



Уральский
федеральный
университет

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Институт естественных наук
и математики



Эффект Лидова–Кодзаи: о применимости двукратного осреднения в задаче трех тел

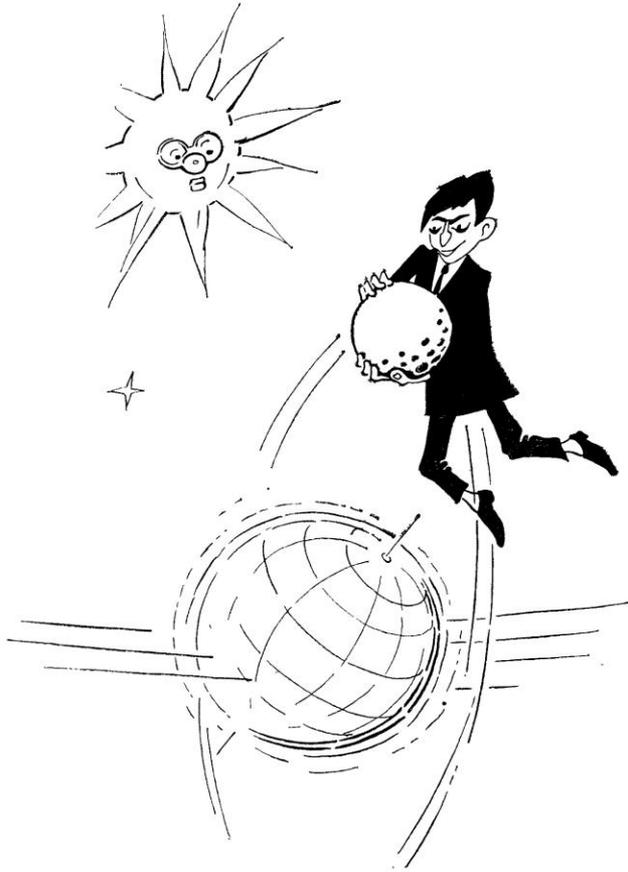
Э.Д.Кузнецов

Уральский федеральный университет

Л.Л.Соколов

Санкт-Петербургский государственный университет

Не хотите ли Луну уронить на Землю?



Наклон орбиты Луны к плоскости эклиптики 90° , аргумент перицентра

$$\omega = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{5}\right) \approx 39.2^\circ$$

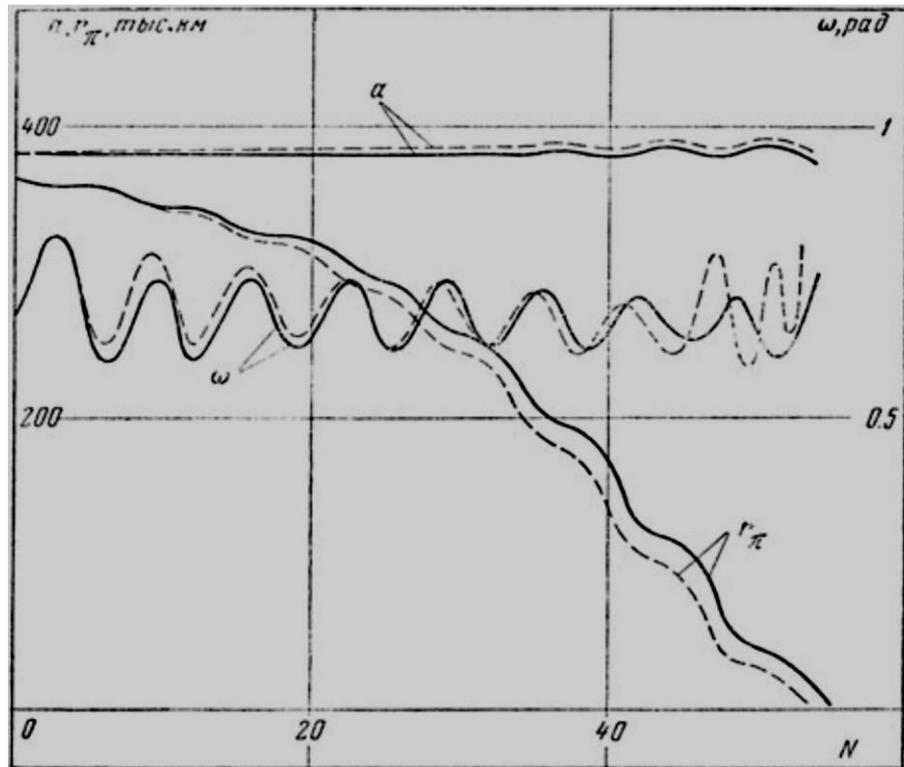
Луна упадет на Землю через

55 оборотов (4.14 года) – численное интегрирование,

54 оборота (4.07 года) – однократно осредненная задача трех тел

Рисунок И.В.Новожилова (Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1977)

Эволюция орбиты «полярной Луны»



Лидов М.Л. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: АН СССР, 1963. С. 119–134.

