

Пространственное моделирование сегментов спиральных рукавов Галактики по классическим цефеидам

А. В. Веселова, И. И. Никифоров

Санкт-Петербургский государственный университет

«Современная звёздная астрономия — 2017»

УрФУ, Екатеринбург, 14–16 июня 2017 г.

Предыдущие результаты

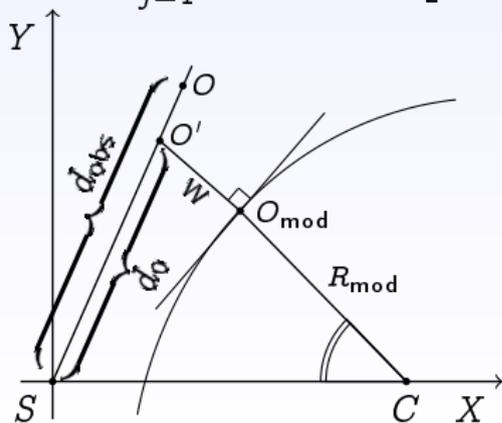
- Ранее был предложен и апробирован новый подход к определению расстояния до центра Галактики (R_0) по геометрии сегментов спиральных рукавов (Nikiforov, Veselova, 2015).
- В рамках метода наибольшего правдоподобия (МНП) был разработан алгоритм пространственного моделирования сегментов рукавов Галактики с учетом дисперсии поперек рукава и неопределенности гелиоцентрических расстояний. Алгоритм не требует жесткой привязки объекта к определенному сегменту.
- Применение метода к мазерам привело к оценке $R_0 = 8.52_{-0.52}^{+0.59}$ кпк.

Метод наибольшего правдоподобия для отдельного сегмента

Модель отдельного сегмента спирального рукава:

$$R_{\text{mod}} = R_{\text{mod}}(\lambda, \vec{p}), \quad \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_M).$$

$$L = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp\left[-\frac{w^2(d_{0,j}, \vec{p})}{2\sigma_w^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} \exp\left[-\frac{(d_{\text{obs},j} - d_{0,j})^2}{2\sigma_d^2}\right],$$



$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\ln L = \\ &= N \ln(2\pi) + N \ln \sigma_d + N \ln \sigma_w + \\ &+ \sum_{j=1}^N \underbrace{\min_{d_{0,j}} \left[\frac{w^2(d_{0,j}, \vec{p})}{2\sigma_w^2} + \frac{(d_{\text{obs},j} - d_{0,j})^2}{2\sigma_d^2} \right]}_{s_j^2}, \quad (1) \\ \mathcal{L}(\vec{p}) &\longrightarrow \min. \end{aligned}$$

Определение границ доверительных интервалов

- Значения границ доверительного интервала параметра p_j для уровня $1 - \sigma$ удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{L}_m(p_j) = \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}; \quad \mathcal{L}_0 = \min \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}_m(p_j) = \min_{p_j = \text{const}} \mathcal{L}.$$

Здесь $\mathcal{L}_m(p_j)$ — профиль логарифмической функции правдоподобия для параметра p_j .

- Параболическое приближение для уровня $1 - \sigma$:

$$p_j^- = p_j^0 - \Delta p_j, \quad p_j^+ = p_j^0 + \Delta p_j;$$
$$\sigma^- = \frac{\Delta^2 p_j}{2(\mathcal{L}_m(p_j^-) - \mathcal{L}_0)}, \quad \sigma^+ = \frac{\Delta^2 p_j}{2(\mathcal{L}_m(p_j^+) - \mathcal{L}_0)}.$$

Доверительный интервал имеет вид $(p_j^0 - \sigma^-, p_j^0 + \sigma^+)$.

Предположения. I

- 1 Сегмент спирального рукава представляется участком логарифмической спирали

$$R_{\text{mod}}(\lambda; R_0, k, X_s) = |R_0 - X_s| e^{k\lambda}, \quad (2)$$

$\lambda \in (-\infty; +\infty)$ — поворотная галактоцентрическая долгота, отсчет λ — по часовой стрелке (в направлении вращения Галактики) от направления на Солнце ($\lambda_{\odot} = 0 \pm 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$);

R_0 — расстояние от Солнца до полюса спирали;

$k = \text{tg } i$, где i — угол закрутки спирали;

X_s — абсцисса точки пересечения сегментом направления на центр Галактики,

$$X_s = R_0 - R_{\text{mod}}(\lambda = 0). \quad (3)$$

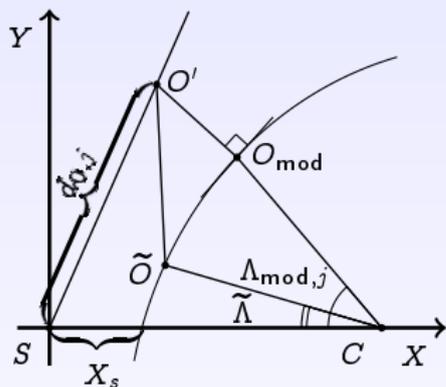
Предположения. II

- 2 Объекты, трассирующие спиральную ветвь, принадлежат одному ее витку:

$$\max_{j_1, j_2} |\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}| < 2\pi, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, N. \quad (4)$$

- 3 Полуспираль S находится на прямой, задаваемой направлением от Солнца на центр Галактики, которое предполагается известным.

