещенного лунного диска, причем исследуемые точки находятся на довольно большом расстоянии от наиболее ярких местностей луны; здесь возможна в конечном итоге большая или меньшая компенсация отдельных уклонений от действительности. Во втором же случае формула Ламберта должна быть применена непосредственно к исследуемым точкам и потому она войдет со всеми своими недостатками.

§ 5. Яркость лунных сумерек. Чувствительность способа.

Вычислим теперь кривую яркости лунных сумерек для тех же точек.

$$Q' = S k_0 \delta_1 (1 + \cos^2 z) \int_{h_1}^{h_2} e^{-\frac{hk}{1+\frac{h}{a}}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\sin^2 z}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2}}} dh.$$

Возьмем тот же случай

$$z = \frac{\pi}{2} \text{ и } \varphi_1 = \pi.$$

Тогда видимое расстояние от центра ρ_1 будет:

$$\rho_1 = \sin z$$

Пренебрежем членом $\frac{h}{a}$ в знаменателе, тогда:

$$Q' = S k_0 \delta_1 \int_{h_1}^{\infty} e^{-kh} \sec z dh = -S k_0 \delta_1 \sec z \frac{1}{k} \left(-e^{-kh_1} \right);$$

$$k = \frac{1}{h_0};$$

$$Q' = S k_0 \delta_1 \sec z \frac{1}{k} e^{-kh_1}.$$

Мы имеем наш первый случай, а потому

$$h_1 = 2 \sin^2 \frac{z}{2} \sec z,$$

причем разным ρ_1 соответствуют следующие значения z .

ρ_1	0,0	0,1	0,2	0,3
z	$0^\circ 0' 0''$	$5^\circ 44' 21''$	$11^\circ 32' 13''$	$17^\circ 27' 21''$

Пусть h_t , g_t , τ_t суть высота однородной атмосферы, напряжение силы тяжести и температура земной атмосферы. Тогда в предположении одинакового химического состава атмосфер земли и луны имеем:

$$\frac{h_0}{h_t} = \frac{\tau_t}{\tau_t} \frac{g_t}{g},$$

причем

$$g_t = 9,81 \frac{m}{sec^2}; g = 1,658 \frac{m}{sec^2};$$

$$\tau_t = 273^\circ \text{ abs.}; h_t = 8 km.$$

Вычисляем h_0 для разных τ . Получаем:

τ	50° abs	100°	150°	200°
h_0	0,0049766	0,0099533	0,0149299	0,0199066

h_0 выражено в частях лунного радиуса.

Переменный множитель в выражении Q' есть

$$\sec z e^{-\frac{2 \sin^2 \frac{z}{2} \sec z}{h_0}}.$$

Вычисляя его и выражая в произвольных единицах, получим следующую табличку:

	$\rho_1 = 0,0$	$\rho_1 = 0,1$	$\rho_1 = 0,2$	$\rho_1 = 0,3$
$\tau = 50^\circ$	1,0000	0,3653	0,01620	0,00006437
100°	1,0000	0,6059	0,1285	0,008198
150°	1,0000	0,7173	0,2565	0,04134
200°	1,0000	0,7804	0,3622	0,09275

Различие кривых огромно. (Рис. 1.) Отсюда следует, что из чисто относительных измерений яркости около лунного терминатора можно решить вопрос о наличии лунной атмосферы.

Из одних относительных наблюдений можно определить температуру неосвещенной части лунной поверхности следующим образом. Вследствие того, что эта температура должна быть очень низка, примерно 100° abs. , уже на небольшом расстоянии от терминатора влияние сумерек исчезающее мало. На расстоянии примерно $\rho_1 = 0,3$ ординаты результирующей кривой, полученной из наблюдений, представляют, поэтому, совокупную яркость атмосферы земли и пепельного света. Если ход этой последней кривой известен,

то можно, зная ее ординату при $\rho_1 = 0,3$, определить и другие ее ординаты в исследуемых точках. Таким образом можно выделить сумерочную кривую

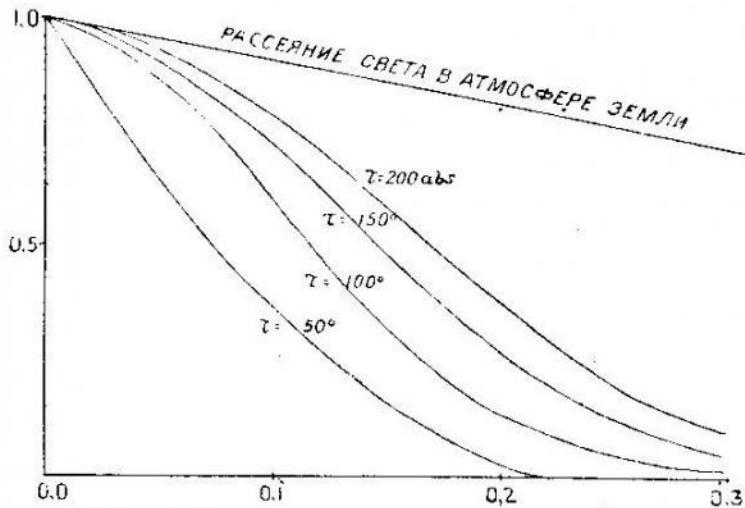


Рис. 1. Сумерки около лунного терминатора.

лунной атмосферы при $z = 0$, что всегда можно иметь поскольку эта яркость известна для какого-нибудь z .

Мы имели:

$$Q' = S k_0 \delta_1 h_0 \sec z e^{-\frac{2 \sin^2 \frac{z}{2} \sec z}{h_0}}$$

В данном случае

$$Q' = S k_0 \delta_1 h_0,$$

где $\delta_1 h_0$ постоянная величина, равная массе столба атмосферы над лунной поверхностью. Q' выражено в числе звезд первой величины на 1 квадратный радиус неба. S выражается в тех же единицах, так как звездная величина солнца известна.

Итак $\frac{Q'}{S}$ известно из наблюдений.

Величина $k_0 = \frac{2 \tau^2 c^2 \delta_0}{\lambda^4 N_0}$ известна, поскольку состав лунной атмосферы не отличается от земной. Следовательно находим $\delta_1 h_0$, а так как h_0 , зависящая от абсолютной температуры, уже было определено, то определяем и δ_1 . Насколько формула Рэлея хорошо согласуется с действительностью в ее применении к рассеянию света молекулами даже для земной атмосферы, богатой пылью, было мною уже показано в моей работе „О строении атмосферы (фотометрический анализ сумерек)“.

Можно, если угодно, избегнуть вычисления k_0 , сравнив лунную атмосферу с земной с точки зрения ее рассеивающей способности.

Теперь остается найти чувствительность предложенного мною способа. Приблизительно это можно сделать так:

Имеем:

$$c = 0,21607; \lambda = 0,56 \mu = 0,00056 \text{ см.}$$

$$\delta_0 = 0,0012932; N_0 = 2,6 \cdot 10^{19}.$$

в тех же произвольных единицах, в которых выражена наблюдаемая кривая. Ход первой кривой сразу определяет температуру на луне во время лунной ночи.

Однако лучше производить наблюдения абсолютного характера и сразу получать иско-мую кривую во всех ее точках.

Пусть мы получили абсолютную яркость

Отсюда

$$k_0 = 0,5122 \cdot 10^{-9}.$$

Следовательно

$$\frac{Q'}{S} = 0,5122 \cdot 10^{-9} k_0 h_0.$$

Пусть S' есть видимая яркость луны

$$\frac{S}{S'} = 619000.$$

Отсюда

$$\frac{Q'}{S'} = 3,16 \cdot 10^{-4} k_0 h_0.$$

Если S'' есть яркость пепельного света, то, по моим прежним наблюдениям (Determination de l'albedo de la Terre), отношение $\frac{S'}{S''}$ равно примерно 20000, при фазе около квадратуры. Пепельный свет может свободно наблюдаваться и у края лунного диска еще в 6—8 раз превосходить яркость фона неба в том же месте диска.

Следовательно

$$\frac{Q'}{S''} = 6,32 k_0 h_0.$$

Для земной атмосферы

$$k_0 h_0 = 1,04 \cdot 10^4.$$

Значит, если бы луна обладала атмосферой, имеющей ту же массу в столбе над единицей поверхности, то

$$\frac{Q'}{S''} = 6,57 \cdot 10^4.$$

Принимая во внимание возрастание яркости фона неба к центру диска луны и полагая яркость пепельного света одинаковой на всем диске, имеем, что S'' — пепельный свет + фон неба $= \frac{3}{2} S''$ в центре луны, и $S''' = \frac{5}{4} S''$ в точке $\rho_1 = 0,2$. Значит:

$$\frac{Q'}{S'''} = 6832.$$

Если яркость лунной атмосферы $Q' = S'''$, то сумеречная кривая почти на всем своем протяжении может быть легко определена. Таким образом указанный способ применим к точному определению искомых величин, если $\rho_1 h_0$ для луны в 7000 меньше той же величины для Земли. Так как h_0 для луны есть величина того же порядка, как и высота земной однородной атмосферы, то такое же отношение имеем и для плотностей сравниваемых атмосфер. Обнаружить существование лунной атмосферы можно свободно, если яркость сумеречного света, хотя бы на 10% повышает совокупную яркость земного рассеянного света + пепельный свет. Это дает

для верхнего предела плотности атмосферы луны, который может быть определен из наблюдений, величину во всяком случае не меньшую $\frac{1}{50000}$ плотности земной атмосферы. Чувствительность моего способа, таким образом, очень велика.

Что касается практического осуществления изложенного здесь метода, то, мне кажется, следует наблюдать лунные сумерки над наиболее низкими местностями луны. Самой низкой впадиной на луне является Oceanus Procellarum и отчасти Mare Imbrium, который по исследованиям Франца на 2400 метров ниже среднего уровня лунной поверхности.

Таким образом самой благоприятной местностью является восточная часть Mare Imbrium к югу от Коперника. Яркие Аппеннины уже скрылись к моменту наблюдений на неосвещенной части луны и поблизости избранной местности нет очень ярких точек. Яркость лунного серпа очень ослаблена благодаря наличности большого количества морей и фон неба поэтому сравнительно темен.

Чтобы учесть влияние рассеяния света в земной атмосфере, надо принять во внимание влияние каждого пятна на лунном диске в отдельности. Для этого начертав лунный диск и терминатор соответствующей фазы, далее наметив исследуемые точки на неосвещенной части луны, накладываем на чертеж кальку с тесным рядом концентрических кругов и радиальных линий, сходящихся в исследуемой точке. Эффект рассеяния света земной атмосферой оцениваем по каждой концентрической зоне в отдельности, для всех точек которой функция $f(\rho)$ зависит от того же аргумента. Но это уже частности способа. Вообще рассеяние света обнаруживается гораздо легче рефракции или поглощения. Найденную чувствительность способа можно было ожидать.

Декабрь 1921 г.

LA MÉTHODE POUR DÉTERMINER LA TEMPÉRATURE DE LA SURFACE
DE LA LUNE NON ÉCLAIRÉE PAR LE SOLEIL ET LA DENSITÉ DE
L'ATMOSPHÈRE LUNAIRE.

Par *B. Fessenkoff*.

RÉSUMÉ:

Je montre dans ce travail que le crépuscule lunaire qui existe nécessairement du moment que notre satellite n'est pas complètement dépourvu de l'atmosphère, donne un moyen très sensible pour déterminer la densité de l'atmosphère en question de même que la température de la surface non éclairée par le soleil.

Nous supposons que les propriétés des différentes parties du disque de la Lune, quant à réfléchir la lumière, sont bien connues. Outre cela nous

supposons connue la loi de la distribution de l'intensité du fond du ciel aux distances différentes d'une source cosmique de lumière.

Considérons la Lune près de la dernière lunaison quand le terminateur passe par Mare Imbrium et la partie du disque qui reste encore visible est comparativement sombre, étant occupée principalement par les mers. L'éclat de la partie non éclairée augmente très distinctement à mesure qu'on approche vers le terminateur. L'intensité de la partie non éclairée du disque dépend de trois causes:

1. Crépuscule dans l'atmosphère de la Lune qui est sensible tout près du terminateur et dont l'intensité varie rapidement.

2. Lumière de la Lune diffusée par l'atmosphère terrestre.

3. Lumière cendrée de la Lune.

Je montre comment les deux dernières causes peuvent être éliminées. Par conséquent les observations peuvent donner la courbe photométrique représentant la lumière crépusculaire dans la Lune.

Il est à remarquer que nous pouvons nous placer dans les meilleures conditions possibles, c'est à dire choisir les régions les plus basses de la lune comme justement certaines parties de Mare Imbrium et de Oceanus Procellarum.

Pour avoir dans la discussion mathématique du problème un cas déterminé je suppose ensuite que la surface de la Lune réfléchit la lumière suivant la loi de Lambert, que le terminateur passe exactement par le centre de la Lune et que la courbe crépusculaire est déterminée par les observations pour l'équateur de l'intensité.

La table suivante donne l'intensité relative aux distances différentes du terminateur, rayon de la Lune étant pris pour l'unité.

	$\rho = 0,0$	0,1	0,2	0,3
Lumière diffusée par l'atmosphère terrestre	1,000	0,896	0,802	0,714
Crépuscule de la Lune pour la température $\tau = 50^\circ$ abs.	1,000	0,365	0,0162	0,0000
Crépuscule de la Lune pour la température $\tau = 100^\circ$ abs.	1,000	0,606	0,1285	0,008
Crépuscule de la Lune pour la température $\tau = 150^\circ$ abs.	1,000	0,717	0,256	0,041
Crépuscule de la Lune pour la température $\tau = 200^\circ$ abs.	1,000	0,780	0,362	0,093

La différence entre ces courbes est énorme. On peut facilement concevoir, comme je le montre dans ce travail, que les mesures purement relatives fournissent la possibilité de déterminer la température de la Lune.

Les mesures absolues d'intersité permettent de trouver la densité de l'atmosphère de la Lune. Je montre que l'investigation exacte peut être faite si la densité de l'atmosphère de la Lune est 7.000 fois plus faible que celle de la Terre. Mais il est possible de constater la présence de l'atmosphère autour de notre satellite si sa densité n'est que $\frac{1}{50000}$ celle de l'atmosphère terrestre. Telle est la sensibilité de la méthode.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ВЕРХНИХ СЛОЯХ ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЫ.

В. Г. Фесенков.

Фотометрические наблюдения над сумерками позволяют определить между известными пределами изменение отражательной способности атмосферы. Если пренебречь рассеянием света высших порядков, что вполне допустимо для высоких атмосферных слоев, то возможно проследить изменение отражательной способности атмосферы между пределами от 40 до 150 км. В статье „*О строении атмосферы, фотометрический анализ сумерек*“ (Труды Главн. Рос. Астроф. Обсерв. том II, стр. 82) дается табличка, содержащая для упомянутых высот логарифмы отражательной способности атмосферы в произвольных единицах. На указанном верхнем пределе высоты атмосфера рассеивает свет настолько незначительно, что не может чувствительно повлиять на освещение ночного неба.

Будем исходить из предположения, что сумеречные явления обусловливаются исключительно газовыми составляющими атмосферы, рассеивающими свет согласно закону Рэлея.

Можно показать в таком случае, что каждый объем атмосферы рассеивает свет пропорционально плотности среды (ρ), среднему молекулярному весу ее (M) и квадрату средней величины коэффициента в выражении преломляющей способности атмосферы (c). С точностью до коэффициента пропорциональности, имеем для отражательной способности выражение:

$$A = \rho M c^2.$$

Примем, что атмосфера состоит из трех газов: кислорода, азота и водорода. Другие составляющие не оказывают заметного влияния на состав слоев, находящихся на больших высотах.

Называя через M_1 , M_2 , M_3 молекулярные веса каждого из этих газов, обозначая плотности каждой из парциальной атмосфер на данной высоте через ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 вводя, наконец, подобные же обозначения для коэффициентов c_1 , c_2 , c_3 имеем:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3; \quad c = \frac{c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 + c_3 \rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3};$$

$$M = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{\frac{\rho_1}{M_1} + \frac{\rho_2}{M_2} + \frac{\rho_3}{M_3}}.$$

Последнее выражение получится без труда, если принять во внимание, что плотность атмосферы пропорциональна произведению из молекулярного веса на количество молекул в единице объема.

Для отражательной способности атмосферы находим выражение:

$$A = M c^2 \rho = \frac{(c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 + c_3 \rho_3)^2}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}.$$

Величины c_1 , c_2 , c_3 и M_1 , M_2 , M_3 известны из физических определений. Они постоянны для всей атмосферы.

Выражение стоящее в правой части известно из наблюдений до коэффициента пропорциональности.

Между плотностью ρ какой-либо парциальной атмосферы и ее температурой τ имеем следующее дифференциальное отношение:

$$\frac{d\tau}{dh} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{d\rho}{dh} + \frac{q}{\gamma} = 0,$$

где g — напряжение силы тяжести и γ — постоянная Клайперона, имеющая определенное значение для каждого газа.

Изменение температуры с высотой неизвестно, но всегда возможно предположить для достаточно тесных пределов высоты, что температура связана с высотой линейной зависимостью

$$\tau = a + bh,$$

где a и b суть некоторые постоянные величины.

В этом случае предыдущее уравнение дает:

$$\frac{d \log \rho}{dh} = - \frac{\left(\frac{g}{\gamma} + b \right)}{a + bh}.$$

Предположим, что, начиная с 11 километров, температура остается постоянной до высоты в 40 километров и примем для нее — 50°C, или 221°,5 по абсолютной шкале. До 11 километров температура, как известно, довольно быстро убывает, а затем держится постоянной или даже медленно возрастает.

Исходя из известного процентного содержания главных газов на уровне моря, нетрудно вычислить значение ρ для каждой из парциальных атмосфер для высоты в 40 километров, в предположении, что от 11 до 40 километров температура держится постоянной.

Этим определяется постоянный фактор в формуле, дающей значение A .

Изменение отражательной способности атмосферы с высотой вычисляется далее при различных предположениях о величине температурного градиента. Нетрудно установить прежде всего, что при $\tau = \text{const}$ величина A изменяется скорее ее наблюденного значения до высоты

в 82 километра; далее изменение ее происходит гораздо медленнее. При отрицательных градиентах различие между теорией и наблюдениями становится еще больше. Наилучшее согласие получается в предположении, что выше 40 километров температура растет сначала быстро, затем медленнее при среднем градиенте около 4°C на каждый километр высоты. При больших градиентах теоретические кривые изменения отражательной способности атмосферы идут почти параллельно одна другой.

Необходимо заметить, что такие большие градиенты необходимо получаются в предположении, что отражательная способность атмосферы зависит исключительно от газовых составляющих воздуха и что количество водорода у поверхности Земли не меньше принятого при вычислениях значения в $0,01\%$. Согласие получается лучше, если допустить, что на высоте 40—70 километров присутствует некоторое количество пыли, заметно рассеивающее свет и что слои атмосферы выше 100 километров беднее водородом, чем это следует из принятого содержания его у земной поверхности. Но и в этом случае рассмотрение хода изменения отражательной способности атмосферы с высотой не дает возможности избежать заключения, что температура заметно возрастает в верхних слоях (50—100 кил.) и, весьма возможно, далеко превосходит температуру замерзания воды.

SUR LA DISTRIBUTION DE LA TEMPÉRATURE DANS LES COUCHES SUPÉRIEURES DE L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE.

Par *B. Fessenkoff*.

RESUMÉ.

Par mes observations photométriques sur le crépuscule j'ai deduit dans l'article „Sur la constitution de l'atmosphère, analyse photométrique du crépuscule“ (Publications de l'Observatoire Central Astrophysique, Vol. II) le changement du pouvoir réfléchissant de l'air. Il est à poser maintenant la question comment doit varier la température en fonction de l'altitude pour satisfaire des observations. Je suppose que l'atmosphère est constituée de trois gasses—oxygène, hydrogène et azote, que la diffusion de la lumière s'est produite uniquement par les composants gazeux, enfin que la température atteigne -57°C à 11 klm. de hauteur et reste constante jusqu'à 40 klm. Je montre comment on peut calculer en se basant sur mes observations photométriques le gradient de température entre les limites de 40 klm. à 150 klm. de hauteur.

Il est à conclure que la température augmente sensiblement dans les couches supérieures (50--100 klm.) et très probablement surpassé de beaucoup 0°C .

DEFINITIVE BAHNBESTIMMUNG DES KOMETEN 1905 VI UND UNTERSUCHUNG SEINER FRÜHEREN BEWEGUNG.

Von A. Michailov.

I. Die definitive Bahn.

Der Komet 1905 VI wurde am 26 Jan. 1906 von Brooks in Geneva entdeckt und bekam die vorläufige Bezeichnung 1906a. Zuerst hatte er das Aussehen eines runden Nebelflecks von ungefähr 7' Durchmesser mit einem schwachen Kern 10—11 Grösse. Im Februar blieb seine Helligkeit fast unverändert, der Durchmesser stieg aber bis 10'—12'. Im März nahm die Helligkeit des Kometen bedeutend ab und die hellen Mondnächte im Ende des Monats bewirkten eine zweiwöchentliche Unterbrechung in den Beobachtungen nach welcher er nur für die grössten Instrumente der amerikanischen Sternwarten sichtbar blieb. Die letzte Beobachtung wurde am 24 April in Flagstaff erhalten. Während dieser letzten Periode scheint der Komet zwei schwache Kerne von 12'' Distanz gehabt zu haben. Von diesem Umstande bemerkte Wirtz in Strassburg und wahrscheinlich wird dadurch die schlechte Übereinstimmung in den letzten Beobachtungen erklärt.

Ein ausführlicher Bericht von unseren Rechnungen ist im «Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Petersburg» 1915 p. 1249—1264 gegeben worden. Deshalb sollen hier nur kurz die Haubtergebnisse zusammengestellt werden. Allen Rechnungen ist eine parabolische Bahn zugrunde gelegt, die wir aus Ebeils Elementen¹⁾ durch Variation der geozentrischen Distanzen erhalten haben. Unsere Elemente sind die folgenden:

$$T = 1905, \text{ Dec. } 22.32530 \text{ M. Z. Berlin.}$$

$$\begin{aligned} \omega &= 89^\circ 51' 25''00 \\ \Omega &= 286^\circ 24' 3.30 \\ i &= 126^\circ 26' 23.40 \\ \lg q &= 0.1126880. \end{aligned} \quad \left. \right\} 1906.0$$

Die Ephemeridenrechnung musste zum Teil mit Intervallen von 6^h geführt werden, da der Komet am 17 Februar sich auf 5° dem Nordpole näherte.

¹⁾ Astron. Nachr. 170, 323.