Наклон орбиты Луны к плоскости эклиптики **90°**,
аргумент перигея

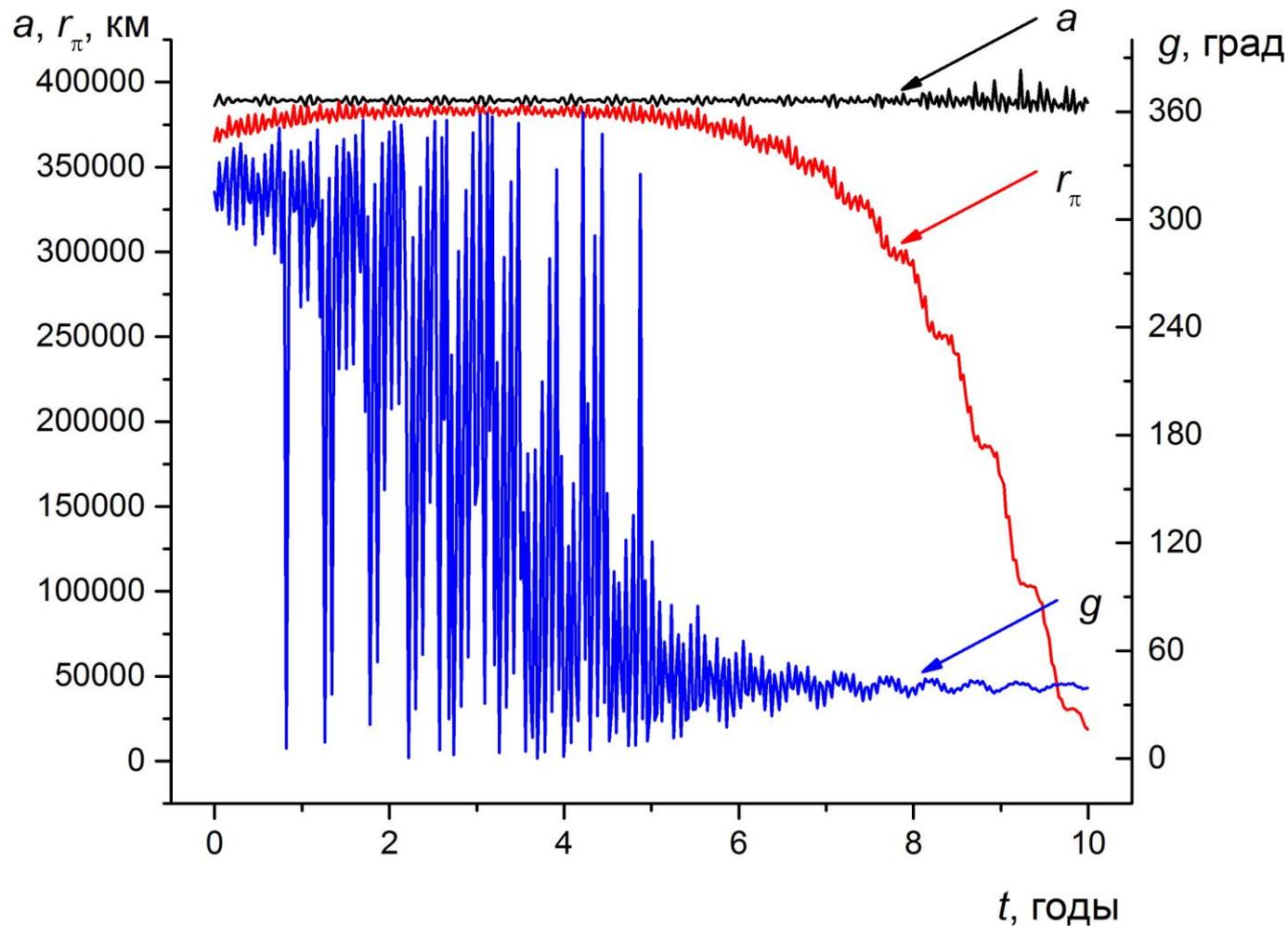
$$\omega = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{1}{5}\right) \approx 39.2^\circ$$