Расстояние от точки до спирали



$$O'(X_{0,j}, Y_{0,j}), \tilde{O}(X(\tilde{\Lambda}), Y(\tilde{\Lambda})).$$

$$X(\tilde{\Lambda}) = R_0 - |R_0 - X_s| e^{k\tilde{\Lambda}} \cos \tilde{\Lambda},$$

$$Y(\tilde{\Lambda}) = |R_0 - X_s| e^{k\tilde{\Lambda}} \sin \tilde{\Lambda}.$$

$$|O'\tilde{O}| = \sqrt{(X(\tilde{\Lambda}) - X_{0,j})^2 + (Y(\tilde{\Lambda}) - Y_{0,j})^2}.$$

$$\Lambda_{\text{mod},j} : |O'\tilde{O}| = \min. \quad (5)$$

$$(X_{0,j} - R_0) (\sin \Lambda_{\text{mod},j} - k \cos \Lambda_{\text{mod},j}) - k |R_0 - X_s| e^{k\Lambda_{\text{mod},j}} + \quad (6)$$

$$+ Y_{0,j} (k \sin \Lambda_{\text{mod},j} + \cos \Lambda_{\text{mod},j}) = 0.$$

Совместное определение параметров для нескольких сегментов. Общий случай

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & N \ln(2\pi) + N \ln \sigma_d + \sum_{a=1}^{N_{\text{arm}}} N_a \ln \sigma_{w,a} + \\ & + \sum_{a=1}^{N_{\text{arm}}} \sum_{j=1}^{N_a} \min_{d_{0,j}} \left[\frac{w^2(d_{0,j}; R_0, i_a, X_{s,a})}{2\sigma_{w,a}^2} + \frac{(d_{\text{obs},j} - d_{0,j})^2}{2\sigma_d^2} \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Неизвестные параметры (в общем случае $M = 3 \cdot N_{\text{arm}} + 1$)

R_0	i_{arm_1}	X_{s, arm_1}	σ_{w, arm_1}
	i_{arm_2}	X_{s, arm_2}	σ_{w, arm_2}
	i_{arm_3}	X_{s, arm_3}	σ_{w, arm_3}
	i_{arm_4}	X_{s, arm_4}	σ_{w, arm_4}

Совместное определение параметров сегментов при нулевой ошибке модуля расстояния

$$\mathcal{L} = \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \sum_{a=1}^{N_{\text{arm}}} N_a \ln \sigma_{w,a} + \sum_{a=1}^{N_{\text{arm}}} \sum_{j=1}^{N_a} \frac{w^2(d_{0,j}; R_0, i_a, X_{s,a})}{2\sigma_{w,a}^2}. \quad (8)$$

Неизвестные параметры (в общем случае)

R_0	i_{arm_1}	X_{s, arm_1}	σ_{w, arm_1}
	i_{arm_2}	X_{s, arm_2}	σ_{w, arm_2}
	i_{arm_3}	X_{s, arm_3}	σ_{w, arm_3}
	i_{arm_4}	X_{s, arm_4}	σ_{w, arm_4}

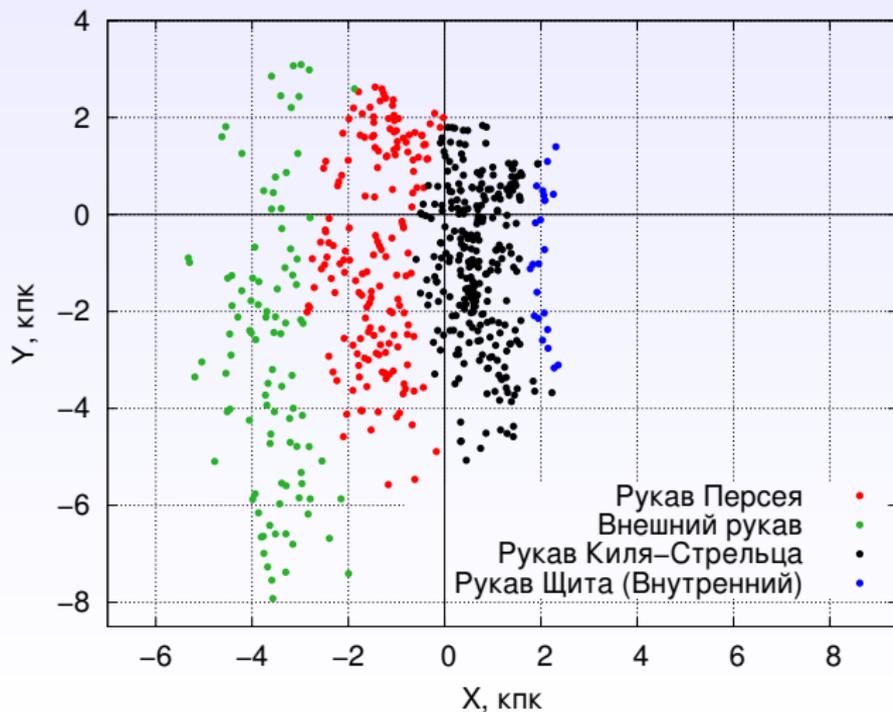
Данные о классических цефеидах

Berdnikov, Dambis & Vozyakova (2014): 674 цефеиды.