Von 262 uns bekannten Beobachtungen mussten 17 mit Kreuz und Ringmikrometer angestellten unberücksichtigt bleiben. Die 171 Vergleichsterne sind von uns in allen Hauptkatalogen nachgeschlagen worden und womöglich die Eigenbevegung berücksichtigt. Schliesslich mussten noch einige Beobachtungen, die sehr grosse Abweichungen ergaben, ausgeschlossen werden. Endlich wurden folgende acht Normalörter gebildet:

Normalort.	$\Delta d \cos \delta$	n	$\Delta \delta$	n	Gewicht	Störungen	
						$\Delta d \cos \delta$	$\Delta \delta$
1906							
I	Jan. 30.0	+ 4"80	39	+ 1"64	38	1	+ 0"03 — 0"01
II	Feb. 3.0	+ 3.36	38	+ 2.45	37	1	+ 0.02 0.00
III	Feb. 15.0	+ 0.87	52	+ 1.57	31	1	0.00 0.00
IV	Feb. 21.0	- 2.57	25	- 0.01	23	1	- 0.02 0.00
V	März 2.0	- 1.51	26	- 0.96	29	1	- 0.08 - 0.06
VI	März 17.0	- 2.18	17	- 3.92	18	1	- 0.23 - 0.20
VII	März 25.0	+ 0.82	17	- 3.25	17	1	- 0.33 - 0.29
VIII	April 18.0	+ 0.19	14	- 2.67	14	1/4	- 0.73 - 0.52

Hier ist n die Zahl der Beobachtungen. Die angeführten Störungen sind nach der Methode von Encke berechnet, wobei alle Planeten ausser Merkur berücksichtigt sind. Zur Kontrole sind die Störungen auch durch Variation der Elemente gerechnet. Die Resultate beider Rechnungen stimmen fast vollständig überein.

Nach Auflösung der Normalgleichungen wurden folgende hyperbolische Elemente gefunden:

$$T = 1905 \text{ Dec. } 22.33429 \pm 0.00261 \text{ M. Z. Berlin.}$$

$$\begin{aligned} e &= 89^\circ 51' 52".18 \pm 7".71 \\ \varrho &= 286^\circ 24' 6.34 \pm 2.06 \end{aligned} \left. \right\} \text{ Ekl. und Equin. 1906.0}$$

$$i = 126^\circ 26' 16.79 \pm 1.50$$

$$\lg q = 0.1127061 \pm 0.0000069$$

$$e = 1.0001846 \pm 0.0000649$$

Oskulation 1906 Feb. 12.0.

Wird in den Bedingungsgleichungen $de = 0$ gesetzt, so erhält man die parabolischen Elemente:

$$T = 1905 \text{ Dec. } 22.32768 \text{ M. Z. Berlin}$$

$$\begin{aligned} \omega &= 89^\circ 51' 37".81 \\ \Omega &= 2^\circ 6' 24" 10.28 \\ i &= 126^\circ 26' 15.88 \end{aligned} \left. \right\} \text{ Ekl. und Equin. 1906.0}$$

$$\lg q = 0.1126934.$$

Oskulation 1906 Febr. 12.0.

Diese beiden Elementensysteme stellen die Normalörter folgendermassen dar:

Ort	Hyperbel		Parabel	
	$\Delta d \cos \delta$	$\Delta \delta$	$\Delta d \cos \delta$	$\Delta \delta$
I	+ 0.95	- 0.32	+ 1.52	- 0.92
II	- 0.25	+ 0.66	+ 0.24	+ 0.27
III	- 0.87	- 1.14	- 0.90	- 0.80
IV	- 0.13	+ 0.06	- 0.55	- 2.31
V	- 0.01	+ 0.86	- 0.26	+ 0.30
VI	- 1.69	- 0.92	- 1.91	- 1.32
VII	+ 1.02	+ 0.10	+ 0.77	- 0.17
VIII	+ 0.96	+ 1.20	- 0.41	- 1.0
	$[p \omega] = 9.43$		$[p \omega] = 17.01$	

Demnach scheint die Hyperbel reel zu sein und es ist von Interesse den ursprünglichen Charakter der Bahn zu untersuchen.

H. Die Störungen der Excentricität im Vergangenen.

Infolge des geringen Unterschieds zwischen den oben gefundenen hyperbolischen und parabolischen Elementen sind allen weiteren Störungsrechnungen die letzten Elemente zugrunde gelegt. Auf den Anfang der beiden Decennien reduziert, lauten sie folgendermassen:

Equin.	1910.0	1900.0
T	1905 Dec. 22.3277	M. Z. Berlin.
ω	89° 51' 59	89° 51' 68
δ	286 27.50	286 19.18
i	126 26.28	126 26.25
$tg q$	0.11269	

Die Excentricitätstörungen von den Planeten Jupiter und Saturn wurden nach der Methode der Variation der Elemente berechnet. Es wurden zur zeit der Oskulation 20-Tägige Intervalle gewählt, die im Jahre 1901 bis auf 80-Tägige gebracht wurden. Da die Excentricität nicht vor dem zur Bahnebene senkrechten Komponenten der störenden Kraft abhängt, konnte man sich mit der Berechnung der beiden Komponenten R und S beschränken.

Diese Rechnungsresultate sowie die Ableitungen $w \frac{de}{dt}$ sind in folgender Tafel gegeben. Die zwischenliegenden Werte von $w \frac{de}{dt}$ für das Jahr 1901 sind interpieltiert.

ТАБЛ. I.

Datum	Jupiter			Saturn			Jupiter			Saturn		
	w R	w S	w R	w S	w R	w S	w R	w S	w R	w S	w R	w S
Equin. 1910.0												
1906 III 14 .	—	—	0"970	+ 1"733	+ 0"052	— 0"013	+ 1"718	1904 IV 13 .	—	—	8"486	+ 1"657
" II 22 .	—	—	1.262	+ 0.868	+ 0.050	+ 0.06	+ 0.491	III 4 .	—	—	9.121	+ 1.368
" II 2 .	—	—	1.225	+ 0.047	+ 0.039	+ 0.025	+ 0.578	" 24 .	—	—	9.697	+ 1.092
" I 13 .	—	—	0.863	- 0.612	+ 0.019	+ 0.03	+ 1.400	XII 15 .	—	—	10.204	+ 0.828
1905 XII 24 .	—	—	0.270	- 0.964	- 0.007	+ 0.041	+ 1.854	XI 5 .	—	—	10.632	+ 0.575
" XII 4 .	—	—	0.356	- 0.948	- 0.633	+ 0.039	+ 1.891	IX 26 .	—	—	10.970	+ 0.323
" XI 14 .	—	—	0.830	- 0.652	- 0.048	+ 0.006	+ 1.619	VIII 17 .	—	—	11.212	+ 0.065
" X 25 .	—	—	1.084	- 0.233	- 0.052	- 0.022	+ 1.197	VII 8 .	—	—	11.352	+ 0.209
" X 5 .	—	—	1.150	+ 0.190	- 0.016	- 0.049	+ 0.748	V 29 .	—	—	11.399	+ 0.06
" IX 15 .	—	—	1.87	+ 0.563	- 0.031	- 0.071	+ 0.329	IV 19 .	—	—	11.348	+ 0.833
" VIII 23 .	—	—	0.947	+ 0.870	- 0.016	- 0.089	+ 0.035	III 10 .	—	—	11.213	+ 1.188
" VII 6 .	—	—	0.760	+ 1.116	+ 0.012	+ 0.103	+ 0.353	II 29 .	—	—	11.010	+ 1.572
" VII 17 .	—	—	0.548	+ 1.310	+ 0.037	+ 0.112	+ 0.630	XII 20 .	—	—	10.749	+ 1.978
" VI 27 .	—	—	0.323	+ 1.458	+ 0.063	+ 0.116	+ 0.872	XI 10 .	—	—	10.441	+ 2.401
" VI 7 .	—	—	0.091	+ 1.571	+ 0.090	+ 0.116	+ 1.086	X 1 .	—	—	10.098	+ 2.828
" V 18 .	—	—	0.143	+ 1.652	+ 0.112	+ 0.117	+ 1.276	VII 22 .	—	—	9.728	+ 3.255
" IV 28 .	—	—	0.377	+ 1.700	+ 0.144	+ 0.104	+ 1.450	VII 13 .	—	—	9.340	+ 3.674
" IV 8 .	—	—	0.609	+ 1.744	+ 0.172	+ 0.093	+ 1.605	VI 3 .	—	—	8.938	+ 4.076
" III 19 .	—	—	0.839	+ 1.761	+ 0.198	+ 0.077	+ 1.752	IV 24 .	—	—	8.526	+ 4.459
" II 27 .	—	—	1.667	+ 1.762	+ 0.224	+ 0.056	+ 1.800	III 15 .	—	—	8.107	+ 4.816
" II 7 .	—	—	1.291	+ 1.750	+ 0.248	+ 0.030	+ 2.022	II 3 .	—	—	7.686	+ 5.147
" I 18 .	—	—	1.512	+ 1.726	+ 0.270	+ 0.002	+ 2.146	XII 25 .	—	—	7.259	+ 5.444
Equin. 1900.0												
1904 XII 9 .	—	—	3.888	+ 3.301	+ 0.612	+ 0.139	+ 4.771	VIII 27 .	—	—	5.549	+ 6.315
" X 30 .	—	—	4.728	+ 3.097	+ 0.653	+ 0.315	+ 5.241	VII 18 .	—	—	6.356	+ 6.674
" IX 20 .	—	—	5.41	+ 2.837	+ 0.659	+ 0.519	+ 5.708	VI 8 .	—	—	4.699	+ 6.556
" VIII 11 .	—	—	6.327	+ 2.556	+ 0.617	+ 0.737	+ 6.179	IV 29 .	—	—	3.861	+ 6.674
" VII 2 .	—	—	7.092	+ 2.258	+ 0.531	+ 0.959	+ 6.650	III 20 .	—	—	3.038	+ 6.577
" V 2 .	—	—	7.804	+ 1.956	+ 0.396	+ 1.162	+ 7.119	XII 30 .	—	—	3.038	+ 6.577
								XI 20 .	—	—	"	+ 0.503

Daraus wurden durch mechanische Integration die Excentricitätsstörungen Δe für sieben Momente, deren Intervalle 320 Tage betragen, gefunden. Der erste Moment ist die Oskulationsepoke $t_0 = 12$ Febr. 1906. In folgender Tabelle sind die Δe mit umgekehrten Vorzeichen gegeben, so dass die Excentricität für die Epoche t durch $e_0 + \Delta e$ bestimmt wird. Auch ist der Radiusvektor r und die wahre Anomalie v des Kometen angeführt.

T A F E L 2.

t	$t - t_0$	Δe	$\lg r$	v
1906 Feb. 12 . .	0	0"00	0.17 33	43° 5' 32
1905 März 29 . .	— 320	+ 2.26	0.56937	252 28.23
1904 Mai 13 . .	— 640	— 40.52	0.82403	232 19.10
1903 Juni 28 . .	— 960	— 107.96	0.96372	224 5.84
1902 Aug. 12 . .	— 1280	— 168.52	1.05934	219 17.90
1901 Sept. 26 . .	— 1600	— 203.78	1.13190	216 2.13
1900 Nov. 10 . .	— 1920	— 213.04	1.19029	213 37.23

Da die Excentricität unserer hyperbolischen Elemente die Einheit um $+38"08 \pm 13"39$ übersteigt, schliessen wir, dass in den Jahren 1900—1903 der Komet sich in einer unzweifelhaft elliptischen Bahn bewegt hatte. Um mit Sicherheit den Charakter der Bahn in noch früherer Zeit feststellen zu können muss man die Excentricität auf den Schwerpunkt der Sonne und der beiden störenden Planeten beziehen. Dann wird aus der Excentricitätsstörung das Hauptglied, nämlich die von den Planeten hervorgerufene Sonnenschwankung, ausgeschlossen und es bleibt nur die direkte Wirkung der Planeten auf den Kometen übrig, die bei genügender Entfernung des letzteren von der Sonne sehr klein wird¹⁾). Beim Entfernen vom Perihel strebt diese direkte Störung einem gewissen Grenzwert zu. Für die Kosmogonie der Kometen ist der Grenzwert der Excentricität von Interesse.

In unserem Falle ist die Excentricität auf den Schwerpunkt von Sonne, Jupiter und Saturn zu beziehen. Zu diesem Zweck müssen die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z und die Geschwindigkeits Komponenten x', y', z' für die beiden Planeten berechnet werden. In folgender Tabelle sind die Werte von $\frac{m}{1+m} x, \dots$ und $\frac{m}{1+m} x', \dots$ in Bogensekunden angegeben. Die Koordinaten sind auf die Ekliptik bezogen, für die beiden ersten Momente gilt die Epoche 1910.0, für die übrigen—1900.0. Die Geschwindigkeitskomponenten sind durch numerische Differenziation der Koordinaten erhalten.

¹⁾ Vergl. Strömgren, Über Kometenbahnenexcentricitäten. I Medd. Lunds Astron. Observ. № 1.

T A F E L 3.

E p o c h e	J u p i t e r.					
	$\frac{m}{1+m}x$	$\frac{m}{1+m}y$	$\frac{m}{1+m}z$	$\frac{m}{1+m}x'$	$\frac{m}{1+m}y'$	$\frac{m}{1+m}z'$
1906 Feb. 12 . .	+ 363".53	+ 925".51	- 11".69	- 1.3954	+ 0".6136	+ 0".0292
1905 März 29 . .	+ 720.72	+ 628.56	- 19.29	- 0.9694	+ 1.2596	+ 0.0173
1904 Mai 13 . .	+ 975.49	+ 178.66	- 22.26	- 0.2579	+ 1.5310	+ 0.0008
1903 Juni 28 . .	+ 929.15	- 313.04	- 19.78	+ 0.4559	+ 1.4.03	- 0.0159
1902 Aug. 12 . .	+ 678.14	- 730.49	- 12.56	+ 1.0734	+ 1.0814	- 0.0282
1901 Sept. 26 . .	+ 271.41	- 981.82	- 2.44	+ 1.4168	+ 0.4665	- 0.0337
1900 Nov. 10 . .	+ 194.66	- 1022.79	+ 8.22	+ 1.4442	- 0.2076	- 0.0318

T A F E L 3. (Продолжение.)

E p o c h e	S a t u r n					
	$\frac{m}{1+m}x$	$\frac{m}{1+m}y$	$\frac{m}{1+m}z$	$\frac{m}{1+m}x'$	$\frac{m}{1+m}y'$	$\frac{m}{1+m}z'$
1906 Feb. 12 . .	+ 520".56	- 241".68	- 16".76	+ 0".1198	+ 0".2978	- 0".0098
1905 März 29 . .	+ 473.99	- 332.57	- 13.35	+ 0.1702	+ 0.2688	- 0.0114
1904 Mai 13 . .	+ 411.28	- 413.93	- 9.51	+ 0.2148	+ 0.2316	- 0.0125
1903 Juni 28 . .	+ 336.52	- 481.28	- 5.38	+ 0.2559	+ 0.1886	- 0.0132
1902 Aug. 12 . .	+ 251.43	- 533.89	- 1.08	+ 0.2792	+ 0.1398	- 0.0136
1901 Sept. 26 . .	+ 158.72	- 570.35	+ 3.25	+ 0.2987	+ 0.0876	- 0.0134
1900 Nov. 10 . .	+ 61.25	- 589.68	+ 7.48	+ 0.3090	+ 0.0332	- 0.0130

Der Übergang zum Schwerpunkt lässt sich am einfachsten auf differenziellem Wege ausführen. In Bauschinger's Bahnbestimmung der Himmelskörper, S. 574 sind entsprechende Formeln für eine elliptische Bahn gegeben. Ihre Umgestaltung für die Parabel ergab folgendes Resultat:

$$\hat{e}e = \frac{p}{r^3}M + \sqrt{p'} \sin v \frac{M'}{k} + \frac{p}{r} \sqrt{p'} \frac{N'}{k} - \frac{p}{r} \Sigma m.$$

Hier ist p — das Parameter der Parabel, k — die Gaussische Attraktions Konstante, Σm — die Gesamtmasse aller anziehender Planeten. M , M' und N' werden durch die Ausdrücke bestimmt:

$$M = \cos \alpha_1 \dot{x} + \cos \alpha_2 \dot{y} + \cos \alpha_3 \dot{z}$$

$$M' = \cos \alpha_1 \dot{x}' + \cos \alpha_2 \dot{y}' + \cos \alpha_3 \dot{z}'$$

$$N' = \cos \beta_1 \dot{x}' + \cos \beta_2 \dot{y}' + \cos \beta_3 \dot{z}'$$

$$\dot{x} = -\sum \frac{m}{1+m} x \quad \dot{x}' = -\sum \frac{m}{1+m} x'$$

$$\dot{y} = -\sum \frac{m}{1+m} y \quad \dot{y}' = -\sum \frac{m}{1+m} y'$$

$$\dot{z} = -\sum \frac{m}{1+m} z \quad \dot{z}' = -\sum \frac{m}{1+m} z'$$

Die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ lassen sich durch die bekannten Gaussischen Konstanten definieren:

$$\cos \alpha_1 = \sin a \sin (\Lambda + \omega + v)$$

$$\cos \beta_1 = \sin a \cos (\Lambda + \omega + v)$$

$$\cos \alpha_2 = \sin b \sin (\Omega + \omega + v)$$

$$\cos \beta_2 = \sin b \cos (\Omega + \omega + v)$$

$$\cos \alpha_3 = \sin i \sin (\omega + v)$$

$$\cos \beta_3 = \sin i \cos (\omega + v)$$

Für unseren Kometen erhalten wir:

Equin. 1910.0

Equin. 1900.0

$$\cos \alpha_1 = [9.80358] \sin (153^\circ 33' 30'' + u)$$

$$\cos \alpha_1 = [9.80312] \sin (153^\circ 45' 51'' + u)$$

$$\cos \alpha_2 = [9.98842] \sin (260^\circ 2' 87'' + u)$$

$$\cos \alpha_2 = [9.98861] \sin (260^\circ 8' 09'' + u)$$

$$\cos \alpha_3 = [9.90553] \sin u$$

$$\cos \alpha_3 = [9.90553] \sin u$$

$$u = \omega + v$$

T A F E L 4.

Epoch	M	M'	N'	δe	e
1906 Feb. 12 . . .	+ 181".85	- 1".2824	- 0".4825	- 393".55	0.998277
1905 März 29 . . .	- 294.96	+ 1.6307	+ 0.2979	- 360.40	0.998448
1904 Mai 13 . . .	- 952.19	+ 1.1918	+ 1.2567	- 197.51	0.990931
1903 Juni 28 . . .	- 1214.50	+ 0.4650	+ 1.5002	- 100.03	0.999176
1902 Aug. 12 . . .	- 1186.95	- 0.2818	+ 1.2509	- 38.03	0.999183
1901 Sept. 26 . . .	- 932.51	- 0.8686	+ 0.6901	- 1.94	0.999187
1900 Nov. 10 . . .	- 534.62	- 1.2035	+ 0.0046	+ 13.87	0.999195

In Tafel 4 sind die Größen M , M' , N' , die Reduktion der Excentricität δe und die auf den Schwerpunkt bezogene Excentricität $e = e_0 + \Delta e + \delta e$ angegeben. Für e_0 ist unser Hyperbelwert 1.0001846 gesetzt worden. Alle

Werte von e sind elliptisch, jedoch näherte sich e beim Rückwärtschreiten in die Vergangenheit der Einheit. Die Frage ist nun, ob e jemals die Einheit überschreiten konnte. Darauf giebt eine von Strömgren gegebene Formel Antwort¹⁾; es ist nämlich:

$$\left| \Delta \left(\frac{1}{a} \right) \right| < m_1 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2} v} \right) \frac{1}{r_1} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{r_1}{r} \right)^2} - \left[1 + 2 \frac{r_1}{r} + 3 \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \right\}.$$

Hierin beziehen sich m_1 und r_1 auf den störenden Planeten; der linke Teil ist die absolute Grösse der Störung der grossen Halbachse der Kometenbahn bis zum Moment t , für den die Werte v , r und r_1 genommen sind; dabei ist $\sin \frac{1}{2} a$ immer positiv zu nehmen.

Wir wollen diese Formel auf unseren Kometen anwenden für $t = 10$ Nov. 1900. Für die beiden störenden Planeten finden wir:

	Jupiter	Saturn
$lg r_1$	0.72361	1.00295
$\left \Delta \left(\frac{1}{a} \right) \right $	< 0.0001007	< 0.0002656

Oder für beide Planeten zusammen:

$$\left| \Delta \left(\frac{1}{a} \right) \right| < 0.0003663$$

Nun ist aber $\frac{1}{a}$ mit der Excentricität verbunden:

$$\frac{1}{a} = \frac{1-e}{q}.$$

Eigentlich muss in dieser Formel q auch für den Moment t gesetzt werden. Doch verschwindet hier $1-e$ zugleich mit $\frac{1}{a}$, und q ist keine kleine Grösse. Deshalb kann ohne wesentlichen Fehler für q ein anderer Wert genommen werden, zum Beispiel der Wert für die oskulationsepoke 12 Feb. 1906, mit dem wir finden:

$$\left| \Delta (1-e) \right| < 0.000475.$$

Für den Moment t erhielten wir oben $e=0.999195$. Daher lautet unser Endresultat folgendermassen: *der Komet 1905 VI bewegte sich früher in einer Ellipse, deren Excentricität den Wert 0.999670 nicht überschreiten konnte*:

$$e < 0.999670.$$

Die Excentricität unserer Hyperbelbahn ist mit dem mittleren Fehler von ± 0.000065 bestimmt worden. Daher kann man behaupten, dass der

¹⁾ Über den Ursprung der Kometen, Publ. Kobenhavens Obs. № 19, p. 24.

elliptische Charakter unserer Kometenbahn im Vergangenen bewiesen ist, insbesondere wenn man beachtet, dass infolge der grossen Neigung der Bahn zur Ekliptik die Störungen bis November 1900 gewiss viel kleiner waren als der oben gefundene Grenzwert.

Moskau, December 1915.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ КОМЕТЫ 1905 VI И ИССЛЕДОВАНИЕ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ В ПРОШЛОМ.

A. A. Михайлов.

РЕЗЮМЕ.

Подробный отчет об определении окончательной орбиты кометы 1905 VI дан в Известиях Академии Наук, 1915, стр. 1249. Поэтому здесь приведены лишь главнейшие результаты. Из полученных двух систем окончательных элементов лучшее согласие с наблюдениями дают элементы гиперболические.