Луна **упадет** на Землю через

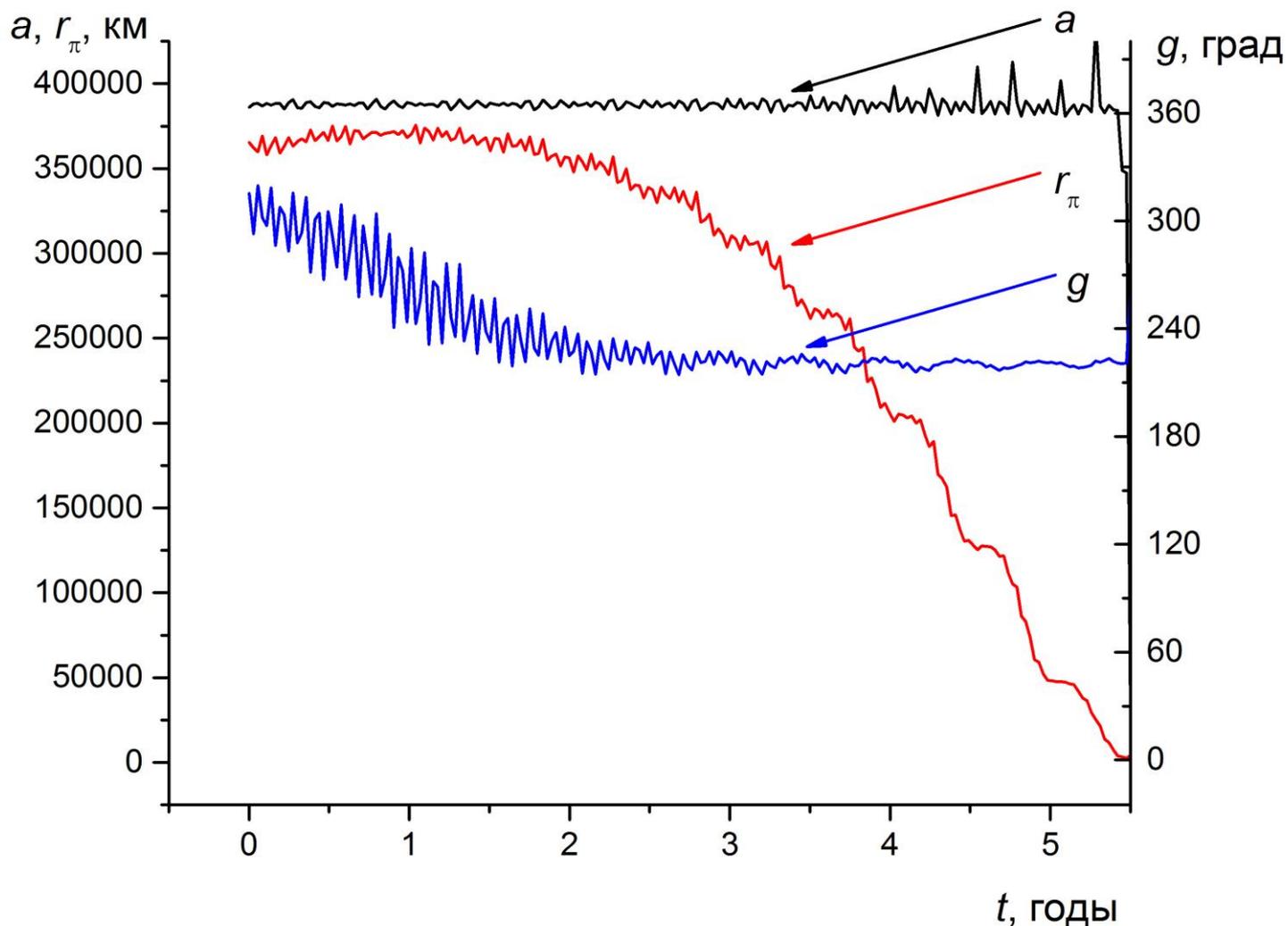
55 оборотов (4.14 года) – численное интегрирование,