Бердников и др. (1996, 2000): $d_{\text{БМО}} = 18.25 \pm 0.05$.

Дамбис и др. (2015): анализ распределения 565 цефеид, выделены 4 сегмента спиральных рукавов.

Распределение цефеид в проекции на плоскость Галактики



Совместное решение при $\sigma_d = 0$

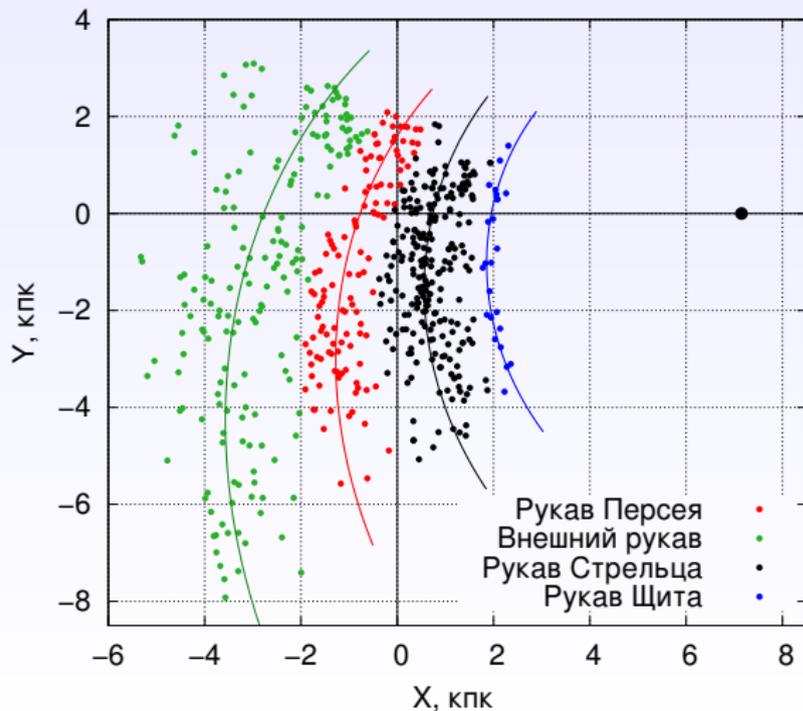
R_0 , кпк	Рукав	i	X_s , кпк	σ_w , кпк
$8.61^{+1.02}_{-0.80}$	Sct	$-8^{\circ}0^{+1.4}_{-1.5}$	$1.97^{+0.19}_{-0.18}$	$0.092^{+0.025}_{-0.018}$
	Sgr	$-6^{\circ}5^{+1.6}_{-1.6}$	$0.559^{+0.091}_{-0.088}$	$0.533^{+0.027}_{-0.019}$
	Per	$-7^{\circ}5^{+1.4}_{-1.4}$	$-1.55^{+0.11}_{-0.10}$	$0.594^{+0.037}_{-0.028}$
	Out	$-9^{\circ}4^{+1.5}_{-1.5}$	$-3.77^{+0.16}_{-0.15}$	$0.604^{+0.049}_{-0.037}$

Результаты после переписывания объектов к конкретному сегменту ($\sigma_d = 0$). |

$$S_j^2 = \min_{a=1, \dots, N_{\text{arm}}} \left\{ \frac{w^2(d_{0,j}; R_0, i_a, X_{s,a})}{2\sigma_{w,a}^2} \right\}.$$

R_0 , кпк	Рукав	i	X_s , кпк	σ_w , кпк
$7.15^{+0.72}_{-0.62}$	Sct	$-11^{\circ}0^{+1.4}_{-2.1}$	$1.96^{+0.20}_{-0.19}$	$0.111^{+0.030}_{-0.002}$
	Sgr	$-13^{\circ}2^{+1.5}_{-1.8}$	$0.739^{+0.097}_{-0.089}$	$0.463^{+0.025}_{-0.017}$
	Per	$-19^{\circ}6^{+1.1}_{-1.2}$	$-0.770^{+0.116}_{-0.102}$	$0.367^{+0.029}_{-0.018}$
	Out	$-21^{\circ}7^{+1.3}_{-1.4}$	$-2.77^{+0.13}_{-0.11}$	$0.823^{+0.048}_{-0.039}$

Результаты после переписывания объектов к конкретному сегменту ($\sigma_d = 0$). II