Вторая часть работы посвящена выяснению характера движения кометы в прошлом. Для этой цели вычислены возмущения эксцентриситета со стороны Юпитера и Сатурна вплоть до 1900 года. Соответствующие значения Δe для эпохи t приведены в таблице 2. Найденный нами эксцентриситет для эпохи оскуляции 1906 февр. 12 превосходит единицу на $+38.^{\circ}08 \pm 13.^{\circ}39$, откуда следует, что с 1900 до 1904 года комета двигалась по эллиптической орбите.

Для решения вопроса о характере орбиты до 1900 года нужно отнести движение кометы не к центру Солнца, а к центру тяжести Солнца и возмущающих планет, в данном случае Юпитера и Сатурна. Соответствующие значения эксцентриситета даны в последнем столбце табл. 4. При удалении назад от прохождения через перигелий возмущения вообще убывают и стремятся к некоторому предельному значению. Strömgren дал формулу, которая позволяет найти верхний предел прошлых возмущений большой полуоси орбиты. Применяя эту формулу, мы находим, что до 10 нояб. 1900 г. возмущения эксцентриситета не превосходили по абсолютной величине 0.000475, откуда заключаем, что комета в прошлом двигалась по эллипсу, эксцентриситет которого не превосходил величины 0.999670.

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ ТЕЙЛОРА КОМЕТО-ЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ЧАСТИЦЫ ХВОСТА.

C. B. Орлов.

Основные обозначения. Согласно механической теории кометных форм на каждую частицу хвоста действуют две силы: ньютонианское тяготение Солнца и отталкивание Солнца; силы эти обратно пропорциональны квадратам их расстояний частицы от Солнца и векторы их направлены в противоположные стороны.

Примем величину вектора тяготения на единице расстояния за единицу; величину вектора отталкивателной силы обозначим символом R_p , результирующий вектор, сообщающий ускорение частице относительно Солнца, обозначим символом μ . Силу, соответствующую этому вектору, принято называть эффективной.

Тогда $\mu = \Gamma + R_p$ (1). Так как угол между векторами Γ и R_p равен 180° , то, по известной формуле сложения векторов, имеем:

$$\mu^2 = R_p^2 + 1 - 2R_p$$

или

$$\mu = \pm(R_p - 1)$$

Так как вектор по существу положителен, то следует брать знак +, если $R_p > 1$ и знак — если $R_p < 1$, тогда, при

$$R_p > 1 \quad \mu = R_p - 1 \quad 1 + \mu = R_p \quad (2)$$

$$R_p < 1 \quad \mu = 1 - R_p \quad 1 - \mu = R_p \quad (3)$$

Ф. А. Бредихин в своих исследованиях пользовался обозначениями Бесселя, который взял формулу (3). Бессель согласно этой формуле считал силу μ отрицательной, если она была силой отталкивания и положительной, если она была силой тяготения, а силу R_p брал в ее абсолютном значении без знака.

Формулы (2) и (3) можно объединить одной (2), если условиться считать всякую силу отталкивания, вектор которой направлен от начала координат (Солнце), положительной и всякую силу тяготения, вектор которой направлен к началу координат (Солнцу), отрицательной. При таком условии

в формулу (2), как это нетрудно видеть, все величины входят с их знаками и ею можно пользоваться при всяких значениях силы μ и R_p .

Для избежания возможных недоразумений я буду в настоящей работе всегда пользоваться формулой (2).

Вывод рядов. Возьмем за начальный момент времени вылета частицы из ядра (радиус сферы действия ядра равен нулю); и обозначим символом τ время, протекшее от момента вылета до момента наблюдения частицы, координаты частицы в момент наблюдения можно выразить рядами Тейлора по степеням промежутка времени τ :

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \xi'_0 \tau + \xi''_0 \frac{\tau^2}{2} + \dots \\ \eta &= \eta_0 + \eta'_0 \tau + \eta''_0 \frac{\tau^2}{2} + \dots\end{aligned}\quad (4)$$

где $\xi_0, \xi'_0, \eta_0, \eta'_0$ первые и вторые производные координат по времени. Для начального момента очевидно $\xi_0 = 0$ и $\eta_0 = 0$.

Если обозначить g величину вектора начальной скорости и G угол этого вектора с радиусом-вектором кометы (Рис. 1), отсчитываемый в плоскости орбиты кометы и в сторону обратную ее движения, то, очевидно,

$$\xi'_0 = -g \cos G \quad \eta'_0 = g \sin G \quad (5)$$

(за единицу времени взято $\frac{1}{k}$ сп. солнечных суток $= 58.1325 \dots$).

С другой стороны, для начального момента ξ'_0 есть не что иное, как разница скоростей гиперболического движения частицы и параболического движения ядра по радиусу-вектору, так как для начального момента $R = V$; следовательно:

$$\xi'_0 = \frac{dR}{dt} - \frac{dV}{dt}; \quad \eta'_0 = -k \frac{dV}{dt} + r \frac{dv}{dt}, \quad (6)$$

где R, V радиус-вектор и истинная аномалия частицы хвоста, а r и v — ядра кометы.

Так как

$$R^2 \frac{dV}{dt} = C,$$

а

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c,$$

то

$$\eta'_0 = -\frac{C}{R} + \frac{c}{r}. \quad (7)$$

Для момента вылета, принимая во внимание (5), имеем:

$$C = c - r^2 g \sin G \quad (8)$$

Вторые и следующие производные берутся без затруднений:

$$\xi'' = \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{d^2 r}{dt^2},$$

а так как

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{\mu}{R^2} + \frac{C^2}{R^3}$$

и

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{c^2}{r^3}$$

а

$$C = c - rg \sin G,$$

то

$$\xi'' = \frac{1+\mu}{r^2} - \frac{\sqrt{p} \cdot g \sin G}{r^2} + \frac{g^2 \sin^2 G}{r^2}.$$

Аналогично имеем:

$$\tau''_0 = -\frac{\sqrt{p} \cdot g \cos G}{r^3} - \frac{ge \sin v \sin G}{\sqrt{p} \cdot r} + \frac{g^2 \sin^2 G \cos G}{2r},$$

где p и e параметр и эксцентриситет орбиты кометы и $c = \sqrt{p}$.

Привожу здесь ряды со всеми коэффициентами до членов с τ^3 включительно:

$$\begin{aligned} \xi &= -g \cos G \cdot \tau + \left(\frac{1+\mu}{r^2} - \frac{2\sqrt{p} \cdot g \sin G}{r^2} + \frac{g^2 \sin^2 G}{r} \right) \frac{\tau^2}{2} + \\ &+ \left[\frac{2\mu g \cos G}{r^3} - \frac{2e \sin v (1+\mu)}{\sqrt{p} \cdot r^3} + \frac{3pg \cos G}{r^4} + \frac{3g^3 \sin^2 G \cos G}{r^2} - \frac{3\sqrt{p} \cdot g^2 \sin G \cos G}{r^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3e \sin v g^2 \sin^2 G}{\sqrt{p} \cdot r^2} + \frac{6e \sin v \cdot g \sin G}{r^3} \right] \frac{\tau^3}{6} \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= g \sin G \cdot \tau + \left(\frac{g^2 \sin 2G}{r} - \frac{\sqrt{p} \cdot g \cos G}{r^2} - \frac{eg \sin v \sin G}{\sqrt{p} \cdot r} \right) \frac{\tau^2}{2} + \\ &+ \left[\frac{2eg \sin v \cos G}{r^3} - \frac{\sqrt{p} \cdot g^2 \cos 2G}{r^2} + \frac{g^3 \sin G \cos 2G}{r^2} + \frac{e^2 \sin^2 v \cdot g \sin G}{r^2 p} \right. \\ &\quad \left. - \frac{es \in v g^2 \sin 2G}{\sqrt{p} \cdot r^2} + \frac{\sqrt{p} (1+\mu)}{r^4} - \frac{3pg \sin G}{r^4} + \frac{3\sqrt{p} \cdot g^2 \sin^2 G}{r^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu g \sin G}{r^3} \right] \frac{\tau^3}{6} \dots \dots \end{aligned}$$

Эти ряды были получены еще Бесселем Ф. А. Бредихин в своей работе „О хвостах комет“ 1862, проверил вывод и исправил неверно в двух членах поставленные знаки (л. с. стр. 97). Вывод рядов, данный Бредихиным, сложен и занимает 12 стр. текста¹⁾; получить полностью даже три первые коэффициента было нельзя, так как в процессе вывода, откидывались члены, величиной которых можно было пренебречь. Эти ряды

¹⁾ Bredichin's — Jaegermann p. 282. 2) I. с. p. 394.

имеют и сейчас большое значение при исследованиях очертаний головы и вообще всех явлений в хвостах (прямолинейные лучи), где τ можно считать малой величиной; ввиду этого я и предложил новый аналитический вывод, значительно более короткий и простой. Этот способ позволяет получить коэффициенты в рядах полностью. Величины коэффициентов в моих рядах и у Бредихина не всегда идентичны, например, в ряде второй член коэффициента при 2τ у Бредихина²⁾ не имеет двойки в знаменателе, третьего члена того же коэффициента у Бредихина совсем нет, хотя его величиной пренебречь нельзя. Существенной разницы эти изменения не вносят, так как члены содержащие, $g\tau^2$ и выше, по малости g приложении рядов к теории кометных форм приходится откидывать.

Российский Астрофизи-
ческий Институт.

Москва, 1923, декабря.

ON THE EXPANSION INTO POWER SERIES OF COMETOCENTRIC COORDINATES OF A PARTICLE OF A COMET'S TAIL WITH THE TIME ARGUMENT.

S. V. Orlov.

ABSTRACT.

In the present note an analytical method of expansion into power series of time of cometocentric coordinates of a comet's tail particle is given. This new method is considerably simpler than that of Bessel-Bredichin and, moreover, gives the possibility of a direct determination of coefficients of this expansion.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА КОМЕТНЫХ ХВОСТОВ.

C. B. Орлов.

Ф. А. Бредихин для определения типа хвостов проектировал их видимые оси на плоскость кометной орбиты. Вычислив положения для эпохи рисунка или фотографии кометы нескольких частичек хвоста, движущихся в плоскости кометной орбиты под действием отталкивателей силы $1 + \mu$ и вылетевших из ядра в моменты, предшествующие наблюдению, можно соединить полученные точки плавной кривой и получить сюндинау, соответствующую силе $1 + \mu$. Если подобрать величину $1 + \mu$ так, чтобы вычерченная сюндинау совпадала с проекцией видимой оси хвоста, то тип его будет тем самым определен.

Надежнее исследовать непосредственно рисунок (или фотографию) хвоста не прибегая к проектированию его на плоскость орбиты, так как при вычерчивании хвоста на эту плоскость по нескольким точкам трудно избежать иногда значительных искажений; ввиду этого лучше проектировать сюндинау на плоскость рисунка (или фотографии) и непосредственно сравнивать с нею видимую ось хвоста исследуемой кометы.

Для определения типа хвостов достаточно руководиться следующими положениями:

1. Если хвост не имеет заметно выраженной кривизны и расположен близко к радиусу-вектору — он I типа.
2. Частицы близкие к оси хвостов II типа относительно Солнца движутся прямолинейно и равномерно ($1 + \mu = 1$, $\mu = 0$). Достаточно вычислить несколько точек сюндинау $1 + \mu = 1$ (вычисления не сложны) и спроектировать их на плоскость рисунка (или фотографии). Если вычерченная по этим точкам сюндинау совпадает по кривизне с исследуемым хвостом и будет близка к его видимой оси, то данный хвост, несомненно, II типа.
3. Если видимая ось хвоста лежит еще дальше в сторону, обратную движению кометы, чем сюндинау $1 + \mu = 1$, он принадлежит к III типу.
4. Если видимая ось хвоста направлена внутрь кометной орбиты, то исследуемый хвост аномальный¹⁾.

¹⁾ Если земля близка к плоскости кометной орбиты (угол α близок к 90°), то определить типы хвостов нельзя.

Ход работ. Сначала наносим очертания кометы на сетку *B. D.* и вырисовываем продолженный радиус-вектор ядра, каждая точка которого с координатами α и δ должна удовлетворять уравнению:

$$\operatorname{tg} \delta_{\odot} \sin (\alpha_{\odot} - \alpha) = \operatorname{tg} \delta_{\odot} \sin (\alpha_{\odot} - \alpha) + \operatorname{tg} \delta \sin (\alpha_{\odot} - \alpha_{\odot}) \quad (1)$$

где α_{\odot} , δ_{\odot} — координаты ядра, α_{\odot} , δ_{\odot} — координаты Солнца. Задавшись на сетке подходящей величиной α , по формуле (1) вычисляем δ и наносим радиус-вектор ядра, соединяя прямой точку a, δ с ядром кометы. Приняв, как это обычно делается при подобных исследованиях, что частицы близкие к оси хвоста, вылетают из ядра без начальной относительно него скорости, вычисляем радиус-вектор R частицы, вылетевшей из ядра в момент M , со скоростью относительно Солнца $H = k \sqrt{\frac{2}{r}}$, по формуле:

$$R^2 = H^2 (M - M_0)^2 + r^2 + 2H(M - M_0)r \sin \frac{v}{2}, \quad (2)$$

где M_0 — момент наблюдения, r и v координаты ядра в момент M , k — Гауссова постоянная.

Угол Ω между радиусом-вектором R и направлением на перигелий кометы вычисляем по формуле:

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{r_0 \sin v_0 + H_0(M - M_0) \cos \frac{v}{2}}{r_0 \cos v_0 - H_0(M - M_0) \sin \frac{v}{2}}, \quad (3)$$

где r_0 и v_0 координаты ядра в момент наблюдения.

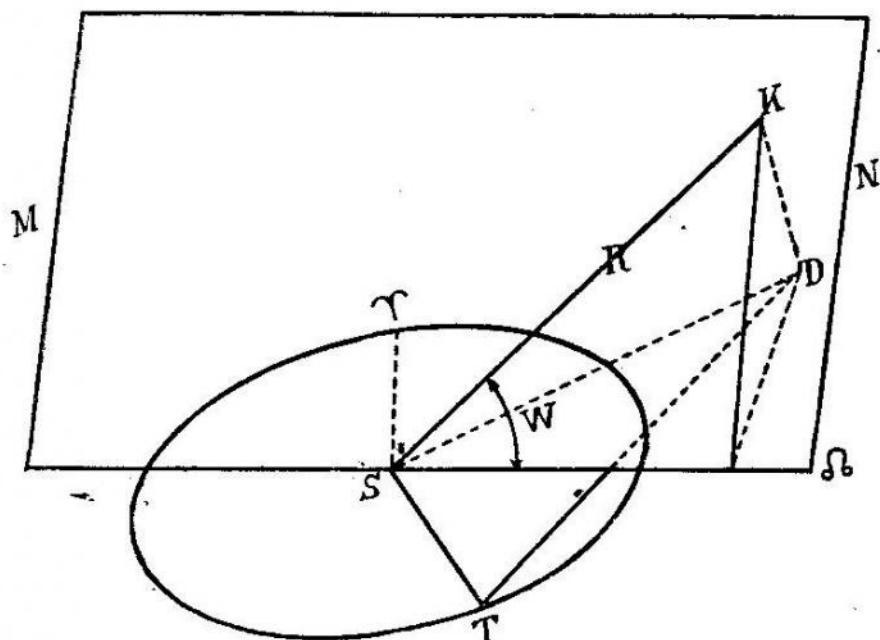


Рис. 1.

Полученные координаты точки сюдинами $1 + \mu = 1$ можно преобразовать в экваториальные геоцентрические координаты следующим путем:

На рис. 1 S — Солнце, T — Земля, MN — плоскость кометной орбиты, K — частица хвоста, D — проекция ее на плоскость эклиптики, KE — перпендикуляр к линии узлов.

Угол

$$\begin{aligned} W &= \omega + \Omega \\ KE &= R \sin W \\ ED &= R \sin W \cos i. \end{aligned} \quad (4)$$

Назовем угол DSE через A , тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \operatorname{tg} W \cos i \\ \text{и } SD &= \frac{R \cos W}{\cos A}. \end{aligned} \quad (5)$$

Угол DST , очевидно, равен $A + \Omega - 180^\circ - \lambda_0$. Из $\triangle STD$, в котором известен угол при S и сторона SD и $ST = R_0$, определяем углы T и D :

$$\frac{1}{2}(D + T) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\Omega - \lambda_0 + A), \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(D - T) = - \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Omega - \lambda_0 + A). \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(D - T) = - \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\Omega - \lambda_0 + A). \quad (8)$$

Из того же треугольника:

$$TD = \frac{R_0 \sin(\lambda_0 - A - \Omega)}{\sin D}.$$

По TD и KD определяем широту частицы β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R \sin W \sin i \sin D}{R_0 \sin(\lambda_0 - A - \Omega)}. \quad (9)$$

Долгота частицы

$$\lambda = \lambda_0 - T, \quad (10)$$

Ω, i, ω — элементы кометы, R_0, λ_0 — радиус-вектор земли и долгота Солнца в момент наблюдения.

Для перехода к экваториальным координатам пользуемся обычными формулами:

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \lambda} \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos(N + E) \operatorname{tg} \lambda}{\cos N} \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(N + E) \sin \alpha \quad (13)$$

Достаточный контроль:

$$\cos \lambda \cos \beta = \cos \alpha \cos \delta.$$

Обычно первую точку вычисляют для момента $M - M_0 = 24^d$; если вычисленная точка близка к голове, вычисляют следующую $M - M_0 = 40^d$; в обратном случае для второй точки берут $M - M_0 = 16^d$ или 8^d и т. д.

Две — три точки дают возможность вычертить на сетке сюндинаму.

Приложу пример: Была взята фотография кометы Делавана (Delavan) 1913 f, полученная А. С. Миролюбовой на Московской Университетской Обсерватории 13.2146 ср. Гринвич. времени с выдержкой в 33^м (Тессар Zeiss'a 1/4·5 f = 30 ст.). По элементам Van Biesbroeck (A.N. 200.166) были вычислены $\alpha_{\odot} = 198^{\circ} 4' 20''$, $\delta_{\odot} = 36^{\circ} 40' 20''$ (1914.0) и $r = 0^{\circ} 05.111$.

По формуле (1) получены две точки для продолженного радиуса-вектора ядра и две точки для сюндинамы $1 + \mu = 1$ (формулы 2 — 14).

	α	δ
радиус-вектор	13 ^h 9 ^m 40 ^s	42°4'8"
"	13 9 43	44 21.1
сюндинама	13 6 48	38 35.3 1855.0
"	13 2 51	41 4.8

На рисунке 2 (сетка *B.D*) вычерчены хвосты кометы, продолженный радиус-вектор ядра (ξ) и сюндинама $1 + \mu = 1$. Тот же результат дали фотографии августа 23 (А. Н. Высотский, Ставидлы Киевской губ.), Октября 12 (Г. А. Тихов и А. Н. Высотский, Пулково) и октября 13 (Г. А. Тихов, Пулково).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Комета Делавана 1913 f имела два хвоста: главный хвост (более яркий на фотографической пластинке) II типа и второй хвост, немного слабее по яркости, но простирающийся до края пластиинки (9°) — I типа.

Российский Астрофизический Институт.
г. Москва, 1924, январь.

ON THE DETERMINATION OF TYPE OF COMET'S TAIL.

S. B. Orlov.

ABSTRACT.

The method now proposed differs from the method of Bredichin namely that the syndynams are drawn directly on the investigating drawing of the comet's tails. The types of the tails of Delavan's comet (1913 f) are determined; the principal tail appeared to be of type II, the second tail of type I.

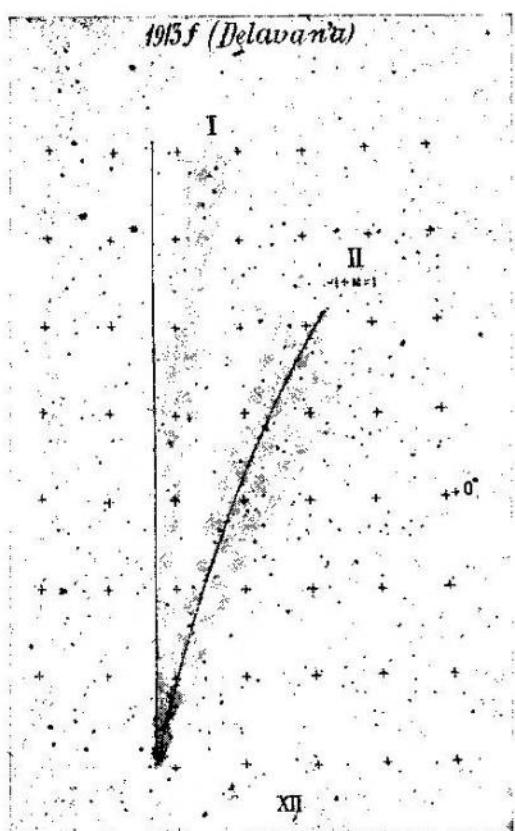


Рис. 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТТАЛКИВАТЕЛЬНОЙ СИЛЫ СОЛНЦА В ХВОСТЕ КОМЕТЫ 1908 III (Morehouse).

C. B. Орлов.

Могучие облачные образования в хвосте кометы 1 окт. были трижды зафотографированы на обсерватории Стонихерст Колледжа (Stonyhurst College) Сайдгревсом и Корти (Sidgreaves and Cortie)¹⁾. Произведенные ими измерения расстояний от ядра этих облачных образований позволили мне вычислить величину отталкивателной силы Солнца. Снимки были получены портретным объективом Даллмейера $d = 6$ дюйм. $f = 30$ дм.

