Представление гравитационного потенциала эллипсоидов вращения

К. В. Холшевников, Д. В. Миланов, В. Ш. Шайдулин

СПбГУ, ИПА РАН

Современная звездная астрономия, УрФУ, июнь 2017

Эллипсоид

Сплошной эллипсоид T расслаивается на семейство эллипсоидов $S(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ с экваториальной полуосью au и полярной полуосью $a\varphi(u)$:

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2} + \frac{z^2}{\varphi^2(u)} = a^2$$

Плотность ϱ постоянна на $S(u)$, т.е. $\varrho = \varrho(u)$

Эллипсоид

- Поверхности семейства $\{S(u)\}$ не пересекаются и вложены друг в друга.
- Семейство $\{S(u)\}$ стягивается к точке $S(0)$, общему центру эллипсоидов $S(u)$.
- Эллипсоиды $S(u)$ сжаты, причем сжатие $(u-\varphi)/u$, а тем самым и квадрат первого $\varphi_1(u) = (u^2-\varphi^2)/u^2$ и квадрат второго эксцентриситета $\varphi_2(u) = (u^2-\varphi^2)/\varphi^2$ меридионального сечения эллипсоида возрастают (хотя бы нестрого) вместе с u.

Эллипсоид

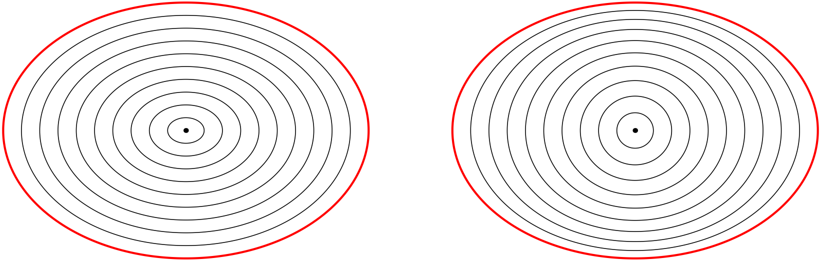

Рис.: Сечение меридиональной плоскостью эллипсоида T и семейства стягивающихся к точке эквиденсит; $c/a = 0.7$; слева $\varphi(u) = u - 0.3u$, справа $\varphi(u) = u - 0.3u^2$.

Ряд Лапласа

$$V = \frac{\mathcal{G}M}{a} \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$I_{2n} = \frac{1}{Ma^{2n}} \int\limits_T r^{2n} P_{2n}\left(\frac{z}{r}\right) \varrho \, d\tau, \quad M = \int\limits_T \varrho \, d\tau$$

Коэффициенты Стокса

Интегралы по долготе и „широте“ берутся явно:

$$M = \frac{4\pi a^2 c}{3}\bar{\varrho}, \qquad \bar{\varrho} = \frac{a}{c}\int\limits_0^1 \varrho u(2\varphi + \varphi' u)\,du, \qquad I_n = (-1)^{n/2} J_n\,,$$

$$J_n = \frac{3a}{(n+1)(n+3)c\bar{\varrho}}\int_0^1 \varrho W_n\,du,$$

$$W_n = u^{n+1}\varphi\varphi_1^{n/2}\left[(n+3)\varphi_7 - \varphi_8\right],$$

$$\varphi_1\varphi_7 = 1 - \frac{\varphi}{u}\varphi', \qquad \varphi_1\varphi_8 = 3\left(1 - \frac{\varphi}{u}\varphi'\right) - \left(1 - \frac{\varphi^2}{u^2}\right)\left(2 + \frac{u}{\varphi}\varphi'\right).$$

Оценка и асимптотика при $n \to \infty$; $\varrho(1) \neq 0$

$$0 < J_n < \frac{B\varepsilon^n}{(n+1)(n+2)}\,, \qquad B = \frac{3A\varrho^*}{\bar\varrho}\,, \qquad A = \sup_{0\leqslant u\leqslant 1} \varphi_7(u).$$

$$J_n \sim \frac{B_0\varepsilon^n}{n^\sigma}\,, \qquad \sigma = 2, \qquad B_0 = \frac{3\varrho(1)}{\bar\varrho}\,.$$

Интересно, что асимптотика зависит только от средней плотности, поверхностной плотности и эксцентриситета внешнего эллипсоида.

Асимптотика при $n \to \infty$; $\varrho(1) = 0$

Пусть $\varrho(u) = \varrho_0(1-u)^\nu$. Тогда

$$J_n \sim \frac{B_1 \varepsilon^n}{n^\sigma}\,, \qquad \sigma = 2 + \nu.$$

Спасибо!