Функция правдоподобия при $\sigma_d \neq 0$

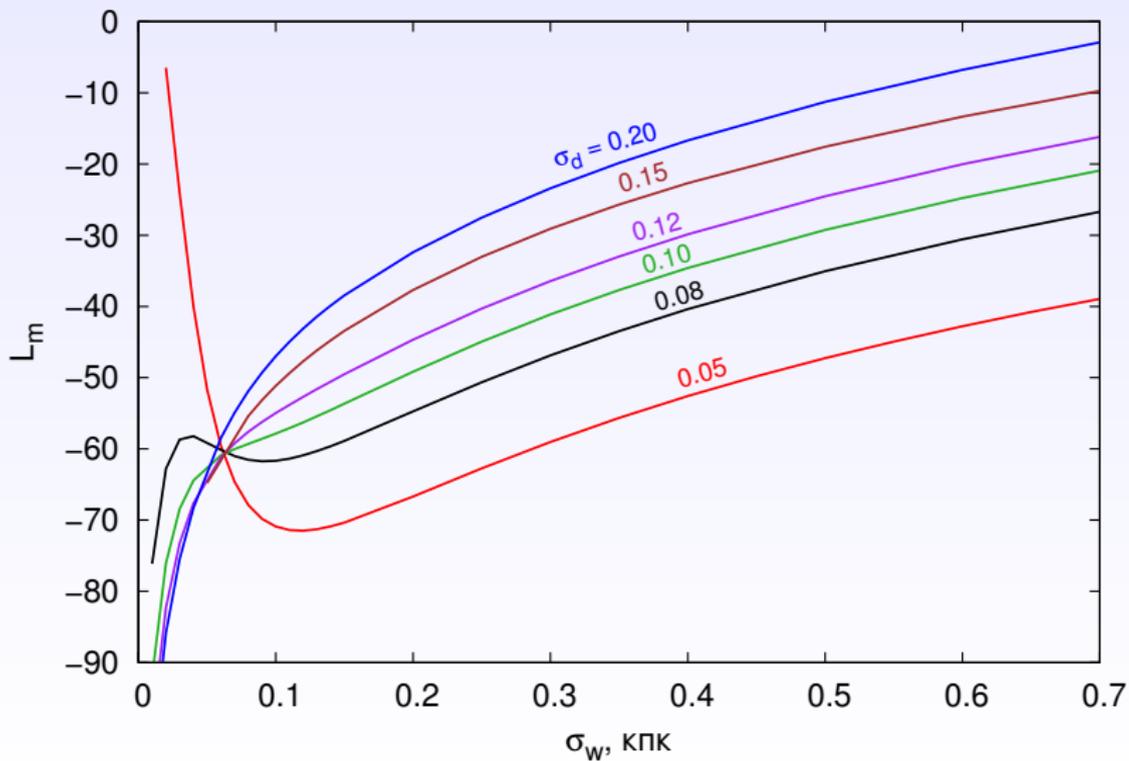
$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = & N \ln(2\pi) + N \ln \sigma_d + \sum_{a=1}^{N_{\text{arm}}} N_a \ln \sigma_{w,a} + \\ & + \sum_{a=1}^{N_{\text{arm}}} \sum_{j=1}^{N_a} \min_{d_{0,j}} \left[\frac{w^2(d_{0,j}; R_0, i_a, X_{s,a})}{2\sigma_{w,a}^2} + \frac{(d_{\text{obs},j} - d_{0,j})^2}{2\sigma_d^2} \right], \end{aligned}$$

Рукав Щита:

$\sigma_w \rightarrow 0$ при $\sigma_d \in [0.1, 0.2]$ (Заболотских и др., 2002),

$$\mathfrak{L}_a = \frac{N_a}{2} \ln(2\pi) + N_a \ln \sigma_d + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{(d_{\text{obs},j} - d_{\text{pr},j})^2}{2\sigma_d^2}. \quad (9)$$