Эпоха снимка	(Угловое расст. обл. образ. от ядра.)	Экспозиция	Длина хвоста.
1. Окт. 1 7 ^h 42 ^m .5 ср. Гр. вр.	1° 1' 0"	35"	3°49'
2. Окт. 1 8 47 .5 "	1 10 0	55	3 27
3. Окт. 1 11 21 .0 "	1 32 40	30	2 40

Так как хвост кометы был I типа по Бредихину и поэтому его ось совпадала с продолженным радиусом-вектором, то для вычисления линейных расстояний ξ облачного образования от ядра можно взять следующую формулу:

$$\xi = \frac{\rho \sin s}{\sin(K-s)} \quad (1) \quad \text{где} \quad \begin{cases} s - \text{угловое расстояние облачного образования} \\ \text{от ядра.} \\ \rho - \text{расстояние кометы от земли} \\ K - \text{угол фазы вычисляемый по формуле:} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} K = \sqrt{\frac{(p-\rho)(p-r)}{p(p-R)}} \quad (2), \quad \text{где } R - \text{расстояние Земли от Солнца.}$$

Для вычисления r , s и K были взяты элементы Кобольда (Kobold) (A.N. B. 179, p 47)

$K = 34^{\circ}42'.0$ Ввиду огромной быстроты продвижения можно принять,
 ξ что ни величина, ни направление вектора отталкиватель-
1. 0.03654 ной силы не менялись; тогда, если эффективную силу
2. 0.04206 Солнца, действующую на облачное образование, обозначить
3. 0.05618 через μ (в единицах солнечного тяготения Солнца), то,
исследуя движение относительно ядра кометы, мы должны прибавить
к вектору μ вектор, равный единице (тяготению) $1 + \mu$. $1 + \mu$ есть не что

¹⁾ M. N. LXIX Note on Comet 1908 (Morehouses)

иное, как отталкивательная сила Солнца, действующая на облачное образование. Уравнения движения, приняв за начало счета средний из наблюденных моментов, напишутся:

$$\xi_1 - \xi_2 = (t_1 - t_2) g + \frac{(t_1 - t_2)^2 M}{2}$$

$$\xi_3 - \xi_2 = (t_3 - t_2) g + \frac{(t_3 - t_2)^2 M}{2},$$

где g скорость облачного образования в средний из наблюденных моментов.

$$M = \frac{(1 + \mu) k^2}{(r + \xi_2)^2}$$

k — Гауссова постоянная. Для данного случая имеем:

$$\begin{aligned} -0.0055 &= -0.0451 g + 0.00102 M \\ -0.0141 &= 0.1066 g + 0.00568 M \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (A)$$

отсюда

$$M = 0.140 \frac{a}{d^2} \quad g = 0.125 \frac{a}{d}$$

или

$$1 + \mu = 156.$$

В своей прежней работе (Изв. Российской Астрофизической Обсерв. Том I стр. 235) я показал, что величины отталкивательных сил Солнца в хвосте этой кометы были, повидимому, кратными числу 23. Величина, полученная по трем наблюдениям 1 окт. из передвижения облачного образования, обладает тем же свойством: $156:7 = 23,3$.

THE DETERMINATION OF THE REPULSIVE FORCE OF THE SUN IN THE TAIL OF COMET MOREHOUSE (1908, III).

S. V. Orlov.

ABSTRACT.

With the measured distances of the clouded formation of 2 october from the nucleus taken at three different moments the repulsive force of the Sun is found to be $1 + \mu = 156$. In my paper (Publ. de l'Observ. Centr. Astroph. de Russie. V. I. p. 236) I have shewn that the repulsive force in this tail is apparently a multiple of the number 22—23; the obtained number 156 has the same property.

ON THE COSMICAL DUST NEAR THE STARS.

B. P. Gerasimovič.

The question about the cosmical dust has acquired in the present time a special interest. The newest researches about the spiral nebulosities allow us to suppose in them an enormous condensation of cosmical dust, repulsed by the radiation pressure of galactic stars towards the poles of our star-system. In connection with it is emerged the question, if the radiative repulsion could develop thus enormous velocities, with which the spirals recede from the galactic plane.

Hubble's researches have considerably contributed to elucidate the importance of the cosmical dust: they demonstrated, that the diffus galactic nebulosities are intimately united with the stars, involved by them and which illuminate them. Nebulosities with continuous spectra seem to be condensations of particles able to reflect the radiation, falling on them. They involve stars of different spectral classes: most frequently it is the class *B*, but occur also giants and dwarfs of the "late" types. It is very characteristic, that among these stars there is no stars of the class *O*, which form commonly the nucleus of nebulosities with an emission spectrum. It must be added, that diffus nebulosities with continuous spectra belong evidently to the same "local system" to which belong the helium stars; but nebulosities with emission spectra have on the contrary a plane of condensation, coinciding with the galactic one.

Let us consider a star in the cloud of cosmical dust enveloping it, and investigate the forces which are acting on the late, supposing, that the whole system is in equilibrium. Following forces will be acting on each dust particle:

- 1) the attraction of the star, W
- 2) its radiative repulsion, D
- 3) the attractive of the whole cloud
- 4) its radiative repulsion.

We will investigate the forces (1) and (2), i. e. will consider the particle as a single one. In the case of equilibrium it must be $\frac{D}{W} = 1$. Let S be the density of energy at the distance r from the star of radius R , of the mass M .

and of the effective temperature T_0 . Let the particle's radius, its mass and density be correspondingly a , m and δ . Evidently:

$$\frac{D}{W} = V \frac{S \pi a^2}{W},$$

where $V = \frac{D}{S \pi a^2}$ is an auxiliary quantity, playing a special part in the theory of radiation pressure (Schwarzschild-Nickolson). If c is velocity of the light, α — the constant of Stephan's law, then

$$S = \frac{\alpha T_0^4 R^2}{c r^3}$$

and

$$\frac{D}{W} = V \frac{3 \alpha}{4 c k^2} \cdot \frac{T_0^4 R^2}{a M \delta},$$

where k^2 is the gravitation constant.

Let us suppose the radiation as monochromatic. The corresponding wave-length will be defined with the help of Wien's law

$$\lambda T_0 = 2900 \cdot 10^{-4} \text{ where } \lambda \text{ is expressed in cm.}$$

Supposing $a = n \lambda$ and applying the law of Wien, we arrive to the formula:

$$\frac{D}{W} = A \cdot \frac{V}{n}, \quad \text{if} \quad A = \frac{3 \alpha R^2 T_0^4 \cdot 10^3}{4 c k^2 M \delta \cdot 29}$$

We suppose that the particle is so far distant from the star, that the electromagnetic wave may be considered as a plane. In this case the curve $V = V(n)$ has a maximum. This maximum for ideal reflectors corresponds to a diameter equal to $\frac{1}{3} \lambda$, if $V = 2.5$. For a sufficiently small the formula

$$\frac{D}{S} = \frac{224}{3} \frac{\pi^5}{\lambda^5} \frac{a^6}{k^4}$$

and for a sufficiently great ones —

$$\frac{D}{S} = \pi a^2$$

the last formula is also applicable to ideal absorbers¹⁾.

Applying the mentioned formulae and the results of the theory Schwarzschild-Nickolson, we can find the radius of the particles held in equilibrium near the stars of different classes, if we use certain "star-models" as ground for our calculations.

For stars of the classes $O-B$ we admit, according to the researches of Wilsing²⁾ $R = 10 R_\odot$ and according to the statistical data $M = 5$.

¹⁾ Schwarzschild ("Münch. Berichte" 1901) or Nickolson (M. N.)

²⁾ Public. Observ. Potsdam, N. 76 ($M = 8 \cdot 6 M_\odot$).

For dwarfs $A - G$ we can admit $R = R_{\odot}$ and $M = 1$. For giants M and G , according to interferential determinations, $R = 200 R_{\odot}$ and, according to Russel $M = 3$. The temperatures are adopted according to the Saha's scalae¹⁾). If we adopt δ — the particle density = 5, i. e. approximately the earth density, we obtain the following list of effective λ , T and A .

In our case it must be $\frac{V}{n} A = 1$.

<i>Sp.</i>	$\lambda_{max.}$	T	$A \cdot 10^{-4}$
<i>Pe</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 09	30000°	1.8
<i>O_b</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 13	22000°	0.4 <i>H</i> completely ionised
<i>B₀</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 16	18000°	0.2
<i>B₂</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 17	17000°	0.1 Max. absorption of <i>He</i> lines
<i>B₈</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 21	14000°	0.04 <i>Ca</i> completely ionised
<i>A₀</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 24	12000°	0.001 Appearance of <i>He</i> lines
<i>G</i> dwarfs	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 42	7000°	0.00006
<i>G</i> giants	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 42	7000°	0.9
<i>M</i> giants	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 58	5000°	0.2

In Nickolson's table, made for the region of Schwarzschild's maximum, n appears as argument, changing from $n = 0.08$ to $n = 0.48$, $\frac{V}{n}$ changes from 3.64 to 2.75, passing through the maximum, equal to 15.89 at $n = 0.18$. The value obtained above demonstrates clearly, that an equilibrium near the maximum of V is possible only for the dwarf stars, in all other groups V lies very far from its maximum. It means, that there will be two values of a , for which the equilibrium is possible: one for a relatively great ones, and another to the extremely small ones. For the latter, according to the abovesaid formula, we obtain easily:

$$a = n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{224 A \zeta^4}} \lambda = 0.05 A^{-\frac{1}{4}} \lambda.$$

The calculation gives the value of a for different classes from 10^{-8} cm. to 10^{-7} cm. These particles will not be however those, which we think. They will be of atomical order.

Really the radius of the first Bohr's circle for the hydrogen is $0.5 \cdot 10^{-8}$ cm.

Thus those „small particles“ will be isolated atoms and their layer will be a gaz-layer, and therefore we will not consider it.

For great particles (for ideal absorbers and ideal reflectors) according to the abovesaid formula

$$V = 1 \quad \text{and} \quad a = A \lambda$$

¹⁾ Proceed. Royal Society A. Vol. 99.

we obtain the following values of a :

P_e	0.16 cm.	B_8	0.01 cm.
Ob	0.05 cm.	G_0 giant	0.4 cm.
B_0	0.03 cm.	Md giant	0.1 cm.

The dust, the particles of which are greater than the abovesaid dimensions, will have an acceleration towards the centre of corresponding stars, the smaller particles will be repelled and shall obtain the equilibrium only near the dwarf stars (for the Sun the corresponding $a = 0.15$ for $\delta = 1$). If we suppose that the clouds of cosmical dust are dynamical phenomena and that every particle has a certain relative velocity directed to the centre, the abovesaid values of a will appear as the inferior limit of the radius, because here to the radiation pressure is added the corresponding component of inertial force.

Thus we obtain the following result. Diffuse nebulosities with continuous spectra are formed by sufficiently big particles; the smaller dust must be repulsed from the great number of stars. Then emerges the question, if a similiar repulsion can explain the enormous velocities of spirals. Not long ago Russel analysed this question, considering the summary attraction and repulsion of the whole system of galactic stars and obtained a negative result. But this question will appear in a different aspect, if we analyse not the summary repulsion, but the repulsion from single peculiarly hot stars or giants. Let us consider a particle, the diameter of which corresponds to the maximum of V . ($V = 15.9$ at $n = 0.18$). For the adopted model of class B_2 the corresponding particle (ideal reflector) will have the radius $a = 0.03 \mu$ and the ratio of repulsion to attraction will be equal to 1.6×10^4 . If in the initial moment the particle was without initial velocity at the distance r_0 from the centre, applying the integral of energy, we obtain for the velocity at the distance r : $v^2 = 2\beta \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$, where $\beta = 1.6 \cdot 10^4 k^2$.

In order to value the order of the acquired velocity, let us suppose, that $r_0 = 100 R$. Then at the distance r , considerably greater, than r_0 , we will obtain approximately: $v \sim 5400$ km/sec. The exemple adduced is very drastic. In reality by the radiation pressure will be repulsed particles of various dimensions with various values of V , i. e. of β . If for instance $a = 0.08 \mu$, v will be nearly 2000 km/sec. Thus the velocity, acquired by the average particle will be of the order of the velocities of spirals. The motion of the particle will depend also on the summary attraction of the star-system and on the forces developed at encounters with single stars. In Kapteyn's Universum the summary attraction for the central layer is equal to the attraction of 33.2 solar stars, being at the distance of 1 par sec¹);

¹) Kapteyn. An attempt etc. Aph. J. Vol. 55.

a force evidently very small in comparison with the calculated repulsion. More considerable are the changes of velocity at the encounters. The average star-density in the central layer of Kapteyn's Universum is 0.0358 for 1 parssec³. Thus even before entering in the zone of action of the nearest star, the particle will have time to acquire a considerable velocity. Consequently the action of the encounter will be comparatively small, because it is inversely proportional to the relative velocity. It would be of great interest to calculate the acquired velocity reckoning the mentioned actions. But the initial conditions of this problem are too confused as to deserve a research. It is only evident—the acquired velocity will be anyhow comparable with the velocities of spirals. In accordance with it is the fact, noticed by Reynolds¹⁾, that the spirals "avoid" the regions of density maximum of star clusters; it is explained by the great number of giants in the latter.

As the ratio D/W does not depend on r , the particle of a determined radius will be in equilibrium in every distance from the star, if, certainly, there is no absorbing mass between it and the star. But if we are dealing with many particles, the equilibrium of them will be obtained—speaking in generally—only at a determined distance in that region, where the mutual action of our particles is zero.

It is not difficult to calculate this distance. Let I be the radiation-intensity of the surface unity of the particle, S —radiation intensity of the star at the distance r . We suppose the particle of the radius a as a perfect absorber. It receives from the star in the unity of time the energy— $S\pi a^2$, but radiate— $4a^2\pi I$; because of the stationary character of the process it must be

$$I = \alpha \theta^4 = S/4$$

where θ —is the proper temperature of the particle. The tutual gravitation of two equal particles of mass m is evidently

$$k^2 m^2/d^2$$

where d —the distance between them. The light repulsion:

$$\frac{I\pi a^4}{c d^2}$$

If the equilibrium occurs, then equating the relation of these two forces to unity and substituting the abovegiven value S , we find for the unknown distance— r —of particles from star the formula:

$$r^2 = \frac{9\alpha^2 R^2 T_0^4}{64ck^2\pi a^2\delta^2}.$$

¹⁾ M. N. Vol. 83.

Substituting here the above obtained value a for the particle which is in equilibrium under the action of forces (1) and (2), we obtain finally:

$$r = \sqrt{\frac{ck^2}{4\pi a}} \cdot \frac{M}{T_0^2 R},$$

a value, which depends only on the quantities characterising the star.

Calculating r for the above adopted star-models, we find

Sp. cl.	r
O	3.6×10^{16} cm. = 0.04 light-year
B_2	11.5×10^{16} cm. = 0.12 "
B_8	15.8×10^{16} cm. = 0.16 "
G dwarf	111.10^{16} cm. = 1 "
G giant	18.10^{16} cm. = 0.20 "
M giant	3.10^6 cm. = 0.03 "

At such great distances the particles will have very low temperatures. For instance for a particle near the star of class O , t is of order 100° Abs. The wave length of proper radiation of such a particle will be of order 30μ . Because we supposed calculating r , that the particle appears as a perfect absorber, we will not be able to notice this radiation, corresponding to the extreme infra red part of spectrum—we will have a dark nebulosity.

Our results will be a little altered when applyied to perfect or partial reflectors. For perfect reflectors the mutual repulsion will be a little different: viz. as it is easy to understand from geometrical considerations, it will be less, than the repulsion from perfect absorbers in the ratio $\frac{2a}{\pi} : 1$, where $a = \text{arc cos } d/2r$; the average value of this angle is $\pi/4$. For particles with the reflection coefficient μ , this relation will be $(1 + \mu) \frac{2a}{\pi}$. Thus our result for r must be in both cases divided by $\sqrt{2}$ and $\sqrt{4/\mu(\mu + 1)}$. On the other hand the particle must have a certain transparency. It is proved by the anomaly colours of stars, enveloped by cosmical dust, which can not be explained by the diffusion by the particles small in comparison to the wavelength. If the absorbing power of the particle (fonction of λ) is γ_1 our result for r must be multiplied by $\sqrt{\gamma_1}$.

If the observed diffusive nebulosities with continous spectra were really equilibrium figures of cloud of cosmical dust, the notion of the angular radius of the nebulosity and of the spectrum of the involved star would allow us to determine their parallaxes. At the first glance the observation seems not to confirm it. According to the statical theory the radius of the cloud must be inversely proportional to the square root from the absolute brightness of the central star. Meanwhile, according to Hubble's demonstration, the angular radii of the nebulosity (a) are united with the apparent magnitude of the central stars (m) by the relation: $m + 5 \log a = \text{Const}$, proving that the radius is directly proportional to the square root from the absolute brightness. It must be noticed, that Hubble's results are valid for small ones

and for gigantic nebulosities. There is no doubt, that gigantic nebulosities are mechanically independent from the star, which illuminated them. Such a nebulosity as „N. America“ spread (according Lundmark) for 7 parseks, can not be submitted to considerable mechanical influence even from such a supergiant as α Cygni. To those our results can not be applyed. Nevertheless it is not difficult to notice, that diffuse nebulosities, with few exceptions (in Hubble's list) are sharply divided in two groups: with small angular radius (till 6'—7') and gigantic ones (in some tens of minutes). The applying of statical theory to the former seems not to be hopeless. According to Hubble's diagrams they are far less submitted to the relation, discovered by him; another cause will be of great support to above mentioned relation, namely — the more bright absolutely is the star, the more quantity of dust it will be able to sustain and the absorption of its radiation should be more great; consequently the cloud of dust will be comparatively fainter and with less raius.

It is to regret, that the observed radius depends on the conditions of observations. Even reducing them to the same exposure upon the same instrument, as it does Hubble, we will not obtain individual radii. Moreover, we do not know whether reflective nor absorption faculty of the particles.

The whole does not allow us to obtain individual parallaxes, but only the average ones for stars of various subdivisions. I used for them the data of Hubble. In the order of columns are confronted the numbers of nebulosities, the average apparent star brightness, the average ang. radius, the average parallax and absolute magnitude of central.

Sp. class	n	m	a'	π	M
$B_0 - B_4$	9	10.3	2'.0	0"016	+ 6 ^m 2
$B_2 - B_3$	22	9.7	2'.2	0"016	+ 5 ^m 2
$B_4 - B_5$	5	9.7	2'.3	0"014	+ 5 ^m 7
$B_8 - B_9$	6	9.6	2'.2	0"013	+ 5 ^m 0

The obtained π are in generally near to the average π of „normal“ stars of corresponding groups. For instance Karteyn ¹⁾ obtains for south helium stars of $B_0 - B_2$ groups π between 0"010 and 0"012. Our research is dealing with perfect absorbers: to obtain π for perfect reflectors we must multiply the obtained π with $\sqrt{2}$. Thus the results of our research are very encouraging. We must notice that gigantic nebulosites are far more distant from us. Lundmark ²⁾ obtains their π between 0"001 and 0"0001.

We can go farther and find absorption in cosmical clouds: it is enough to confront the absolute magnitudes of „normal“ helium stars with those obtained above. We will use for it the spectroscopical determinations of

¹⁾ Aph. J. XL.

²⁾ P. A. S. P. II 1922.

Adams¹⁾ (adopting the average of his determinations for stars with sharp and diffuse lines), reducing them to photographic scale, by color-indices according to Pickering²⁾.

Sp. class	M neb. star	M normal star	ΔM
$B_0 - B_1$	+ 6 m 2	- 3 m 0	9 m 2
$B_2 - B_3$	+ 5 m 2	- 1 m 7	6 m 9
$B_4 - B_5$	+ 5 m 7	- 0 m 9	6 m 6
$B_8 - B_9$	+ 5 m 0	0 m 0	5 m 0

Such a considerable absorption must not astonish us: the absorption of nuclear light by the planetary is considerably greater; the comparison of the absolute magnitude of nuclei found by v. Maanen (+ 9 m 1) with the abs. magn.³⁾ of „normal“ O stars, gives for the absorption an enormous value $\Delta m = 15m$ 6.

It is necessary to consider one question more. The observations do not discover between the stars enveloped by cosmical dust even a single star of class O and, on the contrary, the nuclei of emission-nebulosities are all „hotter“, than B_2 . It is somewhat difficult to explain the first case. Perhaps it is a consequence of photo-effect. The intense radiation of the stars of type O, (the maximum near $\lambda = 0\mu 13$) strikes out of the big dust particles (of the order 1 — 0.1 cm) electrons, loading them positively. It must create a considerable impuls towards the dispersion of the cloud. It is not difficult to explain the absence of stars older than B_2 between the nuclei of emission nebulosities, adopting the quantum-theory. We will reckon the ionising action of star radiation on the atom, which is far enough from it. According to the well known relation of Einstein, we can write

$$hv = eV$$

where v — is wave number of monochromatic radiation, h — Planck's „quantum of action“, e — electron's charge, V — measure the ionising radiation's faculty. Adopting for the star Wolf-Rayet $\lambda_{max} + 0\mu 09$, and for B_8 $\lambda_{max} = 0^m 21$ we find V for the radiation of two stars correspondingly 13.2×10^8 and 6.10^8 el. magn. in i. e. 13.2 and 6.0 volts. The first value of V is quite sufficient for exciting the chief lines of Balmer serie (if we suppose, that neutral hydrogen is monoatomic), but the second V will not be able to excite even the appearance of $H\alpha$, for which the corresponding $V = 12.03$ volts.

In consequence of very serious data, of which I will speak in another paper, I am not inclined to think, that the shining of emission nebulosities

¹⁾ Aph. J. June 1923.

²⁾ Harv. An. 80.

may be explained exclusively by primary or secondary photo-effects. But certainly the late have a considerable part, which it has not in the gas-layer, enveloping the colder stars.

Summary of results.

I. The radiation and the gravitation of stars of classes *O*, *B* and of giants *G* and *M* can retain in equilibrium only the sufficiently big cosmical dust.

II. The smaller cosmical dust will be repulsed by the radiation pressure and on a comparatively small distance it can acquire the velocity of the order of velocities of spirals.

III. The spherical dust layer in the case of equilibrium must be in a completely determined distance from the central star. This distance is calculated for different „stars-models“, supposing, that the particles are perfect absorbers or reflectors.

IV. Small diffuse nebulosities with continuous spectra seem to represent statical forms. Applying the theoretical formula for the radius, we obtain the π of the nebulosities enveloping various groups of *B* stars. The results are quite in accordance with the π of „normal“ *B* stars.

V. The absolute magnitudes of the nuclei are obtained which allow to determine the absorption in the nebulosities. It is $6^m - 5^m$, a very great value, but smaller, than the absorption in the planetary.

VI. An attempt is made to explain, why the „latter“ helium stars do not appear as nuclei of emission nebulosities.

1923. XII.

Kharkow.

Astronomical Observatory.

О КОСМИЧЕСКОЙ ПЫЛИ В ОКРЕСТНОСТИХ ЗВЕЗД.

Б. П. Герасимович.

РЕЗЮМЕ.