54 оборота (4.07 года) – однократно осредненная задача трех тел

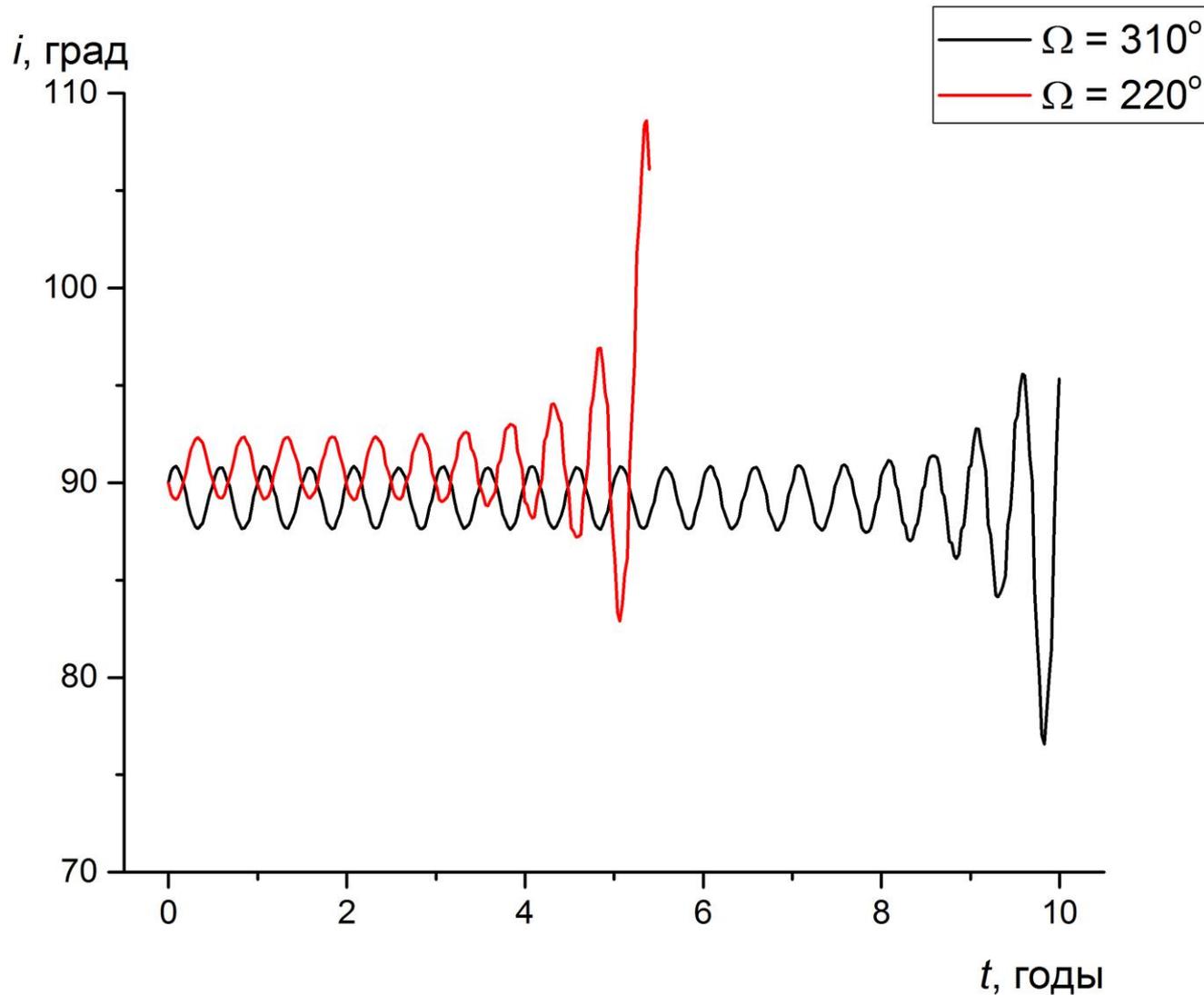
Эволюция орбиты «полярной Луны» при долготе восходящего узла $\Omega = 310^\circ$



Эволюция орбиты «полярной Луны» при долготе восходящего узла $\Omega = 220^\circ$



Эволюция орбиты «полярной Луны»: переходы между прямым и обратным движениями



Эффект Лидова-Кодзаи:

квадрупольное приближение (Лидов, 1961; Kozai, 1962)

Двукратно осредненная задача трех тел m_0, m_1, m .