Профиль $\mathcal{L}_m(\sigma_w)$ для σ_d для рукава Щита

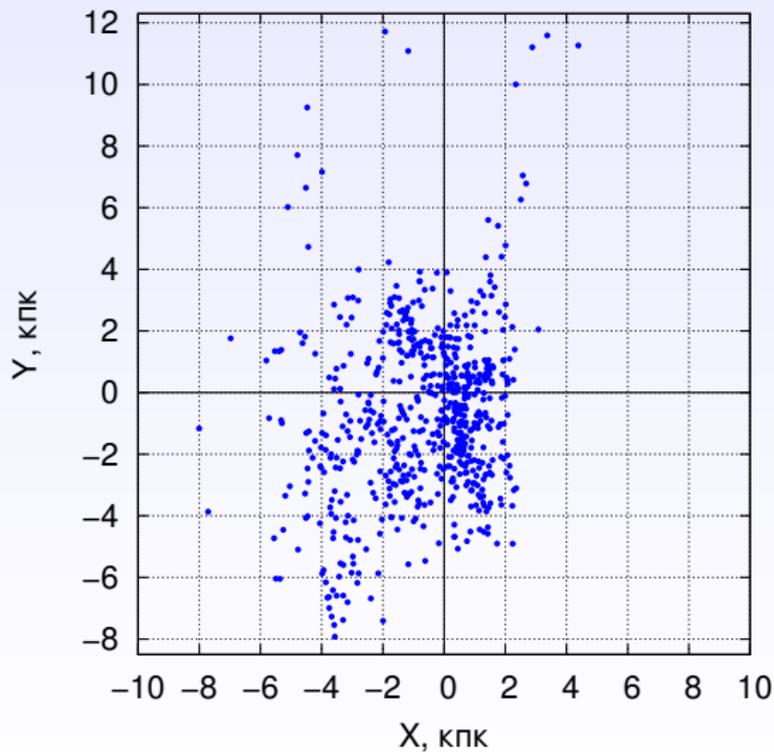


Совместное решение при $\sigma_d \neq 0$

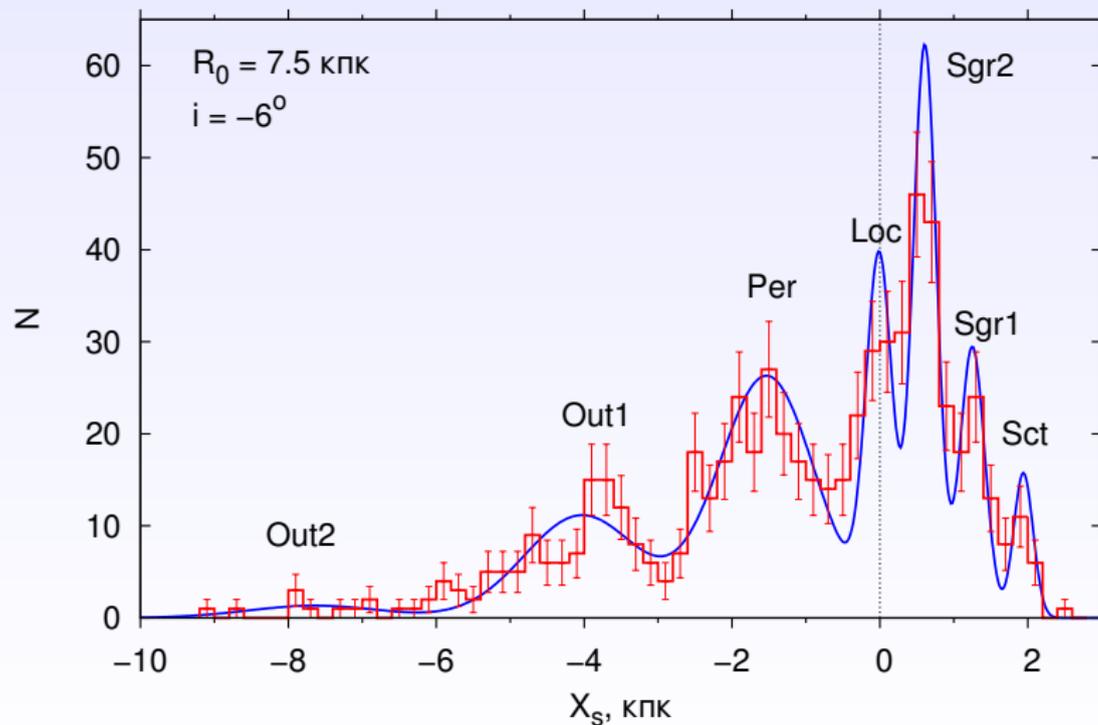
В зависимости от предположений о распределении объектов и о значении σ_d $R_0 \in [7.6_{-0.6}^{+0.8}, 10.0_{-1.2}^{+1.5}]$ кпк.

Рукав X_s	Sct $(1.95 \div 1.96) \pm (0.03 \div 0.08)$	Sgr $(0.53 \div 0.56) \pm (0.02 \div 0.09)$
Рукав X_s	Per $(-1.56 \div -1.55) \pm 0.11$	Out $\approx -3.8_{-0.1}^{+0.2}$