В настоящей работе исследуются условия равновесия космической пыли в окрестностях звезд различных спектральных классов под влиянием тяготения и лучевого давления звезды и аналогичных сил взаимодействия частиц. Пользуясь результатами теории лучевого давления Шварцшильда — Никольсона, определяются диаметры частиц близ различных звездных „моделей“, при построении которых приняты во внимание новейшие работы (Saha, Wilsing, применения интерферометра и т. д.). Оказывается, в окрестностях особенно „горячих“ звезд (*O*, *B*) и около желтых и красных гигантов могут находиться в статическом состоянии только крупные частицы, радиусы которых между 1 — и 0.1 см, очень мелкая пыль может быть только около карликов (порядка 1 — 0.1 микрона). Последняя будет отбрасываться от звезд *O*, *B*; *G* гиг., *M* гиг. с силой прево-

сходящей их тяготения в десятки тысяч раз. Применение интеграла живых сил приводит к выводу, что подобная частица может сравнительно скоро приобрести скорость порядка $1000 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Этот результат объясняет огромные положительные скорости спиральных туманностей, если понимать под ними скопления космической пыли (Reynolds, Lindemann); отрицательный результат Ресселя (Russell) объясняется тем, что он рассматривал суммарное лучевое отталкивание галактических звезд, среди которых много карликов. Отношение тяготения к световому давлению звезды не зависит от расстояния частицы; если же учитывать взаимодействия частиц — равновесие может быть достигнуто только на вполне определенном расстоянии от звезды, зависящем только от величин, характеризующих собой звезду. Предполагая частицы идеальными абсорборами, можно вычислить радиус сферического слоя пыли; оказывается для О, В, G гиг. и М гиг. он равен 0.1—0.05 световых лета (для идеальных рефлекторов, и частиц с данным коэффициентом и отражения он немного меньше).

Полученные значения радиусов сферических слоев космической пыли около звезд различных классов применены мною к определению параллаксов небольших туманностей с непрерывным спектром, которые могут считаться статическими формами. Оказывается для тех из них, которые „окутывают“ звезды класса В, π лежит между 0."016 и 0."013 (для различных групп) — в достаточном согласии со средними параллаксами Каптейва. Зная абсолютные величины „нормальных“ гелиевых звезд и ядер вышеуказанных туманностей, можно определить ослабление света звезды, при прохождении его через такую туманность; оказывается, последние ослабляют радиацию на 9^m.2—5^m.0 (в зависимости от спектра), величина большая, но меньшая, чем ослабление яркости ядер планетарных туманностей.

В конце делается попытка объяснить, почему ядрами туманностей с эмиссионными спектрами являются только звезды класса О, но не В. Если сводить свечение туманностей с эмиссионными спектрами к результату фотоэффекта под действием радиации звезды, соотношение квантовой теории дает для фотозелектрического потенциала радиации звезд класса О величину в 13.2 вольт, а для группы В₂ — 6.0 вольт. Первый совершенно достаточночен для возбуждения значительной части Бальмеровой серии, второй не в состоянии возбудить даже Н_α (для чего требуется напряжение в 12 вольт).

ON THE COSMICAL DUST NEAR THE STARS.

B. P. Gerasimovič.

The question about the cosmical dust has acquired in the present time a special interest. The newest researches about the spiral nebulosities allow us to suppose in them an enormous condensation of cosmical dust, repulsed by the radiation pressure of galactic stars towards the poles of our star-system. In connection with it is emerged the question, if the radiative repulsion could develop thus enormous velocities, with which the spirals recede from the galactic plane.

Hubble's researches have considerably contributed to elucidate the importance of the cosmical dust: they demonstrated, that the diffus galactic nebulosities are intimately united with the stars, involved by them and which illuminate them. Nebulosities with continuous spectra seem to be condensations of particles able to reflect the radiation, falling on them. They involve stars of different spectral classes: most frequently it is the class *B*, but occur also giants and dwarfs of the "late" types. It is very characteristic, that among these stars there is no stars of the class *O*, which form commonly the nucleus of nebulosities with an emission spectrum. It must be added, that diffus nebulosities with continuous spectra belong evidently to the same "local system" to which belong the helium stars; but nebulosities with emission spectra have on the contrary a plane of condensation, coinciding with the galactic one.

Let us consider a star in the cloud of cosmical dust enveloping it, and investigate the forces which are acting on the late, supposing, that the whole system is in equilibrium. Following forces will be acting on each dust particle:

- 1) the attraction of the star, W
- 2) its radiative repulsion, D
- 3) the attractive of the whole cloud
- 4) its radiative repulsion.

We will investigate the forces (1) and (2), i. e. will consider the particle as a single one. In the case of equilibrium it must be $\frac{D}{W} = 1$. Let S be the density of energy at the distance r from the star of radius R , of the mass M .

and of the effective temperature T_0 . Let the particle's radius, its mass and density be correspondingly a , m and δ . Evidently:

$$\frac{D}{W} = V \frac{S \pi a^2}{W},$$

where $V = \frac{D}{S \pi a^2}$ is an auxiliary quantity, playing a special part in the theory of radiation pressure (Schwarzschild-Nickolson). If c is velocity of the light, α — the constant of Stephan's law, then

$$S = \frac{\alpha T_0^4 R^2}{c r^3}$$

and

$$\frac{D}{W} = V \frac{3 \alpha}{4 c k^2} \cdot \frac{T_0^4 R^2}{a M \delta},$$

where k^2 is the gravitation constant.

Let us suppose the radiation as monochromatic. The corresponding wave-length will be defined with the help of Wien's law

$$\lambda T_0 = 2900 \cdot 10^{-4} \text{ where } \lambda \text{ is expressed in cm.}$$

Supposing $a = n \lambda$ and applying the law of Wien, we arrive to the formula:

$$\frac{D}{W} = A \cdot \frac{V}{n}, \quad \text{if} \quad A = \frac{3 \alpha R^2 T_0^4 \cdot 10^3}{4 c k^2 M \delta \cdot 29}$$

We suppose that the particle is so far distant from the star, that the electromagnetic wave may be considered as a plane. In this case the curve $V = V(n)$ has a maximum. This maximum for ideal reflectors corresponds to a diameter equal to $\frac{1}{3} \lambda$, if $V = 2.5$. For a sufficiently small the formula

$$\frac{D}{S} = \frac{224}{3} \frac{\pi^5}{\lambda^5} \frac{a^6}{k^4}$$

and for a sufficiently great ones —

$$\frac{D}{S} = \pi a^2$$

the last formula is also applicable to ideal absorbers¹⁾.

Applying the mentioned formulae and the results of the theory Schwarzschild-Nickolson, we can find the radius of the particles held in equilibrium near the stars of different classes, if we use certain "star-models" as ground for our calculations.

For stars of the classes $O-B$ we admit, according to the researches of Wilsing²⁾ $R = 10 R_\odot$ and according to the statistical data $M = 5$.

¹⁾ Schwarzschild ("Münch. Berichte" 1901) or Nickolson (M. N.)

²⁾ Public. Observ. Potsdam, N. 76 ($M = 8 \cdot 6 M_\odot$).

For dwarfs $A - G$ we can admit $R = R_{\odot}$ and $M = 1$. For giants M and G , according to interferential determinations, $R = 200 R_{\odot}$ and, according to Russel $M = 3$. The temperatures are adopted according to the Saha's scalae¹⁾). If we adopt δ — the particle density = 5, i. e. approximately the earth density, we obtain the following list of effective λ , T and A .

In our case it must be $\frac{V}{n} A = 1$.

<i>Sp.</i>	$\lambda_{max.}$	T	$A \cdot 10^{-4}$
<i>Pe</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 09	30000°	1.8
<i>O_b</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 13	22000°	0.4 <i>H</i> completely ionised
<i>B₀</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 16	18000°	0.2
<i>B₂</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 17	17000°	0.1 Max. absorption of <i>He</i> lines
<i>B₈</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 21	14000°	0.04 <i>Ca</i> completely ionised
<i>A₀</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 24	12000°	0.001 Appearance of <i>He</i> lines
<i>G</i> dwarfs	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 42	7000°	0.00006
<i>G</i> giants	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 42	7000°	0.9
<i>M</i> giants	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 58	5000°	0.2

In Nickolson's table, made for the region of Schwarzschild's maximum, n appears as argument, changing from $n = 0.08$ to $n = 0.48$, $\frac{V}{n}$ changes from 3.64 to 2.75, passing through the maximum, equal to 15.89 at $n = 0.18$. The value obtained above demonstrates clearly, that an equilibrium near the maximum of V is possible only for the dwarf stars, in all other groups V lies very far from its maximum. It means, that there will be two values of a , for which the equilibrium is possible: one for a relatively great ones, and another to the extremely small ones. For the latter, according to the abovesaid formula, we obtain easily:

$$a = n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{224 A \zeta^4}} \lambda = 0.05 A^{-\frac{1}{4}} \lambda.$$

The calculation gives the value of a for different classes from 10^{-8} cm. to 10^{-7} cm. These particles will not be however those, which we think. They will be of atomical order.

Really the radius of the first Bohr's circle for the hydrogen is $0.5 \cdot 10^{-8}$ cm.

Thus those „small particles“ will be isolated atoms and their layer will be a gaz-layer, and therefore we will not consider it.

For great particles (for ideal absorbers and ideal reflectors) according to the abovesaid formula

$$V = 1 \quad \text{and} \quad a = A \lambda$$

¹⁾ Proceed. Royal Society A. Vol. 99.

we obtain the following values of a :

P_e	0.16 cm.	B_8	0.01 cm.
Ob	0.05 cm.	G_0 giant	0.4 cm.
B_0	0.03 cm.	Md giant	0.1 cm.

The dust, the particles of which are greater than the abovesaid dimensions, will have an acceleration towards the centre of corresponding stars, the smaller particles will be repelled and shall obtain the equilibrium only near the dwarf stars (for the Sun the corresponding $a = 0.15$ for $\delta = 1$). If we suppose that the clouds of cosmical dust are dynamical phenomena and that every particle has a certain relative velocity directed to the centre, the abovesaid values of a will appear as the inferior limit of the radius, because here to the radiation pressure is added the corresponding component of inertial force.

Thus we obtain the following result. Diffuse nebulosities with continuous spectra are formed by sufficiently big particles; the smaller dust must be repulsed from the great number of stars. Then emerges the question, if a similiar repulsion can explain the enormous velocities of spirals. Not long ago Russel analysed this question, considering the summary attraction and repulsion of the whole system of galactic stars and obtained a negative result. But this question will appear in a different aspect, if we analyse not the summary repulsion, but the repulsion from single peculiarly hot stars or giants. Let us consider a particle, the diameter of which corresponds to the maximum of V . ($V = 15.9$ at $n = 0.18$). For the adopted model of class B_2 the corresponding particle (ideal reflector) will have the radius $a = 0.03 \mu$ and the ratio of repulsion to attraction will be equal to 1.6×10^4 . If in the initial moment the particle was without initial velocity at the distance r_0 from the centre, applying the integral of energy, we obtain for the velocity at the distance r : $v^2 = 2\beta \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$, where $\beta = 1.6 \cdot 10^4 k^2$.

In order to value the order of the acquired velocity, let us suppose, that $r_0 = 100 R$. Then at the distance r , considerably greater, than r_0 , we will obtain approximately: $v \sim 5400$ km/sec. The exemple adduced is very drastic. In reality by the radiation pressure will be repulsed particles of various dimensions with various values of V , i. e. of β . If for instance $a = 0.08 \mu$, v will be nearly 2000 km/sec. Thus the velocity, acquired by the average particle will be of the order of the velocities of spirals. The motion of the particle will depend also on the summary attraction of the star-system and on the forces developed at encounters with single stars. In Kapteyn's Universum the summary attraction for the central layer is equal to the attraction of 33.2 solar stars, being at the distance of 1 par sec¹);

¹) Kapteyn. An attempt etc. Aph. J. Vol. 55.

a force evidently very small in comparison with the calculated repulsion. More considerable are the changes of velocity at the encounters. The average star-density in the central layer of Kapteyn's Universum is 0.0358 for 1 parssec³. Thus even before entering in the zone of action of the nearest star, the particle will have time to acquire a considerable velocity. Consequently the action of the encounter will be comparatively small, because it is inversely proportional to the relative velocity. It would be of great interest to calculate the acquired velocity reckoning the mentioned actions. But the initial conditions of this problem are too confused as to deserve a research. It is only evident—the acquired velocity will be anyhow comparable with the velocities of spirals. In accordance with it is the fact, noticed by Reynolds¹⁾, that the spirals "avoid" the regions of density maximum of star clusters; it is explained by the great number of giants in the latter.

As the ratio D/W does not depend on r , the particle of a determined radius will be in equilibrium in every distance from the star, if, certainly, there is no absorbing mass between it and the star. But if we are dealing with many particles, the equilibrium of them will be obtained—speaking in generally—only at a determined distance in that region, where the mutual action of our particles is zero.

It is not difficult to calculate this distance. Let I be the radiation-intensity of the surface unity of the particle, S —radiation intensity of the star at the distance r . We suppose the particle of the radius a as a perfect absorber. It receives from the star in the unity of time the energy— $S\pi a^2$, but radiate— $4a^2\pi I$; because of the stationary character of the process it must be

$$I = \alpha \theta^4 = S/4$$

where θ —is the proper temperature of the particle. The tutual gravitation of two equal particles of mass m is evidently

$$k^2 m^2/d^2$$

where d —the distance between them. The light repulsion:

$$\frac{I\pi a^4}{c d^2}$$

If the equilibrium occurs, then equating the relation of these two forces to unity and substituting the abovegiven value S , we find for the unknown distance— r —of particles from star the formula:

$$r^2 = \frac{9\alpha^2 R^2 T_0^4}{64ck^2\pi a^2\delta^2}.$$

¹⁾ M. N. Vol. 83.

Substituting here the above obtained value a for the particle which is in equilibrium under the action of forces (1) and (2), we obtain finally:

$$r = \sqrt{\frac{ck^2}{4\pi a}} \cdot \frac{M}{T_0^2 R},$$

a value, which depends only on the quantities characterising the star.

Calculating r for the above adopted star-models, we find

Sp. cl.	r
O	3.6×10^{16} cm. = 0.04 light-year
B_2	11.5×10^{16} cm. = 0.12 "
B_8	15.8×10^{16} cm. = 0.16 "
G dwarf	111.10^{16} cm. = 1 "
G giant	18.10^{16} cm. = 0.20 "
M giant	3.10^6 cm. = 0.03 "

At such great distances the particles will have very low temperatures. For instance for a particle near the star of class O , t is of order 100° Abs. The wave length of proper radiation of such a particle will be of order 30μ . Because we supposed calculating r , that the particle appears as a perfect absorber, we will not be able to notice this radiation, corresponding to the extreme infra red part of spectrum—we will have a dark nebulosity.

Our results will be a little altered when applyied to perfect or partial reflectors. For perfect reflectors the mutual repulsion will be a little different: viz. as it is easy to understand from geometrical considerations, it will be less, than the repulsion from perfect absorbers in the ratio $\frac{2a}{\pi} : 1$, where $a = \text{arc cos } d/2r$; the average value of this angle is $\pi/4$. For particles with the reflection coefficient μ , this relation will be $(1 + \mu) \frac{2a}{\pi}$. Thus our result for r must be in both cases divided by $\sqrt{2}$ and $\sqrt{4/\mu(\mu + 1)}$. On the other hand the particle must have a certain transparency. It is proved by the anomaly colours of stars, enveloped by cosmical dust, which can not be explained by the diffusion by the particles small in comparison to the wavelength. If the absorbing power of the particle (fonction of λ) is γ_1 our result for r must be multiplied by $\sqrt{\gamma_1}$.

If the observed diffusive nebulosities with continous spectra were really equilibrium figures of cloud of cosmical dust, the notion of the angular radius of the nebulosity and of the spectrum of the involved star would allow us to determine their parallaxes. At the first glance the observation seems not to confirm it. According to the statical theory the radius of the cloud must be inversely proportional to the square root from the absolute brightness of the central star. Meanwhile, according to Hubble's demonstration, the angular radii of the nebulosity (a) are united with the apparent magnitude of the central stars (m) by the relation: $m + 5 \log a = \text{Const}$, proving that the radius is directly proportional to the square root from the absolute brightness. It must be noticed, that Hubble's results are valid for small ones

and for gigantic nebulosities. There is no doubt, that gigantic nebulosities are mechanically independent from the star, which illuminated them. Such a nebulosity as „N. America“ spread (according Lundmark) for 7 parseks, can not be submitted to considerable mechanical influence even from such a supergiant as α Cygni. To those our results can not be applyed. Nevertheless it is not difficult to notice, that diffuse nebulosities, with few exceptions (in Hubble's list) are sharply divided in two groups: with small angular radius (till 6'—7') and gigantic ones (in some tens of minutes). The applying of statical theory to the former seems not to be hopeless. According to Hubble's diagrams they are far less submitted to the relation, discovered by him; another cause will be of great support to above mentioned relation, namely — the more bright absolutely is the star, the more quantity of dust it will be able to sustain and the absorption of its radiation should be more great; consequently the cloud of dust will be comparatively fainter and with less raius.

It is to regret, that the observed radius depends on the conditions of observations. Even reducing them to the same exposure upon the same instrument, as it does Hubble, we will not obtain individual radii. Moreover, we do not know whether reflective nor absorption faculty of the particles.

The whole does not allow us to obtain individual parallaxes, but only the average ones for stars of various subdivisions. I used for them the data of Hubble. In the order of columns are confronted the numbers of nebulosities, the average apparent star brightness, the average ang. radius, the average parallax and absolute magnitude of central.

Sp. class	n	m	a'	π	M
$B_0 - B_4$	9	10.3	2'.0	0"016	+ 6 ^m 2
$B_2 - B_3$	22	9.7	2'.2	0"016	+ 5 ^m 2
$B_4 - B_5$	5	9.7	2'.3	0"014	+ 5 ^m 7
$B_8 - B_9$	6	9.6	2'.2	0"013	+ 5 ^m 0

The obtained π are in generally near to the average π of „normal“ stars of corresponding groups. For instance Karteyn ¹⁾ obtains for south helium stars of $B_0 - B_2$ groups π between 0"010 and 0"012. Our research is dealing with perfect absorbers: to obtain π for perfect reflectors we must multiply the obtained π with $\sqrt{2}$. Thus the results of our research are very encouraging. We must notice that gigantic nebulosites are far more distant from us. Lundmark ²⁾ obtains their π between 0"001 and 0"0001.

We can go farther and find absorption in cosmical clouds: it is enough to confront the absolute magnitudes of „normal“ helium stars with those obtained above. We will use for it the spectroscopical determinations of

¹⁾ Aph. J. XL.

²⁾ P. A. S. P. II 1922.

Adams¹⁾ (adopting the average of his determinations for stars with sharp and diffuse lines), reducing them to photographic scale, by color-indices according to Pickering²⁾.

Sp. class	M neb. star	M normal star	ΔM
$B_0 - B_1$	+ 6 m 2	- 3 m 0	9 m 2
$B_2 - B_3$	+ 5 m 2	- 1 m 7	6 m 9
$B_4 - B_5$	+ 5 m 7	- 0 m 9	6 m 6
$B_8 - B_9$	+ 5 m 0	0 m 0	5 m 0

Such a considerable absorption must not astonish us: the absorption of nuclear light by the planetary is considerably greater; the comparison of the absolute magnitude of nuclei found by v. Maanen (+ 9 m 1) with the abs. magn.³⁾ of „normal“ O stars, gives for the absorption an enormous value $\Delta m = 15m$ 6.

It is necessary to consider one question more. The observations do not discover between the stars enveloped by cosmical dust even a single star of class O and, on the contrary, the nuclei of emission-nebulosities are all „hotter“, than B_2 . It is somewhat difficult to explain the first case. Perhaps it is a consequence of photo-effect. The intense radiation of the stars of type O, (the maximum near $\lambda = 0\mu 13$) strikes out of the big dust particles (of the order 1 — 0.1 cm) electrons, loading them positively. It must create a considerable impuls towards the dispersion of the cloud. It is not difficult to explain the absence of stars older than B_2 between the nuclei of emission nebulosities, adopting the quantum-theory. We will reckon the ionising action of star radiation on the atom, which is far enough from it. According to the well known relation of Einstein, we can write

$$hv = eV$$

where v — is wave number of monochromatic radiation, h — Planck's „quantum of action“, e — electron's charge, V — measure the ionising radiation's faculty. Adopting for the star Wolf-Rayet $\lambda_{max} + 0\mu 09$, and for B_8 $\lambda_{max} = 0^m 21$ we find V for the radiation of two stars correspondingly 13.2×10^8 and 6.10^8 el. magn. in i. e. 13.2 and 6.0 volts. The first value of V is quite sufficient for exciting the chief lines of Balmer serie (if we suppose, that neutral hydrogen is monoatomic), but the second V will not be able to excite even the appearance of $H\alpha$, for which the corresponding $V = 12.03$ volts.

In consequence of very serious data, of which I will speak in another paper, I am not inclined to think, that the shining of emission nebulosities

¹⁾ Aph. J. June 1923.

²⁾ Harv. An. 80.

may be explained exclusively by primary or secondary photo-effects. But certainly the late have a considerable part, which it has not in the gas-layer, enveloping the colder stars.

Summary of results.

I. The radiation and the gravitation of stars of classes *O*, *B* and of giants *G* and *M* can retain in equilibrium only the sufficiently big cosmical dust.

II. The smaller cosmical dust will be repulsed by the radiation pressure and on a comparatively small distance it can acquire the velocity of the order of velocities of spirals.

III. The spherical dust layer in the case of equilibrium must be in a completely determined distance from the central star. This distance is calculated for different „stars-models“, supposing, that the particles are perfect absorbers or reflectors.

IV. Small diffuse nebulosities with continuous spectra seem to represent statical forms. Applying the theoretical formula for the radius, we obtain the π of the nebulosities enveloping various groups of *B* stars. The results are quite in accordance with the π of „normal“ *B* stars.

V. The absolute magnitudes of the nuclei are obtained which allow to determine the absorption in the nebulosities. It is $6^m - 5^m$, a very great value, but smaller, than the absorption in the planetary.

VI. An attempt is made to explain, why the „latter“ helium stars do not appear as nuclei of emission nebulosities.

1923. XII.

Kharkow.

Astronomical Observatory.

О КОСМИЧЕСКОЙ ПЫЛИ В ОКРЕСТНОСТИХ ЗВЕЗД.

Б. П. Герасимович.

РЕЗЮМЕ.