Гамильтониан Лидова-Кодзаи

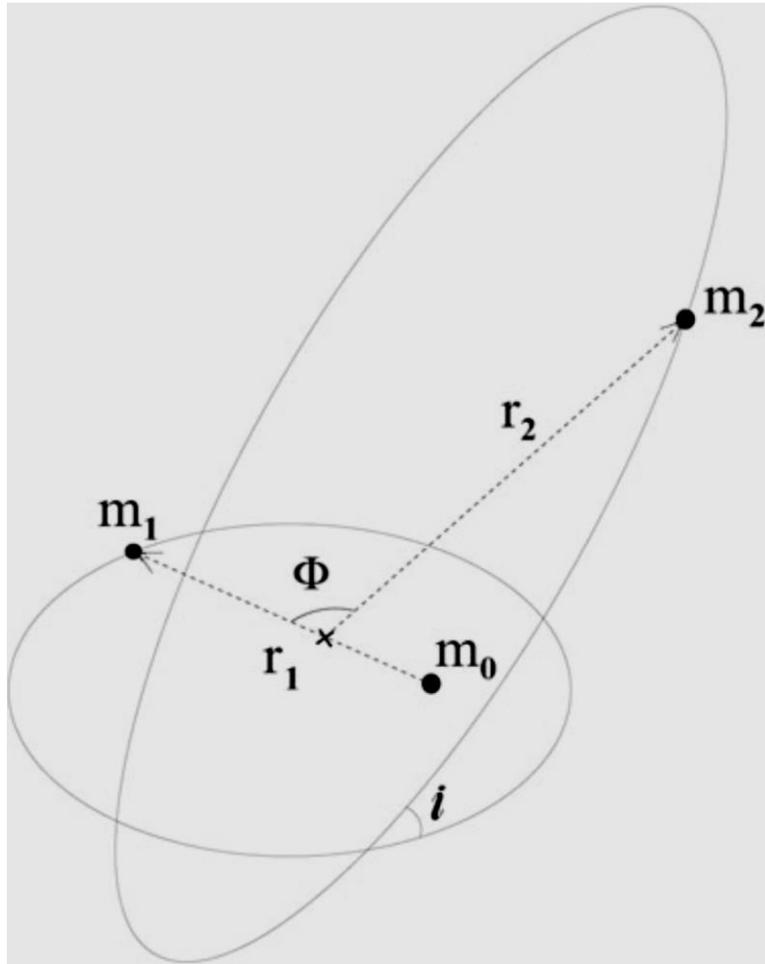
$$H = -\frac{Gm_1a^2}{8a_1^3} [2 + 3e^2 - 3(1 - e^2 + 5e^2(\sin g)^2)(\sin i)^2]$$

Три интеграла движения

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv a = \text{const} \\ c_1 &\equiv (1 - e^2)(\cos i)^2 = \text{const} \\ c_2 &\equiv e^2 \left(\frac{2}{5} - (\sin i \sin g)^2 \right) = \text{const} \end{aligned}$$

Зависимость от долготы восходящего узла отсутствует.

Эффект Лидова-Кодзаи: октупольное приближение



Ford E. B., Kozinsky B., Rasio F. A. Secular evolution of hierarchical triple star Systems // Astrophys. J., 2000. V. 535. P. 385–401

Двукратно осредненная задача трех тел

Система координат Якоби

Исключение узлов:

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \pi$$

Канонические элементы (напр., элементы Делоне) **сохраняют зависимость от долготы восходящего узла** через

$$\Delta h = h_1 - h_2$$

Возможен переход между прямым и обратным движениями (**флипы**)

Эффект Лидова-Кодзаи:

октупольное приближение (Naoz et al., 2013; Shevchenko, 2017)

Двукратно осредненный гамильтониан в октупольном приближении

$$\begin{aligned} H &= \frac{C}{8} \{ (1 + 3 \cos 2i_2) [(2 + 3e_1^2)(1 + 3 \cos 2i_1) \\ &+ 30e_1^2 \cos 2g_1 (\sin i_1)^2] \\ &+ 3 \cos 2\Delta h [10e_1^2 \cos 2g_1 (3 + \cos 2i_1) \\ &+ 4(2 + 3e_1^2)(\sin i_1)^2] (\sin i_2)^2 + 12(2 + 3e_1^2 \\ &- 5e_1^2 \cos 2g_1) \cos \Delta h \sin 2i_1 \sin 2i_2 \\ &+ 120e_1^2 \sin i_1 \sin 2i_2 \sin 2g_1 \sin \Delta h \\ &- 120e_1^2 \cos i_1 \sin 2i_2 \sin 2g_1 \sin 2\Delta h \} \end{aligned}$$

$$C = \frac{G^2}{16} \frac{(m_0 + m_1)^7 m_2^7}{(m_0 + m_1 + m_2)^3 m_0^3 m_1^3} \frac{L_1^4}{L_2^3 G_2^3}$$