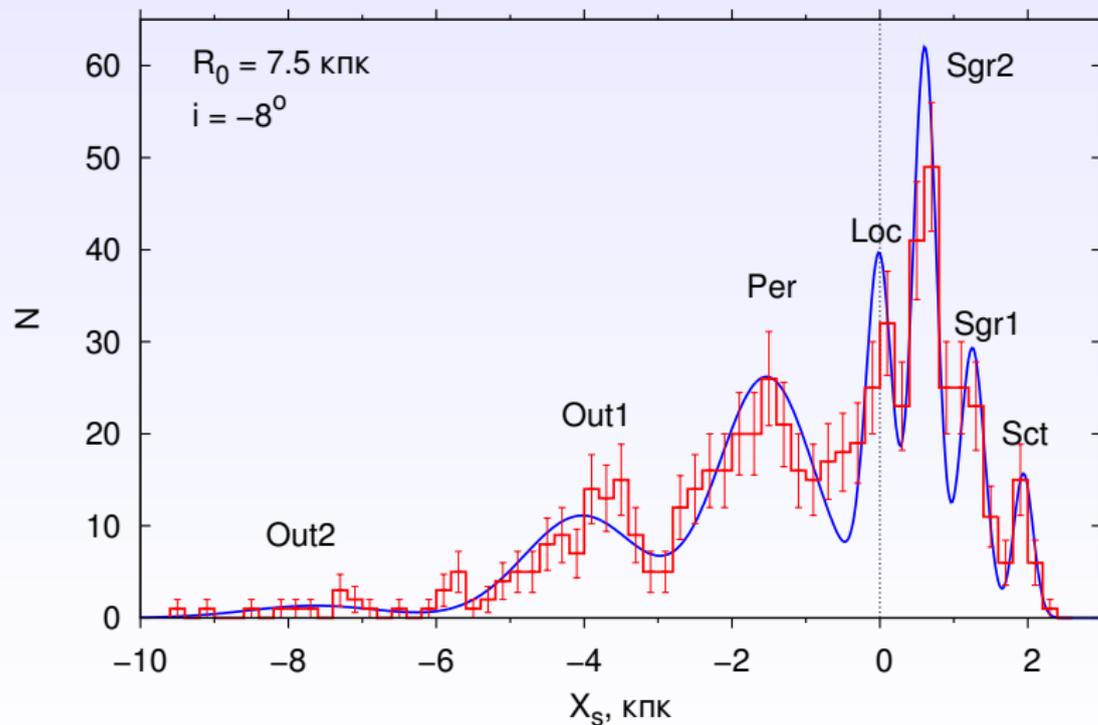
Расширенная выборка цефеид, $N = 636$



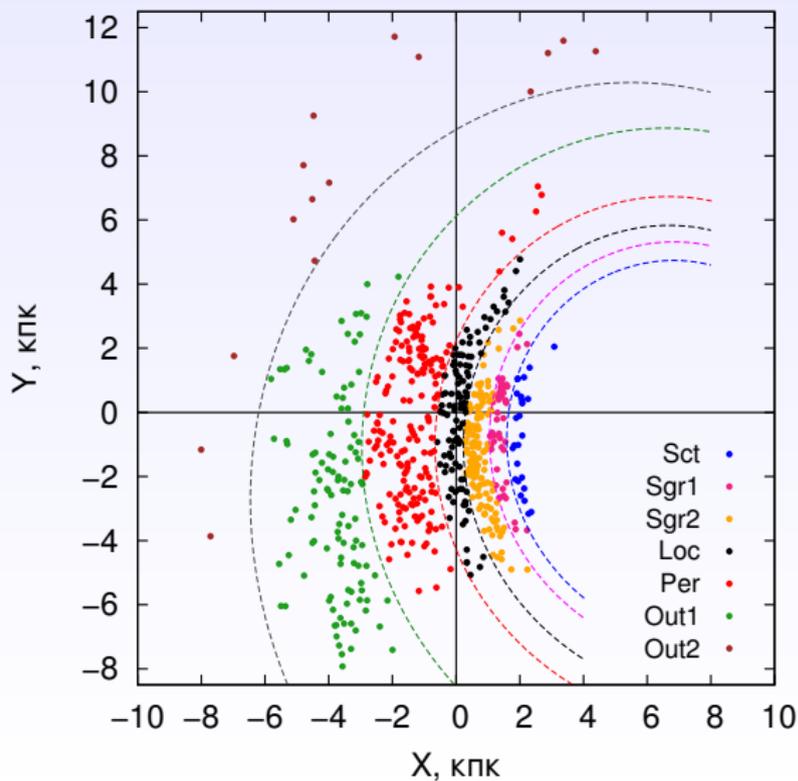
Распределение значений X_S . I



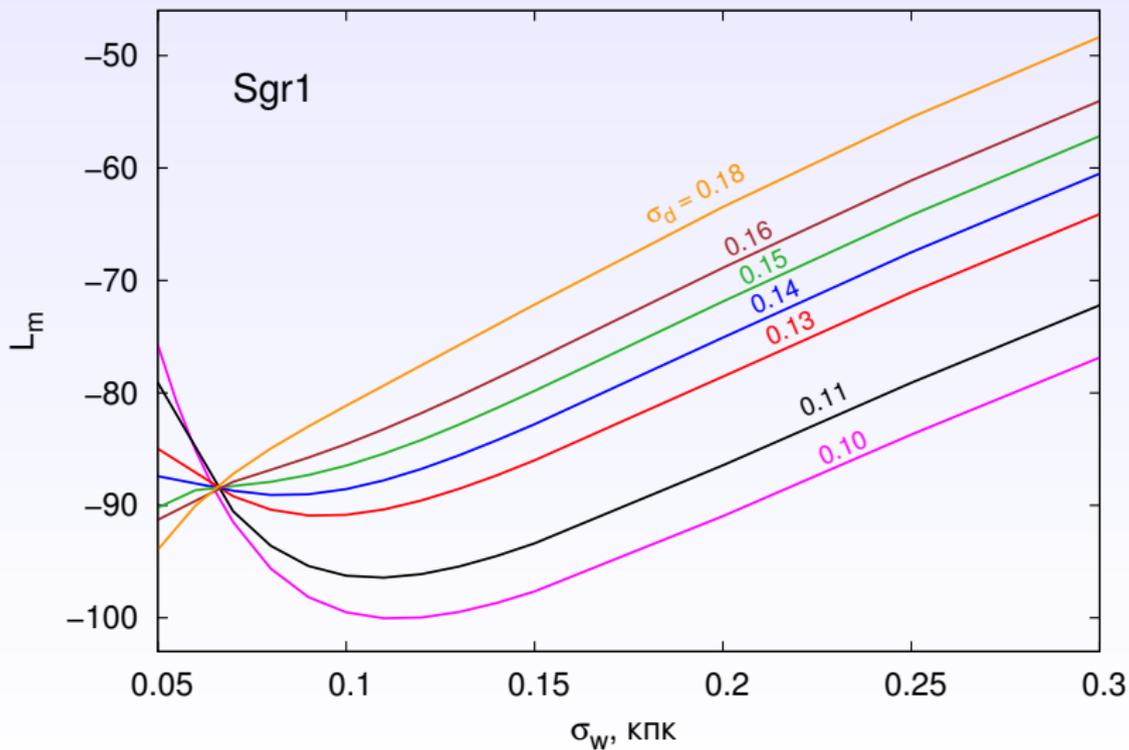
Распределение значений X_S . II



Деление выборки на сегменты ($R_0 = 7.5$ кпк)