В настоящей работе исследуются условия равновесия космической пыли в окрестностях звезд различных спектральных классов под влиянием тяготения и лучевого давления звезды и аналогичных сил взаимодействия частиц. Пользуясь результатами теории лучевого давления Шварцшильда — Никольсона, определяются диаметры частиц близ различных звездных „моделей“, при построении которых приняты во внимание новейшие работы (Saha, Wilsing, применения интерферометра и т. д.). Оказывается, в окрестностях особенно „горячих“ звезд (*O*, *B*) и около желтых и красных гигантов могут находиться в статическом состоянии только крупные частицы, радиусы которых между 1 — и 0.1 см, очень мелкая пыль может быть только около карликов (порядка 1 — 0.1 микрона). Последняя будет отбрасываться от звезд *O*, *B*: *G* гиг., *M* гиг. с силой прево-

сходящей их тяготения в десятки тысяч раз. Применение интеграла живых сил приводит к выводу, что подобная частица может сравнительно скоро приобрести скорость порядка $1000 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Этот результат объясняет огромные положительные скорости спиральных туманностей, если понимать под ними скопления космической пыли (Reynolds, Lindemann); отрицательный результат Ресселя (Russell) объясняется тем, что он рассматривал суммарное лучевое отталкивание галактических звезд, среди которых много карликов. Отношение тяготения к световому давлению звезды не зависит от расстояния частицы; если же учитывать взаимодействия частиц — равновесие может быть достигнуто только на вполне определенном расстоянии от звезды, зависящем только от величин, характеризующих собой звезду. Предполагая частицы идеальными абсорборами, можно вычислить радиус сферического слоя пыли; оказывается для О, В, G гиг. и М гиг. он равен 0.1—0.05 световых лета (для идеальных рефлекторов, и частиц с данным коэффициентом и отражения он немного меньше).

Полученные значения радиусов сферических слоев космической пыли около звезд различных классов применены мною к определению параллаксов небольших туманностей с непрерывным спектром, которые могут считаться статическими формами. Оказывается для тех из них, которые „окутывают“ звезды класса В, π лежит между 0."016 и 0."013 (для различных групп) — в достаточном согласии со средними параллаксами Каптейва. Зная абсолютные величины „нормальных“ гелиевых звезд и ядер вышеуказанных туманностей, можно определить ослабление света звезды, при прохождении его через такую туманность; оказывается, последние ослабляют радиацию на 9^m.2—5^m.0 (в зависимости от спектра), величина большая, но меньшая, чем ослабление яркости ядер планетарных туманностей.

В конце делается попытка объяснить, почему ядрами туманностей с эмиссионными спектрами являются только звезды класса О, но не В. Если сводить свечение туманностей с эмиссионными спектрами к результату фотоэффекта под действием радиации звезды, соотношение квантовой теории дает для фотозелектрического потенциала радиации звезд класса О величину в 13.2 вольт, а для группы В₂ — 6.0 вольт. Первый совершенно достаточночен для возбуждения значительной части Бальмеровой серии, второй не в состоянии возбудить даже Н_α (для чего требуется напряжение в 12 вольт).

ON THE COSMICAL DUST NEAR THE STARS.

B. P. Gerasimovič.

The question about the cosmical dust has acquired in the present time a special interest. The newest researches about the spiral nebulosities allow us to suppose in them an enormous condensation of cosmical dust, repulsed by the radiation pressure of galactic stars towards the poles of our star-system. In connection with it is emerged the question, if the radiative repulsion could develop thus enormous velocities, with which the spirals recede from the galactic plane.

Hubble's researches have considerably contributed to elucidate the importance of the cosmical dust: they demonstrated, that the diffus galactic nebulosities are intimately united with the stars, involved by them and which illuminate them. Nebulosities with continuous spectra seem to be condensations of particles able to reflect the radiation, falling on them. They involve stars of different spectral classes: most frequently it is the class *B*, but occur also giants and dwarfs of the "late" types. It is very characteristic, that among these stars there is no stars of the class *O*, which form commonly the nucleus of nebulosities with an emission spectrum. It must be added, that diffus nebulosities with continuous spectra belong evidently to the same "local system" to which belong the helium stars; but nebulosities with emission spectra have on the contrary a plane of condensation, coinciding with the galactic one.

Let us consider a star in the cloud of cosmical dust enveloping it, and investigate the forces which are acting on the late, supposing, that the whole system is in equilibrium. Following forces will be acting on each dust particle:

- 1) the attraction of the star, W
- 2) its radiative repulsion, D
- 3) the attractive of the whole cloud
- 4) its radiative repulsion.

We will investigate the forces (1) and (2), i. e. will consider the particle as a single one. In the case of equilibrium it must be $\frac{D}{W} = 1$. Let S be the density of energy at the distance r from the star of radius R , of the mass M .

and of the effective temperature T_0 . Let the particle's radius, its mass and density be correspondingly a , m and δ . Evidently:

$$\frac{D}{W} = V \frac{S \pi a^2}{W},$$

where $V = \frac{D}{S \pi a^2}$ is an auxiliary quantity, playing a special part in the theory of radiation pressure (Schwarzschild-Nickolson). If c is velocity of the light, α — the constant of Stephan's law, then

$$S = \frac{\alpha T_0^4 R^2}{c r^3}$$

and

$$\frac{D}{W} = V \frac{3 \alpha}{4 c k^2} \cdot \frac{T_0^4 R^2}{a M \delta},$$

where k^2 is the gravitation constant.

Let us suppose the radiation as monochromatic. The corresponding wave-length will be defined with the help of Wien's law

$$\lambda T_0 = 2900 \cdot 10^{-4} \text{ where } \lambda \text{ is expressed in cm.}$$

Supposing $a = n \lambda$ and applying the law of Wien, we arrive to the formula:

$$\frac{D}{W} = A \cdot \frac{V}{n}, \quad \text{if} \quad A = \frac{3 \alpha R^2 T_0^4 \cdot 10^3}{4 c k^2 M \delta \cdot 29}$$

We suppose that the particle is so far distant from the star, that the electromagnetic wave may be considered as a plane. In this case the curve $V = V(n)$ has a maximum. This maximum for ideal reflectors corresponds to a diameter equal to $\frac{1}{3} \lambda$, if $V = 2.5$. For a sufficiently small the formula

$$\frac{D}{S} = \frac{224}{3} \frac{\pi^5}{\lambda^5} \frac{a^6}{k^4}$$

and for a sufficiently great ones —

$$\frac{D}{S} = \pi a^2$$

the last formula is also applicable to ideal absorbers¹⁾.

Applying the mentioned formulae and the results of the theory Schwarzschild-Nickolson, we can find the radius of the particles held in equilibrium near the stars of different classes, if we use certain "star-models" as ground for our calculations.

For stars of the classes $O-B$ we admit, according to the researches of Wilsing²⁾ $R = 10 R_\odot$ and according to the statistical data $M = 5$.

¹⁾ Schwarzschild ("Münch. Berichte" 1901) or Nickolson (M. N.)

²⁾ Public. Observ. Potsdam, N. 76 ($M = 8 \cdot 6 M_\odot$).

For dwarfs $A - G$ we can admit $R = R_{\odot}$ and $M = 1$. For giants M and G , according to interferential determinations, $R = 200 R_{\odot}$ and, according to Russel $M = 3$. The temperatures are adopted according to the Saha's scalae¹⁾). If we adopt δ — the particle density = 5, i. e. approximately the earth density, we obtain the following list of effective λ , T and A .

In our case it must be $\frac{V}{n} A = 1$.

<i>Sp.</i>	$\lambda_{max.}$	T	$A \cdot 10^{-4}$
<i>Pe</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 09	30000°	1.8
<i>O_b</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 13	22000°	0.4 <i>H</i> completely ionised
<i>B₀</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 16	18000°	0.2
<i>B₂</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 17	17000°	0.1 Max. absorption of <i>He</i> lines
<i>B₈</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 21	14000°	0.04 <i>Ca</i> completely ionised
<i>A₀</i>	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 24	12000°	0.001 Appearance of <i>He</i> lines
<i>G</i> dwarfs	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 42	7000°	0.00006
<i>G</i> giants	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 42	7000°	0.9
<i>M</i> giants	0 $\frac{\mu}{\text{s}}$ 58	5000°	0.2

In Nickolson's table, made for the region of Schwarzschild's maximum, n appears as argument, changing from $n = 0.08$ to $n = 0.48$, $\frac{V}{n}$ changes from 3.64 to 2.75, passing through the maximum, equal to 15.89 at $n = 0.18$. The value obtained above demonstrates clearly, that an equilibrium near the maximum of V is possible only for the dwarf stars, in all other groups V lies very far from its maximum. It means, that there will be two values of a , for which the equilibrium is possible: one for a relatively great ones, and another to the extremely small ones. For the latter, according to the abovesaid formula, we obtain easily:

$$a = n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{224 A \zeta^4}} \lambda = 0.05 A^{-\frac{1}{4}} \lambda.$$

The calculation gives the value of a for different classes from 10^{-8} cm. to 10^{-7} cm. These particles will not be however those, which we think. They will be of atomical order.

Really the radius of the first Bohr's circle for the hydrogen is $0.5 \cdot 10^{-8}$ cm.

Thus those „small particles“ will be isolated atoms and their layer will be a gaz-layer, and therefore we will not consider it.

For great particles (for ideal absorbers and ideal reflectors) according to the abovesaid formula

$$V = 1 \quad \text{and} \quad a = A \lambda$$

¹⁾ Proceed. Royal Society A. Vol. 99.

we obtain the following values of a :

P_e	0.16 cm.	B_8	0.01 cm.
Ob	0.05 cm.	G_0 giant	0.4 cm.
B_0	0.03 cm.	Md giant	0.1 cm.

The dust, the particles of which are greater than the abovesaid dimensions, will have an acceleration towards the centre of corresponding stars, the smaller particles will be repelled and shall obtain the equilibrium only near the dwarf stars (for the Sun the corresponding $a = 0.15$ for $\delta = 1$). If we suppose that the clouds of cosmical dust are dynamical phenomena and that every particle has a certain relative velocity directed to the centre, the abovesaid values of a will appear as the inferior limit of the radius, because here to the radiation pressure is added the corresponding component of inertial force.

Thus we obtain the following result. Diffuse nebulosities with continuous spectra are formed by sufficiently big particles; the smaller dust must be repulsed from the great number of stars. Then emerges the question, if a similiar repulsion can explain the enormous velocities of spirals. Not long ago Russel analysed this question, considering the summary attraction and repulsion of the whole system of galactic stars and obtained a negative result. But this question will appear in a different aspect, if we analyse not the summary repulsion, but the repulsion from single peculiarly hot stars or giants. Let us consider a particle, the diameter of which corresponds to the maximum of V . ($V = 15.9$ at $n = 0.18$). For the adopted model of class B_2 the corresponding particle (ideal reflector) will have the radius $a = 0.03 \mu$ and the ratio of repulsion to attraction will be equal to 1.6×10^4 . If in the initial moment the particle was without initial velocity at the distance r_0 from the centre, applying the integral of energy, we obtain for the velocity at the distance r : $v^2 = 2\beta \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$, where $\beta = 1.6 \cdot 10^4 k^2$.

In order to value the order of the acquired velocity, let us suppose, that $r_0 = 100 R$. Then at the distance r , considerably greater, than r_0 , we will obtain approximately: $v \sim 5400$ km/sec. The exemple adduced is very drastic. In reality by the radiation pressure will be repulsed particles of various dimensions with various values of V , i. e. of β . If for instance $a = 0.08 \mu$, v will be nearly 2000 km/sec. Thus the velocity, acquired by the average particle will be of the order of the velocities of spirals. The motion of the particle will depend also on the summary attraction of the star-system and on the forces developed at encounters with single stars. In Kapteyn's Universum the summary attraction for the central layer is equal to the attraction of 33.2 solar stars, being at the distance of 1 par sec¹);

¹) Kapteyn. An attempt etc. Aph. J. Vol. 55.

a force evidently very small in comparison with the calculated repulsion. More considerable are the changes of velocity at the encounters. The average star-density in the central layer of Kapteyn's Universum is 0.0358 for 1 parssec³. Thus even before entering in the zone of action of the nearest star, the particle will have time to acquire a considerable velocity. Consequently the action of the encounter will be comparatively small, because it is inversely proportional to the relative velocity. It would be of great interest to calculate the acquired velocity reckoning the mentioned actions. But the initial conditions of this problem are too confused as to deserve a research. It is only evident—the acquired velocity will be anyhow comparable with the velocities of spirals. In accordance with it is the fact, noticed by Reynolds¹⁾, that the spirals "avoid" the regions of density maximum of star clusters; it is explained by the great number of giants in the latter.

As the ratio D/W does not depend on r , the particle of a determined radius will be in equilibrium in every distance from the star, if, certainly, there is no absorbing mass between it and the star. But if we are dealing with many particles, the equilibrium of them will be obtained—speaking in generally—only at a determined distance in that region, where the mutual action of our particles is zero.

It is not difficult to calculate this distance. Let I be the radiation-intensity of the surface unity of the particle, S —radiation intensity of the star at the distance r . We suppose the particle of the radius a as a perfect absorber. It receives from the star in the unity of time the energy— $S\pi a^2$, but radiate— $4a^2\pi I$; because of the stationary character of the process it must be

$$I = \alpha \theta^4 = S/4$$

where θ —is the proper temperature of the particle. The tutual gravitation of two equal particles of mass m is evidently

$$k^2 m^2/d^2$$

where d —the distance between them. The light repulsion:

$$\frac{I\pi a^4}{c d^2}$$

If the equilibrium occurs, then equating the relation of these two forces to unity and substituting the abovegiven value S , we find for the unknown distance— r —of particles from star the formula:

$$r^2 = \frac{9\alpha^2 R^2 T_0^4}{64ck^2\pi a^2\delta^2}.$$

¹⁾ M. N. Vol. 83.

Substituting here the above obtained value a for the particle which is in equilibrium under the action of forces (1) and (2), we obtain finally:

$$r = \sqrt{\frac{ck^2}{4\pi a}} \cdot \frac{M}{T_0^2 R},$$

a value, which depends only on the quantities characterising the star.

Calculating r for the above adopted star-models, we find

Sp. cl.	r
O	3.6×10^{16} cm. = 0.04 light-year
B_2	11.5×10^{16} cm. = 0.12 "
B_8	15.8×10^{16} cm. = 0.16 "
G dwarf	111.10^{16} cm. = 1 "
G giant	18.10^{16} cm. = 0.20 "
M giant	3.10^6 cm. = 0.03 "

At such great distances the particles will have very low temperatures. For instance for a particle near the star of class O , t is of order 100° Abs. The wave length of proper radiation of such a particle will be of order 30μ . Because we supposed calculating r , that the particle appears as a perfect absorber, we will not be able to notice this radiation, corresponding to the extreme infra red part of spectrum—we will have a dark nebulosity.

Our results will be a little altered when applyied to perfect or partial reflectors. For perfect reflectors the mutual repulsion will be a little different: viz. as it is easy to understand from geometrical considerations, it will be less, than the repulsion from perfect absorbers in the ratio $\frac{2a}{\pi} : 1$, where $a = \text{arc cos } d/2r$; the average value of this angle is $\pi/4$. For particles with the reflection coefficient μ , this relation will be $(1 + \mu) \frac{2a}{\pi}$. Thus our result for r must be in both cases divided by $\sqrt{2}$ and $\sqrt{4/\mu(\mu + 1)}$. On the other hand the particle must have a certain transparency. It is proved by the anomaly colours of stars, enveloped by cosmical dust, which can not be explained by the diffusion by the particles small in comparison to the wavelength. If the absorbing power of the particle (fonction of λ) is γ_1 our result for r must be multiplied by $\sqrt{\gamma_1}$.

If the observed diffusive nebulosities with continous spectra were really equilibrium figures of cloud of cosmical dust, the notion of the angular radius of the nebulosity and of the spectrum of the involved star would allow us to determine their parallaxes. At the first glance the observation seems not to confirm it. According to the statical theory the radius of the cloud must be inversely proportional to the square root from the absolute brightness of the central star. Meanwhile, according to Hubble's demonstration, the angular radii of the nebulosity (a) are united with the apparent magnitude of the central stars (m) by the relation: $m + 5 \log a = \text{Const}$, proving that the radius is directly proportional to the square root from the absolute brightness. It must be noticed, that Hubble's results are valid for small ones

and for gigantic nebulosities. There is no doubt, that gigantic nebulosities are mechanically independent from the star, which illuminated them. Such a nebulosity as „N. America“ spread (according Lundmark) for 7 parseks, can not be submitted to considerable mechanical influence even from such a supergiant as α Cygni. To those our results can not be applyed. Nevertheless it is not difficult to notice, that diffuse nebulosities, with few exceptions (in Hubble's list) are sharply divided in two groups: with small angular radius (till 6'—7') and gigantic ones (in some tens of minutes). The applying of statical theory to the former seems not to be hopeless. According to Hubble's diagrams they are far less submitted to the relation, discovered by him; another cause will be of great support to above mentioned relation, namely — the more bright absolutely is the star, the more quantity of dust it will be able to sustain and the absorption of its radiation should be more great; consequently the cloud of dust will be comparatively fainter and with less raius.

It is to regret, that the observed radius depends on the conditions of observations. Even reducing them to the same exposure upon the same instrument, as it does Hubble, we will not obtain individual radii. Moreover, we do not know whether reflective nor absorption faculty of the particles.

The whole does not allow us to obtain individual parallaxes, but only the average ones for stars of various subdivisions. I used for them the data of Hubble. In the order of columns are confronted the numbers of nebulosities, the average apparent star brightness, the average ang. radius, the average parallax and absolute magnitude of central.

Sp. class	n	m	a'	π	M
$B_0 - B_4$	9	10.3	2'.0	0"016	+ 6 ^m 2
$B_2 - B_3$	22	9.7	2'.2	0"016	+ 5 ^m 2
$B_4 - B_5$	5	9.7	2'.3	0"014	+ 5 ^m 7
$B_8 - B_9$	6	9.6	2'.2	0"013	+ 5 ^m 0

The obtained π are in generally near to the average π of „normal“ stars of corresponding groups. For instance Karteyn ¹⁾ obtains for south helium stars of $B_0 - B_2$ groups π between 0"010 and 0"012. Our research is dealing with perfect absorbers: to obtain π for perfect reflectors we must multiply the obtained π with $\sqrt{2}$. Thus the results of our research are very encouraging. We must notice that gigantic nebulosites are far more distant from us. Lundmark ²⁾ obtains their π between 0"001 and 0"0001.

We can go farther and find absorption in cosmical clouds: it is enough to confront the absolute magnitudes of „normal“ helium stars with those obtained above. We will use for it the spectroscopical determinations of

¹⁾ Aph. J. XL.

²⁾ P. A. S. P. II 1922.

Adams¹⁾ (adopting the average of his determinations for stars with sharp and diffuse lines), reducing them to photographic scale, by color-indices according to Pickering²⁾.

Sp. class	M neb. star	M normal star	ΔM
$B_0 - B_1$	+ 6 m 2	- 3 m 0	9 m 2
$B_2 - B_3$	+ 5 m 2	- 1 m 7	6 m 9
$B_4 - B_5$	+ 5 m 7	- 0 m 9	6 m 6
$B_8 - B_9$	+ 5 m 0	0 m 0	5 m 0

Such a considerable absorption must not astonish us: the absorption of nuclear light by the planetary is considerably greater; the comparison of the absolute magnitude of nuclei found by v. Maanen (+ 9 m 1) with the abs. magn.³⁾ of „normal“ O stars, gives for the absorption an enormous value $\Delta m = 15m$ 6.

It is necessary to consider one question more. The observations do not discover between the stars enveloped by cosmical dust even a single star of class O and, on the contrary, the nuclei of emission-nebulosities are all „hotter“, than B_2 . It is somewhat difficult to explain the first case. Perhaps it is a consequence of photo-effect. The intense radiation of the stars of type O, (the maximum near $\lambda = 0\mu 13$) strikes out of the big dust particles (of the order 1 — 0.1 cm) electrons, loading them positively. It must create a considerable impuls towards the dispersion of the cloud. It is not difficult to explain the absence of stars older than B_2 between the nuclei of emission nebulosities, adopting the quantum-theory. We will reckon the ionising action of star radiation on the atom, which is far enough from it. According to the well known relation of Einstein, we can write

$$hv = eV$$

where v — is wave number of monochromatic radiation, h — Planck's „quantum of action“, e — electron's charge, V — measure the ionising radiation's faculty. Adopting for the star Wolf-Rayet $\lambda_{max} + 0\mu 09$, and for B_8 $\lambda_{max} = 0^m 21$ we find V for the radiation of two stars correspondingly 13.2×10^8 and 6.10^8 el. magn. in i. e. 13.2 and 6.0 volts. The first value of V is quite sufficient for exciting the chief lines of Balmer serie (if we suppose, that neutral hydrogen is monoatomic), but the second V will not be able to excite even the appearance of $H\alpha$, for which the corresponding $V = 12.03$ volts.

In consequence of very serious data, of which I will speak in another paper, I am not inclined to think, that the shining of emission nebulosities

¹⁾ Aph. J. June 1923.

²⁾ Harv. An. 80.

may be explained exclusively by primary or secondary photo-effects. But certainly the late have a considerable part, which it has not in the gas-layer, enveloping the colder stars.

Summary of results.

I. The radiation and the gravitation of stars of classes *O*, *B* and of giants *G* and *M* can retain in equilibrium only the sufficiently big cosmical dust.

II. The smaller cosmical dust will be repulsed by the radiation pressure and on a comparatively small distance it can acquire the velocity of the order of velocities of spirals.

III. The spherical dust layer in the case of equilibrium must be in a completely determined distance from the central star. This distance is calculated for different „stars-models“, supposing, that the particles are perfect absorbers or reflectors.

IV. Small diffuse nebulosities with continuous spectra seem to represent statical forms. Applying the theoretical formula for the radius, we obtain the π of the nebulosities enveloping various groups of *B* stars. The results are quite in accordance with the π of „normal“ *B* stars.

V. The absolute magnitudes of the nuclei are obtained which allow to determine the absorption in the nebulosities. It is $6^m - 5^m$, a very great value, but smaller, than the absorption in the planetary.

VI. An attempt is made to explain, why the „latter“ helium stars do not appear as nuclei of emission nebulosities.

1923. XII.

Kharkow.

Astronomical Observatory.

О КОСМИЧЕСКОЙ ПЫЛИ В ОКРЕСТНОСТИХ ЗВЕЗД.

Б. П. Герасимович.

РЕЗЮМЕ.