L_1, L_2, G_2 - элементы Делоне

Численное моделирование динамической эволюции системы Солнце – Земля – Луна

- Три материальные точки
- Классическая теория гравитации Ньютона
- Барицентрическая эклиптическая система координат
- Набор интеграторов NBI (Varadi, 1999)
 - Интегратор Коуэла-Штермера 15 порядка
 - Интегратор Грэгга-Булирша-Штера 20 порядка
- Интервал интегрирования 10 лет, для отдельных вариантов – 100 лет

Численное моделирование динамической эволюции системы Солнце – Земля – Луна

- Определение начального значения **угла наклона орбиты «Луны»**, при котором начинаются **падения на Землю** в зависимости от начального значения долготы восходящего узла

- Критерий падения «Луны» на Землю:

$$\Delta r < R_E + R_M$$

- Определение начального значения **угла наклона орбиты «Луны»**, при котором начинаются **флипы (переходы между прямым и обратным движениями)** в зависимости от начального значения долготы восходящего узла

Численное моделирование динамической эволюции системы Солнце – Земля – Луна

- **Начальные данные**
- Бариеентрические радиусы-векторы и векторы скорости Солнца, бариеентра системы Земля-Луна и Луны на эпоху **12^h 00^m 00^s TDB 01.01.2000** (численная эфемерида **DE431**)
- Эклиптические **элементы орбиты Луны** относительно бариеентра системы Земля-Луна:

$$a = 386\,138.426 \text{ км}$$

$$e = 0.0535747525$$

$$i = 5.24027313^\circ$$

$$\Omega = 123.958056^\circ$$

$$g = 315.434198^\circ$$

$$M_0 = 140.149671^\circ$$

- **Варьировались:**
 - начальное значение **наклона орбиты Луны**,
 - начальное значение **долготы восходящего узла орбиты Луны**

Падение «Луны» на Землю

(по результатам интегрирования на интервале 10 лет)

i , град	Ω , град	Δt , годы	i , град	Ω , град	Δt , годы
76	0-5	6.1	80	290-315	7.0-8.4
	170	6.6		325-350	8.5-6.1
	180-185	6.2-6.1			
	340	7.1			
	350	6.6			
78	0-40	6.1-5.7	82	0-80	5.7-8.0
	65	6.8		90-260	5.3-8.4
	120	7.0		270-350	8.4-6.1
	145-150	10.0-8.0			
	160-225	7.0-5.7			
	235-245	6.3-6.8			
	310-330	7.5-9.6			
	340-350	7.1-6.2			
80	0-80	5.7-8.3	84	0-350	5.3-8.5
	90-100	8.4-7.4			
	110-260	5.6-10.0			
	270-280	8.4-7.4			

Флипы орбиты «Луны»

(по результатам интегрирования на интервале 10 лет)

i, град	Ω, град
85	0-40 160-220 345-350
86	0-55 145-240 325-350
87	0-75 110-255 290-295 305-350
88-90	0-350

Флипы орбиты «Луны» при наклоне 86°

(по результатам интегрирования на интервале 10 лет)

Ω, град	e	Δt, годы	
		Флип	Падение
145	0.965	7.1	7.1
150	0.818	6.1	6.7
155	0.918	6.1	6.2
160	0.839	5.6	6.1
165	0.731	5.1	5.8
170	0.597	4.7	5.7
175	0.647	4.7	5.6
180	0.686	4.7	5.6
185	0.562	4.2	5.3
190	0.577	4.2	5.3
195	0.583	4.2	5.3
200	0.581	4.2	5.3
205	0.601	4.3	5.3
210	0.774	4.7	5.3
215	0.770	4.8	5.3
220	0.780	4.8	5.4
225	0.913	5.3	5.7
230	0.873	5.3	5.7
235	0.972	5.8	5.9
240	0.941	5.9	6.0

Выводы

- Эволюция орбиты «полярной Луны» существенно зависит от начального значения долготы восходящего узла.
- При начальном значении наклона орбиты «Луны» $i \geq 85^\circ$ возможны переходы между прямым и обратным движением (флипы).
- Значение долготы восходящего узла орбиты Луны ($\Omega = 124^\circ$ на эпоху J2000.0) обеспечивает относительно долговременную эволюцию орбиты даже при наклонах, близких к 90° .

Спасибо за внимание!