Выбор значения σ_d . Профиль $\mathcal{L}_m(\sigma_w)$ для σ_d



Зависимость результатов от начального деления выборки на сегменты

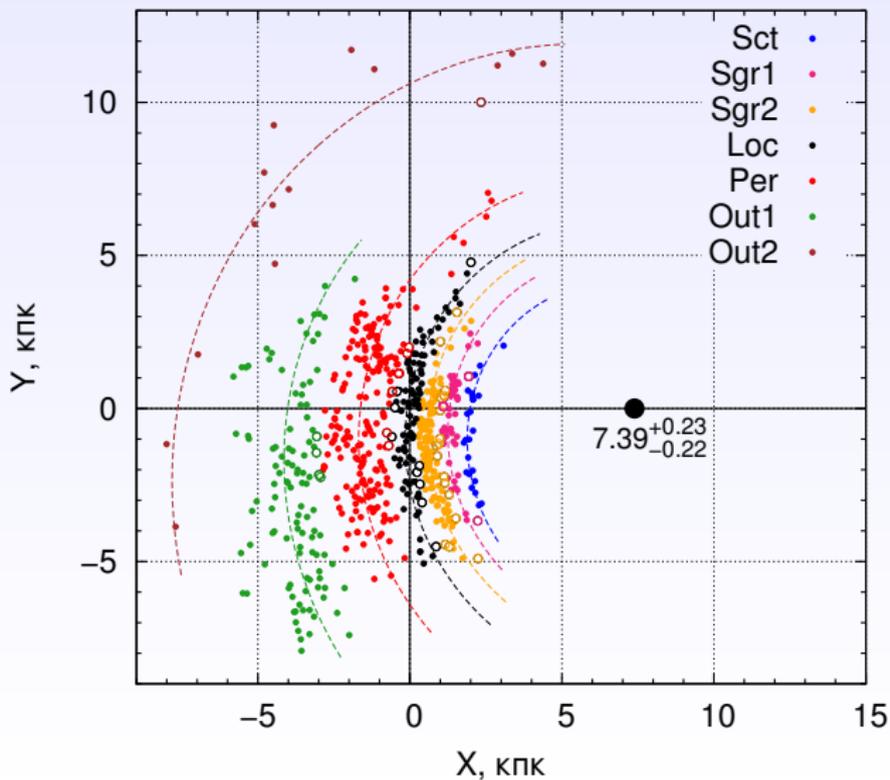
Деление выборки на сегменты при $R_0 = 7.5$ кпк.

- Оптимизация параметров для исходной выборки:
 $R_0 = 7.41_{-0.22}^{+0.23}$ кпк \rightarrow
- переписывание: $R_0 = 7.45_{-0.25}^{+0.26}$ кпк \rightarrow
- коррекция значений σ_w методом Монте-Карло,
оптимизация остальных параметров: $R_0 = 7.50_{-0.27}^{+0.28}$ кпк.

Деление выборки на сегменты при $R_0 = 8.5$ кпк.

- Оптимизация параметров для исходной выборки:
 $R_0 = 8.47_{-0.25}^{+0.26}$ кпк \rightarrow
- переписывание: $R_0 = 8.52 \pm 0.27$ кпк.

Деление выборки на сегменты. $R_0 \in [6.5, 8.5]$



Переписывание объектов к конкретному сегменту ($\sigma_d = 0.14$)

1) $R_0 = 7.39$ кпк,
 $\Delta N = -6$.

2) $R_0 = 7.37$ кпк,
 $\Delta N = -2$.

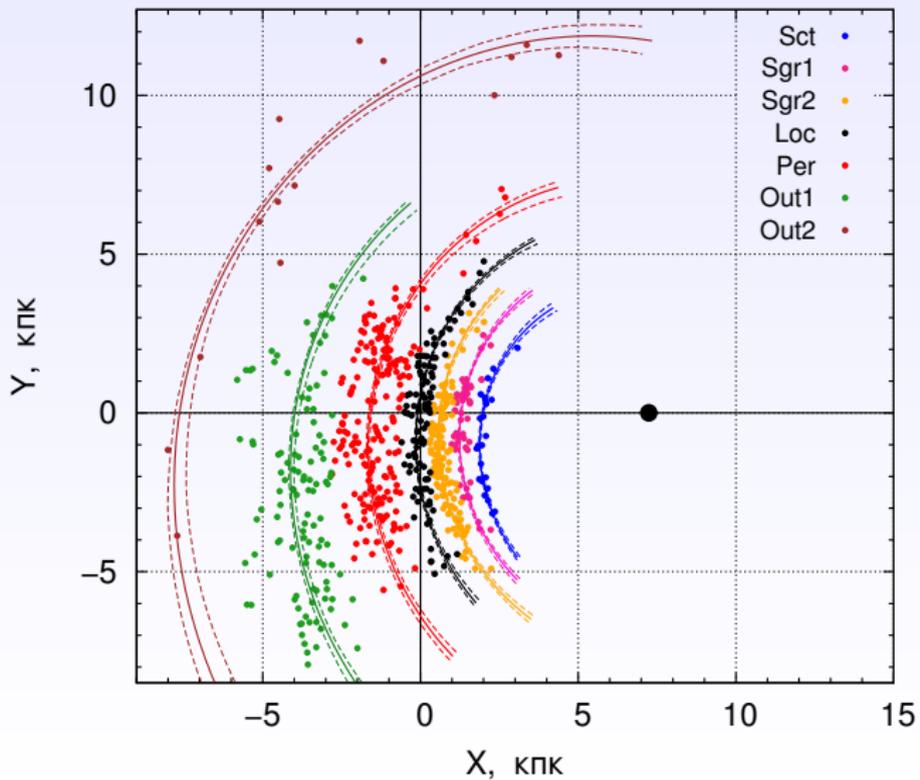
3) $R_0 = 7.33$ кпк,
 $\Delta N = 0$.