В настоящей работе исследуются условия равновесия космической пыли в окрестностях звезд различных спектральных классов под влиянием тяготения и лучевого давления звезды и аналогичных сил взаимодействия частиц. Пользуясь результатами теории лучевого давления Шварцшильда — Никольсона, определяются диаметры частиц близ различных звездных „моделей“, при построении которых приняты во внимание новейшие работы (Saha, Wilsing, применения интерферометра и т. д.). Оказывается, в окрестностях особенно „горячих“ звезд (*O*, *B*) и около желтых и красных гигантов могут находиться в статическом состоянии только крупные частицы, радиусы которых между 1 — и 0.1 см, очень мелкая пыль может быть только около карликов (порядка 1 — 0.1 микрона). Последняя будет отбрасываться от звезд *O*, *B*: *G* гиг., *M* гиг. с силой прево-

сходящей их тяготения в десятки тысяч раз. Применение интеграла живых сил приводит к выводу, что подобная частица может сравнительно скоро приобрести скорость порядка $1000 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Этот результат объясняет огромные положительные скорости спиральных туманностей, если понимать под ними скопления космической пыли (Reynolds, Lindemann); отрицательный результат Ресселя (Russell) объясняется тем, что он рассматривал суммарное лучевое отталкивание галактических звезд, среди которых много карликов. Отношение тяготения к световому давлению звезды не зависит от расстояния частицы; если же учитывать взаимодействия частиц — равновесие может быть достигнуто только на вполне определенном расстоянии от звезды, зависящем только от величин, характеризующих собой звезду. Предполагая частицы идеальными абсорборами, можно вычислить радиус сферического слоя пыли; оказывается для О, В, G гиг. и М гиг. он равен 0.1—0.05 световых лета (для идеальных рефлекторов, и частиц с данным коэффициентом и отражения он немного меньше).

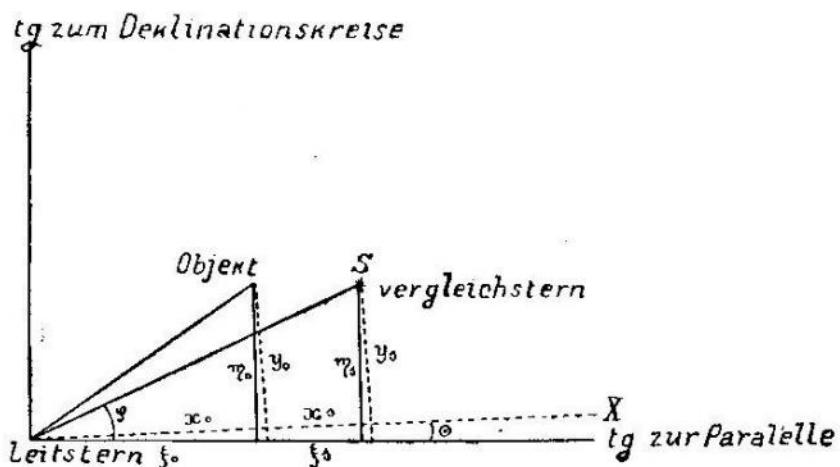
Полученные значения радиусов сферических слоев космической пыли около звезд различных классов применены мною к определению параллаксов небольших туманностей с непрерывным спектром, которые могут считаться статическими формами. Оказывается для тех из них, которые „окутывают“ звезды класса В, π лежит между 0."016 и 0."013 (для различных групп) — в достаточном согласии со средними параллаксами Каптейва. Зная абсолютные величины „нормальных“ гелиевых звезд и ядер вышеуказанных туманностей, можно определить ослабление света звезды, при прохождении его через такую туманность; оказывается, последние ослабляют радиацию на 9^m.2—5^m.0 (в зависимости от спектра), величина большая, но меньшая, чем ослабление яркости ядер планетарных туманностей.

В конце делается попытка объяснить, почему ядрами туманностей с эмиссионными спектрами являются только звезды класса О, но не В. Если сводить свечение туманностей с эмиссионными спектрами к результату фотоэффекта под действием радиации звезды, соотношение квантовой теории дает для фотозелектрического потенциала радиации звезд класса О величину в 13.2 вольт, а для группы В₂ — 6.0 вольт. Первый совершенно достаточночен для возбуждения значительной части Бальмеровой серии, второй не в состоянии возбудить даже Н_α (для чего требуется напряжение в 12 вольт).

ÜBER EINE INTERPOLATIONSMETHODE FÜR PHOTOGRAPHISCHE HIMMELSAUFNAHMEN.

Von M. Hrabák.

Im vorliegenden Absatze wollen wir auf gewisse Relationen hinweisen, die direkt von den Turner'schen Gleichungen für ideale Koordinaten eines Sternes auf einer Himmelsaufnahme abgeleitet werden und nach kurzer Rechnung gute Resultate liefern können, ohne von allen Voraussetzungen,



wie z. B. Lage in Mitte der Platte und die Polnähe unabhängig sind.

Für den Vergleichstern S und für das Objekt O , kann man folgende Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} \xi_s &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha_s - \alpha_l) \sin N_s}{\sin(\delta_l + N_s)} & \xi_0 &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_l) \sin N_0}{\sin(\delta_l + N_0)} \\ \tau_s &= \operatorname{cotg}(\delta_l + N_s) & \tau_0 &= \operatorname{cotg}(\delta_l + N_0) \\ \operatorname{tg} N_s &= \operatorname{cotg} \delta_s \cos(\alpha_s - \alpha_l) & \operatorname{tg} N_0 &= \operatorname{cotg} \delta_0 \cos(\alpha_0 - \alpha_l) \end{aligned} \quad (1)$$

und für Radiusvektor:

$$\begin{aligned} r_s^2 &= P(\xi_s^2 + \tau_s^2) = x_s^2 + y_s^2 \\ r_0^2 &= P(\xi_0^2 + \tau_0^2) = x_0^2 + y_0^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Wo P die Korrektion für das Maassstab bedeuten.

Von den Gleichungen sieht man, dass das Quotient $\frac{r_s^2}{r_0^2}$ von allen Fehlern, wie die Neigung der gemessenen Koordinaten zu den Idealen und von der Maassstabkorrektion unabhängig ist.

Also die Gleichungen (2) stellen sich folgenderweise vor

$$\frac{\sin^2(\delta_l + N_s)(x_s^2 + y_s^2)}{\sin^2(\delta_l + N_0)(x_0^2 + y_0^2)} = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_s - \alpha_l) \sin^2 N_s + \cos^2(\delta_l + N_s)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_0 - \alpha_l) \sin^2 N_0 + \cos^2(\delta_l + N_0)} \quad (3)$$

Soll man aus der Gleichung (3) $\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_l)$ bekommen, muss man die Grösse N_0 bestimmen.

Dazu bestimmt man zuerst die Neigung der gemessenen Koordinaten zu den Idealen. Das ist der Winkel $= \Theta$ (Fig. 1) welchen man aus folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta_s}{\xi_s}, \quad \operatorname{tg}(\varphi - \Theta) = \frac{Y_s}{y_s} \quad (4)$$

Wenn wir die gemessene Koordinaten y_0 und y_s für die Neigung korrigieren, bekommen wir die Koordinaten, die nur mit dem Maassstabfaktor behaftet sind, aber deren Quotient von der Maassstabskorrektion frei ist:

$$\frac{\bar{Y}_0}{y_s} = \frac{y_0 \cos \Theta + x_0 \sin \Theta}{y_s \cos \Theta + x_s \sin \Theta} \quad \frac{\bar{y}_0}{y_s} = \frac{\eta_0}{\eta_s} = \frac{\operatorname{cotg}(\delta_l + N_0)}{\operatorname{cotg}(\delta_l + N_s)} \quad (5)$$

Die Gleichung (5) gibt direkt die Grösse oder N_0 welche in (3) eingesetzt, die Grösse $\operatorname{tg}(\alpha_0 - \alpha_l)$ bestimmt, und aus (1) die Deklination des Objektes bestimmen lässt.

Planet (139) Hertha photographiert und ausgemessen auf der Moskauer Sternwarte am 28 November 1921 durch Herrn Kasansky,

Leitstern

$a_l = 3^h 23^m 49^s.254$	Vergleichstern $\frac{x_s}{\delta_s}$	Objekt
$\delta_l + 22^h 32' 1''.98$		
$x_l = 0$	$x_s = 21^{mm}.3158$	$x_0 = 15^m.7010$
$y_l = 0$	$y_s = 4.^{mm}.2594$	$y_0 = 3.^{mm}.9596$
$\xi_l = 0$	$\frac{\xi_s}{\sin 1'} = 89.469$	
$\eta_l = 0$	$\frac{\eta_s}{\sin 1'} = 18.6809$	
$\eta_s = [1.271398]$	$y_s = [0.629348]$	$\varphi = 11^h 50' 6.''7$
$\xi_s = [1.950107]$	$x_s = [1.328702]$	$\varphi - \Theta = 11^h 18' 0.''7$
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta_s}{\xi_s} = [9.321291]$	$\operatorname{tg}(\varphi - \Theta) = [9.300646]$	$\Theta = 0^h 32' 6.''0$
	$y_0 = + 3.9596$	
	$\frac{1466}{y_0} = 15.7010 \times \sin 0^h 32' 6.''0$	
	$\bar{y}_0 = 4.1062$	
	$y_s = 4.2594$	
	$\frac{1990}{y_s} = 21.3158 \times \sin 0^h 32' 6.''0$	
	$\bar{y}_s = 4.4584$	
	$\frac{y_0}{y_s} = \frac{[0.613440]}{[0.649179]} = \frac{\eta_0}{(7.735123)}$	
	$\eta_s = [7.699388] = \operatorname{cotg}(N_0 + \delta_l) = 89^h 42' 47.''7$	
	$\frac{\delta_l}{N_0} = \frac{22 32 1.9}{67^h 10' 45.''8}$	

$$\begin{aligned}
 r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 = 262.1908 \\
 r_s^2 &= x_s^2 + y_s^2 = 472.5066 \\
 \frac{\sin^2 89^\circ 42' 47''.7 \times 262.1998}{\sin^2 89^\circ 41' 19''.2 \times 472.5066} &= \frac{\tg^2(\alpha_0 - \alpha_2) \sin^2(67^\circ 10' 45''.8) + \cos^2(89^\circ 42' 47''.7)}{\tg^2(1^\circ 36' 42''.5) \sin^2(67^\circ 9' 13.9) + \cos^2(89^\circ 42' 19''.2)} \\
 \tg^2(\alpha_0 - \alpha_1) &= 6,632600 \\
 \tg(\alpha_0 - \alpha_1) &= 8,316300 = \tg 1^\circ 11' 12''.4 = \tg 4^m 44^s.82 \\
 \alpha_1 &= 3^h 23^m 49^s.25 \\
 AR_0 &= 3^h 28^m 34^s.07 \\
 \delta_0 &= 22^\circ 48' 58''.3
 \end{aligned}$$

Herr Kasanky hat nach der Turnerschen Methode aus 6 Vergleichssternen bekommen.

$$\begin{array}{r}
 AR_0 = 3^h 28^m 34.111 \\
 \delta_0 = 22^\circ 48' 57''.61
 \end{array}$$

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ОБРАБОТКИ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ СНИМКОВ.

M. K. Грабак.

РЕЗЮМЕ.

В настоящей работе дан метод, помощью которого возможно определить положение неизвестного предмета на фотографической пластинке, если известно положение ведущей (центральной) звезды и также положение близкой звезды сравнения и измерены прямоугольные координаты звезды сравнения и неизвестного предмета относительно центральной звезды, при чем формулы действительны как для любого склонения, так и для любого места на пластинке с точностью, с которой известно положение звезд в каталоге.

ÜBER EINE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER KONSTANTEN AUF DEN HIMMELSAUFGNAHMEN.

Von *M. Hrabák*.

In folgender Arbeit stellen wir uns die Aufgabe, Formeln für die Bestimmung der Konstanten der Himmelsaufnahmen herzustellen, die mit der Schärfe den anderen Methoden nicht zurücktreten, und nicht die Zeit raubende doppelte Lösung mit der Methode der kleinsten Quadrate voraussetzen.

Man hat schon andere Methoden vorgeschlagen, die aber nur in speziellen Fällen und mit gewisser Genauigkeit brauchbar sind.

Für das Koordinatensystem nehmen wir, wie es üblich ist, für die y Achse die Projektion des Deklinationskreises auf die Platte, für die x Achse die Tangente zum Parallelkreise, der durch die Projektion des optischen Zentrums des Objektives geht. Die Abbildung des optischen Zentrum auf der Platte soll beinahe mit der Abbildung des Leitsternes zusammenfallen.

Ist A die Abbildung des Anhaltsternes auf der Himmelsaufnahme, und D die Entfernung \overline{OA} , $\varnothing q = \varnothing$ Nordpol, 0 , Anhaltstern, dann die idealen Koordinaten x, y stehen mit den Grössen D und q in folgender Relation:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} D \sin q = x = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) \sin N}{\sin(\delta_0 + N)} \\ \operatorname{tg} D \cos q = \gamma = \operatorname{cotg}(\delta_0 + N) \\ \operatorname{tg} N = \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0) \end{array} \right\} \quad (1)$$

Dabei bei der Berechnung der idealen Koordinaten X, Y können wir von den Katalogwerten α, δ Gebrauch machen, da die kleinen Korrekturen die von der Präcession und Aberration herkommen, sich mit Koeffizienten für Maasstab und Achsenneigung Korrektion vereinigen und mit diesen zusammen in Betracht genommen werden können¹⁾.

Die differenzielle Refraction ist, wie man auch bei den anderen Methoden gezwungen wird, nach den bekannten Formeln zu rechnen und mit den gemessenen Koordinaten x, y zu vereinigen.

Dann stehen die gemessenen Koordinaten zu den Idealen für jeden Anhaltstern in folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} p x_i + r y_i + k + x_i - X_i = \Theta & x_i - X_i = n_i \\ p y_i - r x_i + c + y_i - Y_i = 0 & y_i - Y_i = n'_i \end{array} \quad (2)$$

¹⁾ Kapteyn: Exposé de la Méthode parallactique. Bulletin de la Carte du Ciel, V. I. p. (150—6).

und wenn wir i Anhaltsterne voraussetzen, so bekommen wir folgende Normalgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} p[x^2] + r[xy] + k[x] + [n]x = 0 \\ p[xy] + r[y^2] + k[y] + [n]y = 0 \\ p[x] + r[y] + ik + [n] = 0 \end{array} \right\} \text{für } \alpha \quad (3)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} p[y^2] - r[xy] + c[y] + [n'y] = 0 \\ p[xy] - r[x^2] + c[x] + [n'x] = 0 \\ p[y] - r[x] + ic + [n'] = 0 \end{array} \right\} \text{für } \delta$$

Da die Lösung der Normalgleichungen sehr zeitraubend ist, so legen wir eine andere Methode zu der Bestimmung der Unbekannten p, r, k, c vor.

Bestimmung der Konstanten c, k .

Diese Konstanten lassen sich leicht durch die Unbekannten p und r aus der dritten Normalgleichung (3) bestimmen

$$k = -\frac{1}{2} \left\{ p[x] + r[y] + [n] \right\} \quad (2)$$

$$c = -\frac{1}{2} \left\{ p[y] - r[x] + [n'] \right\} \quad (3)$$

Bestimmung der Korrektion für den Maasstab p .

Um die Rechung zu vereinfachen, setzen wir für

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{[X]}{i} + \xi_i & Y_i &= \frac{[Y]}{i} + \eta_i \\ x_i &= \frac{[x]}{i} + a_i & y_i &= \frac{[y]}{i} + b_i \end{aligned} \quad (4)$$

so das $[\xi] = [\eta] = [a] = [b] = 0$

Mit diesen Werten in die Gleichungen (2) eingegangen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} p \left\{ \frac{[x]}{i} + a_i \right\} + r \left\{ \frac{[y]}{i} + b_i \right\} - p \frac{[x]}{i} - r \frac{[y]}{i} - \frac{[n]}{i} + \frac{[x]}{i} + a_i - \frac{[X]}{i} - \xi_i &= 0 \\ p \left\{ \frac{[y]}{i} + b_i \right\} - r \left\{ \frac{[x]}{i} + a_i \right\} - p \frac{[y]}{i} + r \frac{[x]}{i} - \frac{[n']}{i} + \frac{[y]}{i} + b_i - \frac{[Y]}{i} - \eta_i &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

und wenn manachtet dass

$$\begin{aligned} [n'] &= [x] - [X] \\ [n] &= [y] - [Y] \end{aligned} \quad (6)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} pa_i + rb_i + a_i &= \xi_i \\ pb_i - ra_i + b_i &= \eta_i \end{aligned} \quad (7)$$

durch Quadrieren, wenn die Glieder zweiter Ordnung ausgelassen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} \xi_i^2 &= a_i^2 + 2a_i^2 + 2ra_i b_i \\ \eta_i^2 &= b_i^2 + 2b_i^2 - 2ra_i b_i \end{aligned} \quad (8)$$

Stellen wir die Summe

$$a_i^2 + b_i^2 = S_i^2 \text{ und } \xi_i^2 + \eta_i^2 = \Sigma_i^2 \quad (9)$$

und nach der Bildung solcher Ausdrücke für jeden Stern und durch das Summieren über alle Anhaltsterne gilt:

$$\begin{aligned} \Sigma_i^2 &= S_i^2 + 2pS_i^2 \\ p &= \frac{[\Sigma^2] - [S^2]}{2[S^2]} \end{aligned} \quad (10)$$

Bestimmung der Korrektion für die Neigung r .

Für jeden Anhaltstern $\text{tg} \Pi = \frac{Y}{X}$ Anhaltstern, Leitstern (Plattenmitte) und Y Achse $= \frac{X_1}{Y_1}$; wegen der Neigung der angenommenen Koordinatensystem x, y zu den idealen Koordinaten X, Y , muss man eine kleine Korrektion r hinzufügen. Wenn wir $\frac{x}{y} = \text{tg} \pi$ bezeichnen, dann stehen die gemessenen Koordinaten zu den Idealen in folgender Relation.

$$\begin{aligned}\text{tg}(\pi + r) &= \text{tg} \Pi \text{ und wegen der Kleinheit von } r \\ \text{tg} \pi + r(1 + \text{tg}^2 \pi) &= \text{tg} \Pi \\ \frac{x}{y} + r\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) &= \frac{X}{Y}\end{aligned}\quad (11)$$

und wenn wir alle Anhaltsterne summieren

$$\left[\frac{x}{y} \right] + i r + r \left[\frac{x^2}{y^2} \right] = \left[\frac{X}{Y} \right]$$

wovon

$$r = \frac{\left[\frac{X}{Y} \right] - \left[\frac{x}{y} \right]}{i + \left[\frac{x^2}{y^2} \right]} \quad (12)$$

Mit den Werten p und r gehen wir in die Gleichungen (2, 3) und bekommen die Korrekturen für die Plattenmitte. Sind diese Korrekturen zu gross und die Sterne nicht sehr von dem Leitstern entfernt, so kann man diese Werte zu den Koordinaten in der Gleichung (11) zufügen und den Wert r von neuem berechnen.

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННЫХ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ СНИМКОВ.

M. K. Грабак.

РЕЗЮМЕ.

При определении постоянных фотографической пластиинки по способу Тэрнера (Тиглер) необходимо решать два раза по способу наименьших квадратов системы условных уравнений с тремя неизвестными.

Работу можно значительно сократить: вычислив дифференциальную рефракцию и исправив координаты звезд, вычислить центр тяжести системы звезд.

Ввиду того, что квадрат радиуса вектора не зависит от ориентировки, можно дать очень простые формулы для определения масштаба (10).

Для поправки за ориентировку получаются равенства (12).

Поправки центра даны уравнением (3), которое при известных поправках за масштаб и ориентировку дает положение проекции оптического центра объектива.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЯРКОСТИ ВО ВНЕФОКАЛЬНОМ ИЗОБРАЖЕНИИ ЗВЕЗДНОГО СКОПЛЕНИЯ N. G. C. 6205.

M. E. Набоков.

Получив ряд определений интегральной яркости звездных скоплений путем сравнения их экстрафокальных изображений с таковыми же от звезд¹), я счел полезным проследить распределение яркости во внефокальном изображении звездного скопления. С этой целью, в качестве первого шага в этом направлении, я сделал фотографию звездного скопления N. G. C. 6205 (Messier 13, в созв. Геркулеса) вне фокуса при помощи 5-дюймового рефрактора Московской Астрономической Обсерватории. Его объектив имеет светосилу 1:8.5.

Пластинка отстояла от фокальной плоскости на 3 мм. Фотография выполнена на пластинке Deutsche Imperial Platte (эм. 12072) с экспозицией в 22 мин., 15. VIII. 1923 г., около времени прохождения звездного скопления через меридиан. На той же пластинке, помощью трубчатого фотометра, получено 10 квадратов почернений с экспозицией в 1 мин. Пришлось поступить таким образом, потому что еще не была готова окончательно установка фотометра, дающая возможность варьировать экспозиции, сохраняя в то же время одинаковые почернения. Можно надеяться, что это отступление не отозвалось чувствительно на соотношении почернений, которое именно и требовалось для обработки.

Полученное после проявления изображение (в виде размытого к краям пятнышка около 2 мм в диаметре) было промерено помощью микрофотометра Гартмана (Hartmann) Московской Астрономической Обсерватории, построенного механиком Обсерватории по указаниям проф. С. Н. Блаажко. С помощью этого микрофотометра можно измерять почернение площадок пластиинки; попечник измеряемой площадки в 0.006 дюйма. Поэтому я мерили почернения через 0.005 дюйма (0.13 мм) и, сравнив с клином ряд площадок по хорде изображения скопления, вел следующий ряд сравнений по линии, параллельной первой и отстоящей от нее на 0.005 дюйма.

¹⁾ „La grandeur stellaire intégrale d'amas et de nébuleuses“.

Всего промерено таким образом 142 точки изображения, все 10 квадратов трубчатого фотометра, фон пластиинки и три изображения звезд *B. D.* 36°.2762, 36°.2763 и 36°.2766, получившихся на той же пластиинке. При обработке использована полученная специальными промерами кривая клина, в которой отсчеты клина нанесены по абсциссам, по ординатам же — почернения, т.-е. логарифмы непрозрачности ($\lg \frac{I}{I_0}$, где I — прошедший через пластиинку свет, а I_0 — падающий).

По абсциссам деления шкалы при клине даны до 0.01 дюйма, по ординатам почернения даны в звездных величинах до 0.02, при чем в среднем 1 дм. соответствует 1.2 звездн. величины, т.-е. передвижение клина на 0.01 дюйма дает изменение почернения на 0.012 звездн. величины.

Следует заметить, что наведения на одно и то же место пластиинки делаются достаточно уверенно, разницы наибольшие бывают в 0.05 дюйма, но такие случаи не часты, наиболее же часты разницы отсчетов в 0.02—0.03 дюйма. Пользуясь этой кривой, я все отсчеты клина при измерениях мог перевести в почернения, при чем нуль-пунктом был взят VI квадрат.

Таблица.

30	25	20	15	-5	0 + 5	10	15	20	25	
1.54	1.45	1.44	1.58	1.31	1.25	1.26	1.19	1.23	1.20	1.27
1.50	1.37	1.44	1.55	1.21	1.13	1.30	1.15	1.16	1.13	1.15
1.43	1.51	1.46	1.42	1.05	1.01	1.11	1.19	1.16	1.13	1.27
1.39	1.42	1.24	1.24	0.85	0.79	1.04	1.07	1.11	1.09	1.17
1.40	1.45	1.26	1.22	0.63	0.66	0.77	0.99	1.07	1.12	1.26
1.42	1.24	1.15	0.85	0.41	0.50	0.69	0.89	1.11	1.06	1.17
1.43	1.36	1.14	0.89	0.41	0.33	0.61	0.80	1.04	1.06	1.17
1.42	1.29	1.15	0.97	0.61	0.56	0.67	0.90	1.11	1.08	1.11
1.39	1.35	1.06	1.12	0.91	0.69	0.75	0.91	1.09	1.08	1.13
1.46	1.39	1.28	1.22	1.05	1.01	0.89	1.06	1.07	1.07	1.13
1.46	1.39	1.43	1.26	1.25	0.99	1.18	1.08	1.10	1.01	1.11
1.54	1.55	1.48	1.19	1.17	1.18	1.19	1.19	1.22	1.12	1.19
1.46	1.56	1.46	1.47	—	1.31	1.20	1.20	1.29	1.08	1.19
										30
										25
										20
										15
										10
										5
										10
										15
										20
										25
										30

Таким образом, в прилагаемой таблице, числа, стоящие в клетках, есть почернения отдельных точек изображения; все они отрицательны. По краям таблицы числа ± 0.5 0.10 и т. д. показывают прямоугольные координаты соответствующих точек; началом координат является центр скопления, вернее сказать — наибольшее почернение. Колонна (-10) отсутствует, т. к. она была случайно пропущена при производстве измерений и пропуск замечен уже после того, как пластиинка снята со столика. Для получения таблицы изменения почернения по радиусу скопления для каждой измеренной точки таковой вычислен, и из чисел, относящихся к однаковому радиусу, взяты средние арифметические. В нижеследующей таблице: r — расстояние от центра, s — почернение по отношению к VI квадрату, n — число точек, из которых получено среднее.

<i>r</i>	<i>s</i>	<i>n</i>									
0.0000	—	0.33	6	0.0158	—	0.99	8	0.0255	1.22	8	0.0320
50	.52	4	180	1.09	6	270	.28	5	322	.36	9
71	.59	4	200	.05	4	283	.36	3	354	.33	9
100	.72	3	206	.13	8	292	.33	7	393	.42	6
112	.81	6	212	.16	4	300	.33	3	434	1.50	2
141	.95	2	224	.14	6	304	.32	5			
150	.93	4	250	1.20	12	312	1.30	3			

По этим данным построена кривая изменения почернения от центра скопления к ее краям, при чем по абсциссам отложены расстояния и в дюймах и в минутах дуги (рис. 1).

Для определения количества света, соответствующего каждой точке кривой, была построена кривая почернения пластиинки по следующим данным:

Квадр.	<i>S</i>	<i>lg I</i>	Квадр.	<i>S</i>	<i>lg I</i>
I	0.39	0.000	VII	1.95	0.840
II	.62	.335	VIII	—	.936
III	.83	.397	IX	2.31	1.052
IV	1.11	.566	X	.44	.135
V	—	—	XI	.52	.199
VI	1.67	.717	XII	2.77	∞ 1.338
			Фон	0.15	— ∞

В этой таблице *S* — почернение, *lg I* — количество света, прошедшего через отверстие трубчатого фотометра, при чем первое принято за единицу.

КРИВАЯ ЯРКОСТИ.

Кривая распределения яркости представлена на рис. 1-м, при чем размер радиуса скопления принят в 7'.5 и поэтому от абсциссы 3' кривая проэкстраполирована до 7'.5, где яркость можно считать равной нулю.

При этом по ординатам отложены яркости в долях центральной точки.

Кривая эта имеет быстрое падение от 0 до $1\frac{1}{2}$, откуда падение яркости становится значительно медленнее.

Рис. 1.

СУММИРОВАНИЕ ЯРКОСТИ СКОПЛЕНИЯ.

Если мы представим интегральную яркость скопления, как сумму полных количеств света от последовательных колец, окружающих некоторую центральную площадку, то можно подсчитать, как будет идти нарастания суммарной яркости, если мы будем выделять из скопления все большие и большие кружки.

Подсчет полной яркости зон показывает, что если мы за единицу примем количество света в центральном кружке радиусом в $0'.2$, то следующая зона в 2.6 ярче и т. д. до зоны $3'.4 - 4'.6$, после чего полная яркость зон начинает быстро убывать.

Отсюда легко подсчитать, что, прибавляя к центральному кружку зону за зоной мы, начиная с расстояния в 4.6 , будем иметь более медленное нарастание суммарной яркости всего скопления.

Таким образом, если выразить яркость какой-либо зоны скопления в звездных величинах — можно подсчитать и выразить интегральную яркость скопления в какой-либо из шкал фотометрии.

На пластинке получилось изображение трех звезд, упомянутых выше, при чем яркость их указана лишь в *B. D.* Яркости эти таковы:

N на пл.	<i>B. D.</i>	<i>R. H. P.</i>
4	$36^{\circ} .2762$	9.1
6	.2763	9.3
7	.2766	9.4
		10.0
		10.3

Перевод яркостей *B. D.* в *R. H. P.* выполнен по таблицам, имеющимся в *Astrophysik Scheiner-Graff'a*¹⁾.

Просмотр Draper Catalogue в этой области дает явный перевес для слабых звезд типа *K*, поэтому я считаю возможным считать, что по крайней мере 2 звезды из перечисленных принадлежат к типу *K*. Поэтому, положив показатель цвета для этих трех звезд равным $+1.0$, я перевел их яркости на шкалу Кинга (King)²⁾ и получил.

4	$36^{\circ} .2762$	10.5
6	.2763	11.0
7	.2766	11.2

Чтобы иметь суждение об уверенности, с которой можно пользоваться этими значениями яркости, была вычислена по каждой в отдельности поверхность яркость центральной площадки изображения звездного скопления; в результате получилось:

по <i>B. D.</i>	8.8 — 8.9
по <i>R. H. P.</i>	9.3 — 9.6
по King'у	10.3 — 10.7

Пользуясь этими данными, была вычислена суммарная яркость скопления путем прибавления к центральной площадке полной яркости колец. Кривая, показывающая результаты подсчетов, дает для фотографической интегральной яркости 5.5, что соответствует визуальной в 5.0 (если при-

¹⁾ По Durchmusterung Zones. Harv. Ann. LXX.

²⁾ Photographic magnitudes of 153 stars. Harv. Ann. LIX. № VI.

нять спектральный тип скопления $F-G$. Между тем визуальные, непосредственно производимые по внефокальным изображениям, оценки дают:

Воронцов-Вельяминов	6.3
Набоков	6.1
Д-р Голечек	5.8

По кривой (черт. 2) можно проследить, что наблюдатели оценивают лишь часть скопления (от $6^{1/2}$ до $4^{1/2}$), краевые же части не входят в общую оценку. Если принять во внимание, что автор наблюдал с шестикратным биноклем, то оказывается, что оценивался субъективный диаметр около $27'$.

Если сравнить кривую распределения яркости от центра к краям с

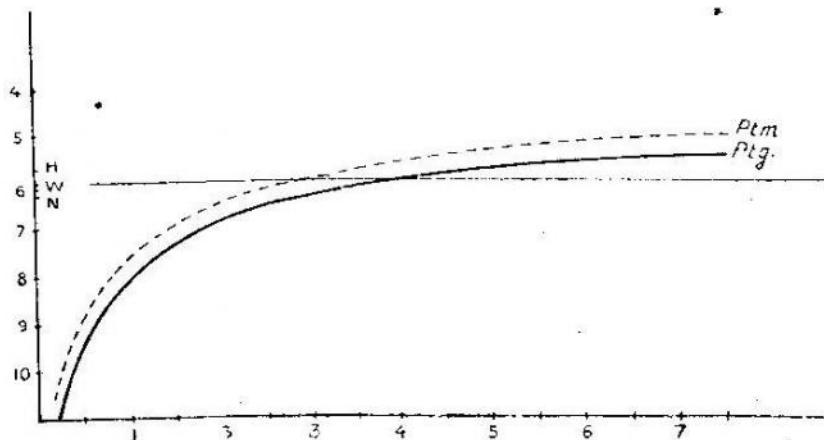


Рис. 2.

данными Шэпли о подсчетах числа звезд в М. 13¹⁾), то легко усмотреть, что полученная кривая имеет менее крутой спуск от центра. При этом следует заметить, что Шэпли дает среднюю плотность на участках через 2.09. Однако, если проследить, как изменяется соотношение плотности звезд нулевой и I площадки с изменением экспозиции, то видно, что при увеличении экспозиции, плотность звезд в I кольце увеличивается.

Эксп.	1 м.	3 м.	6 м.	15 м.	22 м.	3.75 м.
I/o	0.03	0.04	0.06	0.08	0.11	0.13

Полученный материал, конечно, далеко недостаточен для общих суждений, но, во всяком случае, он дает основание предполагать, что все интегральные яркости, даваемые наблюдателями, несколько преуменьшены и, весьма вероятно, зависят от характера скопления.

Поэтому желательно произвести полный пересмотр интегральных яркостей звездных скоплений, применив при этом более усовершенствованные методы.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность проф. С. Н. Блажко за ряд указаний и советов при предварительной работе с фотометрами, а также при редактировании настоящей статьи.

¹⁾ Distribution of Stars in twelve clusters, — by Fr. Pease and H. Shapley. Ap. J., XLV, № IV.

LA DISTRIBUTION DE L'ÉCLAT DE L'IMAGE EXTRAFOCALE DE
L'AMAS STELLAIRE N. G. C. 6205 (MESSIER 13).

Par M. Nabokov

RÉSUMÉ.

L'étude de l'image extrafocale de l'amas stellaire, que nous avons obtenu à l'aide du refracteur de 5 pouces de l'Observatoire de Moscou, et mesuré à l'aide du microphotomètre du même Observatoire, nous a permis de construire une courbe de l'éclat de son centre vers les bords. La courbe est dessinée sur la fig. 1; elle présente l'augmentation de l'éclat vers le centre et la baisse lente vers les bords. A l'aide de cette courbe nous avons calculé l'accroissement de l'éclat général avec l'augmentation de la distance au centre.

La courbe de cet accroissement est donnée sur la fig. 2; l'éclat est exprimé en grandeur stellaire. La courbe continue représente l'éclat photographique, et la courbe pointillée l'éclat visuel; celui-ci a été obtenu à l'aide des tables dans la supposition du type spectral de l'amas entre les limites de F à G.

La courbe pointillée de la fig. 2 fait voir que les observateurs (M. M. Holtschek, Worontzov-Weliaminov et l'auteur) ne sont à l'état d'estimer, que l'éclat de partie centrale de l'amas.

Il est probable, que toutes les estimations de l'éclat intégral des amas sont amoindries. Il est désirable d'obtenir les éclats intégraux des amas stellaires par des méthodes plus nettes, que celles dont on se sert à présent.

LA GRANDEUR STÉLLAIRE INTÉGRALE D'AMAS ET DE NÉBULEUSES.

Par. M. Nabokov.

Le présent tableau offre le résumé des observations de quelques amas stellaires et de nébuleuses. En employant la jumelle Zeiss (prismatique, agrandissement 6, puissance 16, le diamètre de l'objectif 24 mm.) j'ai estimé la grandeur stellaire intégrale des objets mentionnés, en les comparant aux étoiles voisines d'après la méthode du Prof. Pickering. Je déplaçais l'oculaire du foyer de manière que l'objet estimé put offrir le plus de ressemblance avec l'image de l'étoile hors du foyer.

Pour certains amas je procépais ainsi: étant myope je faisais les estimations sans lunette. (— 2,75 D). Les grandeurs des étoiles de comparaison étaient toujours prises dans R. H. P. Pour les objets observés plus d'une fois est donnée la moyenne.

Dans notre tableau sont consignés les N—os d'après N. G. C. (première colonne), la présence des objets dans les catalogues Baile y et Melotte est donnée dans la deuxième et la troisième colonnes, la caractéristique des objets adoptée par ces auteurs y est indiquée par les symboles „Cl“ (l'amas) et ⊕ (l'amas globulaire).

La colonne cinq contient la classification de Melotte.

I Amas stellaires globulaires condensés au centre (5139, 6205, 6254).

II Amas dispersés (loose) avec des confins nettement déterminés (1245, 2287).

III Amas dispersés au contour irrégulier.

IV Amas sans forme déterminée [les Pléiades].

La colonne quatrième donne les N-os de Messier, la sixième renferme les désignations d'éclat d'après N. G. C. la neuvième les estimations dans des grandeurs stellaires, la huitième les estimations de M. Holetschek, la septième les éclats que M. Holetschek a obtenus par la sommation des éclats de toutes les étoiles. Dans la dixième est marquée la présence d'un objet dans le „Himmels Atlas“¹⁾ von Richard Schurig, dans la onzième la même chose pour l„Atlas of the Northern Stellar Hemisphere“ by

¹⁾ Quatrième édition.

N. G. C.	Bailey.	Melotte.	Messier.	Class.	La grandeur stellaire intégrale.			Himmels Atlas.	Atlas of the Northern Polar Him.	Constel.
					N.G.C.	Holz.	Holz.			
—	+	179 cl.	—	IV	—	5.7	—	—	—	—
581 cl.	+	8 cl.	M 103	III	B	—	—	—	—	—
663 cl.	+	11 cl.	—	II	B	—	—	—	—	—
1376 Neb	—	—	—	—	PB	—	—	—	—	—
1912 cl.	+	36 cl.	M 38	II	B	—	<7	5.8	+ M 308	Auriga.
1960 cl.	+	37 cl.	M 36	II	B	—	6 $\frac{1}{4}$ —7	5.6	+ M 36	Auriga.
2099 cl.	+	38 cl.	M 37	II	—	—	6 $\frac{1}{2}$ —7	6.2	+ M 37	Auriga.
2168 cl.	+	41 cl.	M 35	II	—	5.5	5 $\frac{1}{2}$	5.8	+ M 35	Gemini.
2244 cl.	+	47 cl.	—	IV	—	—	—	5.7	+ 2244	Monoceros.
2281 cl.	+	51 cl.	M 41	II	B	—	—	6.3	+ 2281	Auriga.
2287 cl.	+	52 cl.	M 41	II	B	5.0	5.9	+ M 41	—	Can. Major.
2301 cl.	+	54 cl.	M 50	III	—	—	—	6.1	+ 2301	Monoceros.
2323 cl.	+	58 cl.	M 50	II	—	6.3	6.5	+ M 54	—	Monoceros.
2548 cl.	+	85 cl.	—	—	—	6.0	5 $\frac{1}{2}$	+ 548	—	Monoceros.
2632 cl.	+	88 cl.	M 44	II	—	—	—	—	—	Cancer.
2682 cl.	+	94 cl.	M 67	II	vB	—	4.1	4.2	+ M 67	Cancer.
4534	+	—	—	—	cB	—	5.6	6.8	+ M 67	Can. Ven.
6205 ♂	+	150 ♂	M 13	I	vB	—	—	6.3	—	Hercules.
6341 ♂	+	168 ♂	M 92	I	vB	—	5.7	5.7	—	Heroules.
6611 cl.	+	198	M 16	IV	—	—	6.2	6.4	+ M 92	Scutum.
6618	+ Neb.	—	M 17	IV	B	—	—	6	+ M 16	Sagittar.
6633 cl.	+	201	M 25	III	—	—	—	6.6	+ M 17	Ophiuchus.
6647 cl.	+	—	M 11	—	vB	—	5.6	6.633	—	Sagittar.
6705 cl.	+	213 ♂	M 15	I	vB	—	5.4	5.6	+ M 25	Scutum.
7078 ♂	+	234 ♂	M 15	I	vB	—	5.2	5.0	+ M 11	Pegasus.
7092 cl.	+	236 cl.	M 39	V	—	4.8	5.0	+ M 39	—	Cygnus.

Dans le catalogue de M.Bailey est désigné comme M 14.

M. Holtschek désigne cetamas comme M 48.

Dans l' „Himmels Atlas“ cetamas est désigné comme une nébulosité.

A. Mikailov. Le signe „+“ désigne la présence de l'objet dans l'Atlas mentionné et „—“ son absence.

Dans les remarques sont données les indications sur des erreurs ou des discordances dans les catalogues ou les atlas. J'ai trouvé nécessaire de le faire, car ces erreurs ne sont pas déjà si rares et peuvent parfois produire un malentendu.

Les observations de ce genre ne peuvent pas prétendre à une grande précision, d'une part, à cause de l'imperfection de l'achromatisation justement, d'autre part à cause du caractère même de l'amas influe sur l'aspect de son image hors du foyer. L'image des étoiles hors du foyer s'obtient en forme d'une série d'anneaux concentriques plus ou moins lumineux. L'image sommaire d'un amas est produit par l'empilement des anneaux des étoiles séparées par leur bords. Il est probable que dans le cas d'un amas condensé au centre cette structure de l'image extrafocal doit produire l'augmentation vive d'éclat vers le centre de l'image et la baisse lente vers les bords.

Le meilleur instrument pour ce genre de détermination est celui qui donne des images les plus petites possibles, c'est le type de chercheur de comètes.

Si l'on forme pour les diverses classes les différences „observations—calcul“ on obtient ce qui suit:

$$\text{I} - 1.2 \text{ mg} \quad \text{II} - 0.6 \text{ mg} \quad \text{III} + 0.4 \text{ mg} \quad \text{IV} + 04 \text{ mg}.$$

On doit noter que M. S. Orlow a employé la même méthode pour l'estimation de l'éclat des comètes.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЯРКОСТЬ ЗВЕЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ И ТУМАНОСТЕЙ

M. E. Набоков.

РЕЗЮМЕ.

В прилагаемой таблице даны интегральные яркости некоторых звездных скоплений и туманностей, которые были наблюдаемы автором при помощи бинокля Цейсса, с увеличением в 6 раз, светосилой 16 и диаметром объектива 24 мм. Для оценки яркости экстрафокальные изображения сравнивались по методу Чиккеринга с близлежащими звездами, значения яркости которых взяты из Revised Harvard Photometry. Выдвижение окуляра для разных объектов бралось такое, чтобы изображение скопления возможно больше было схоже с изображением звезд сравнения. В некоторых случаях (для ярких скоплений) сравнения производились невооруженным глазом, так как без очков (-2.75 D) автору такие скопления представлялись в виде светлых пятен.

В таблице приведены: № по каталогу Дрейера (1 столбец), обозначения каталогов Бэйли и Мелотта (2 и 3), Мессье (4-й), классификация по Мелотту (5-й), обозначение яркости в каталоге Дрейера (6), яркость, полученная др.ом Голечеком путем подсчета (7-й) и пу-

тем наблюдения (8-й), яркость по определению автора (9-й), обозначение и наличие объекта отмеченным в атласе Шурига (10) и в атласе А. А. Михайлова (11)¹⁾ и, наконец, созвездие, в котором находится объект (12). В примечаниях указаны неправильные обозначения или отсутствие объекта в атласах.

Такого рода определения не могут претендовать на большую точность; можно думать, что, в случае шарообразного скопления, в экстрафокальном изображении его поверхностная яркость быстро падает от центра, а затем, ближе к границам скопления, падает медленно.

Если подсчитать разности „наблюдение — вычисление“, то получается для различных классов:

- I — 1.2 зв. вел. (шарообразные скопления).
- II — 0.6 „ (разбросанные с ясно выраженными границами).
- III + 0.4 „ (разбросанные, неправильные контуры).
- IV + 0.4 „ (бесформенные).

¹⁾ Richard Schurig „Himmels Atlas“. Vierte Auflage. Leipzig. Проф. А. А. Михайлов „Атлас северного звездного неба“. Гос. Издат. Москва.

СОДЕРЖАНИЕ.

Cmp.

1. М. Ф. Субботин. Новая форма уравнения Эйлера-Ломберта и ее применение при вычислении орбит	1
M. Subbotin. A new form of Lambert's Theorem and its application to the determination of the orbits. (Summary)	27
2. Ф. Г. Фесенков. Способ определения температуры неосвещенной части лунной поверхности и плотности лунной атмосферы	29
B. Fessenkoff. La méthode pour déterminer la température de la surface de la lune non éclairée par le soleil et la densité de l'atmosphère lunaire. (Résumé)	50
3. В. Г. Фесенков. О распределении температуры в верхних слоях земной атмосферы	53
B. Fessenkoff. Sur la distribution de la température dans les couches supérieures de l'atmosphère terrestre. (Résumé)	55
4. А. Михайлов. Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1905 VI und untersuchung seiner früheren Bewegung	56
A. A. Михайлов. Определение окончательной орбиты кометы 1905 VI и исследование ее движения в прошлом (Резюме)	64
5. С. В. Орлов. Разложение в ряды Тейлора комето-центрических координат частицы хвоста	65
S. Orlov. On the expansion into power series of cometocentric coordinates of a particle of a comet's tail with the time argument. (Abstract)	68
6. С. В. Орлов. Определение типа кометных хвостов	69
S. Orlov. On the determination of type of comet's tail. (Abstract)	72
7. С. В. Орлов. Определение отталкивателной силы солнца в хвосте кометы 1908, III (Morehouse)	73
C. Orlov. The determination of the repulsive force of the sun in the tail of comet Morehouse (1908, III. (Abstract)	74
8. Б. Р. Герасимович. On the cosmikal dust near the stars	75
B. П. Герасимович. О космической пыли в окрестностях звезд (Резюме)	83
9. Р. В. Куницкий. Систематические движения в звездном облаке млечного пути	85
R. Kuunitzky. Mouvement systematique dans un nuage stellaire de la voie lactée (Résumé)	92
10. Б. Щиголев. Об элементах орбит периодических комет, захваченных Юпитером	93
B. Ščigolew. Von den Elementen der periodischen Kometen, die von Jupiter eingefangen sind (Zusammenfassung)	101
11. М. Нрабак. Über eine Interpolationsmethode für photographische Himmelsaufnahmen	103
M. Грабак. Интерполяционный метод обработки фотографических снимков (Резюме)	105
12. М. Нрабак. Über eine Methode zur Bestimmung der Konstanten auf den Himmelsaufnahmen	106
M. Грабак. Способ определения постоянных фотографических снимков (Резюме)	108
13. М. Е. Набоков. Распределение яркости во внефокальном изображении звездного скопления N. G. C. 6205	109
M. Nabokov. La distribution de l'éclat de l'image extrafocale de l'amas stellaire N. G. C. 6205 (Messier 13). (Résumé)	114
14. М. Набоков. La grandeur stellaire intégrale d'amas et de nébuleuses	115
M. Е. Набоков. Интегральная яркость звездных скоплений и туманностей .	117