Рукав	R_0 , кпк	i	X_s , кпк	σ_w , кпк
Sct		$-10^{\circ}9 \pm 0^{\circ}8$	1.98 ± 0.03	(0.00)
Sgr1		$-7^{\circ}6 \pm 0^{\circ}7$	1.29 ± 0.02	$0.116^{+0.017}_{-0.015}$
Sgr2		$-6^{\circ}7 \pm 0^{\circ}6$	0.613 ± 0.020	$0.171^{+0.013}_{-0.011}$
Loc	$7.24^{+0.22}_{-0.21}$	$-7^{\circ}2 \pm 0^{\circ}6$	-0.098 ± 0.025	$0.230^{+0.019}_{-0.017}$
Per		$-6^{\circ}2 \pm 0^{\circ}9$	-1.62 ± 0.04	$0.535^{+0.029}_{-0.028}$
Out1		$-8^{\circ}7 \pm 1^{\circ}4$	-3.98 ± 0.09	$0.641^{+0.054}_{-0.053}$
Out2		$-8^{\circ}6 \pm 1^{\circ}5$	-7.64 ± 0.23	(0.00)

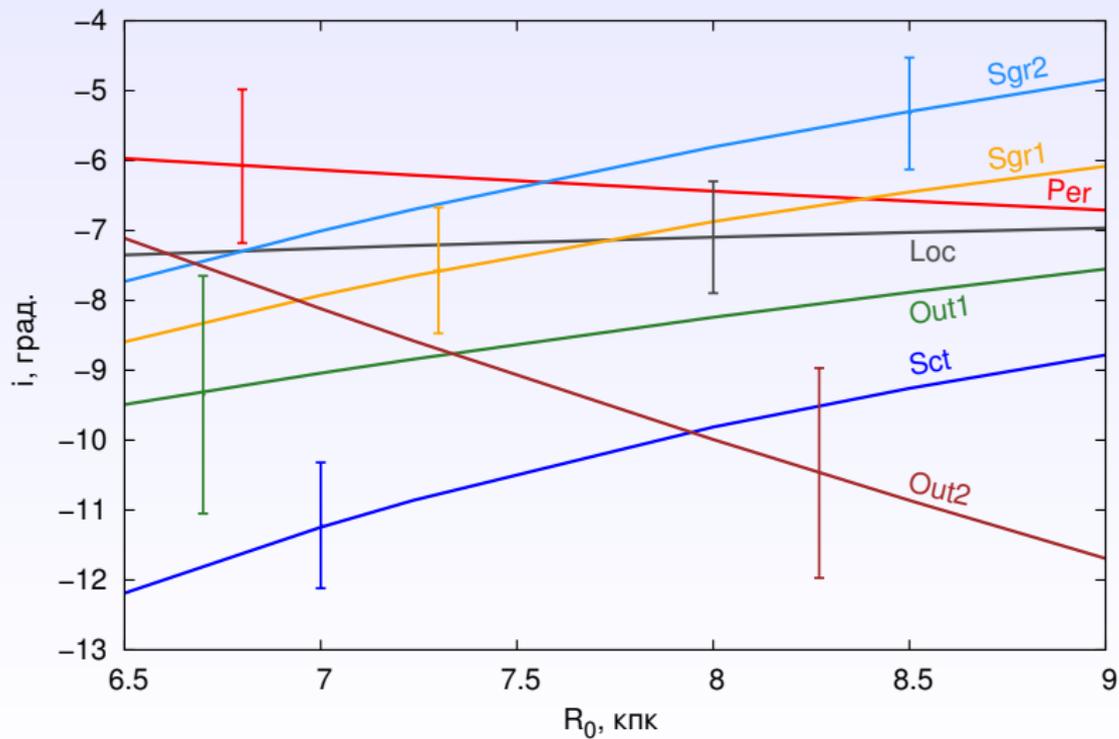
Оптимизация параметров после коррекции σ_w методом Монте–Карло

Рукав	R_0 , кпк	i	X_s , кпк	σ_w , кпк
Sct		$-10^\circ 9 \pm 0^\circ 9$	1.98 ± 0.03	(0.00)
Sgr1		$-7^\circ 6 \pm 0^\circ 9$	1.29 ± 0.02	(0.150 ± 0.018)
Sgr2		$-6^\circ 7 \pm 0^\circ 8$	0.614 ± 0.026	(0.230 ± 0.010)
Loc	$7.24^{+0.27}_{-0.26}$	$-7^\circ 2 \pm 0^\circ 8$	-0.100 ± 0.033	(0.310 ± 0.013)
Per		$-6^\circ 2 \pm 1^\circ 1$	-1.63 ± 0.05	(0.690 ± 0.033)
Out1		$-8^\circ 8 \pm 1^\circ 7$	-3.98 ± 0.11	(0.810 ± 0.051)
Out2		$-8^\circ 6 \pm 1^\circ 5$	-7.64 ± 0.23	(0.00)

Итоговое решение



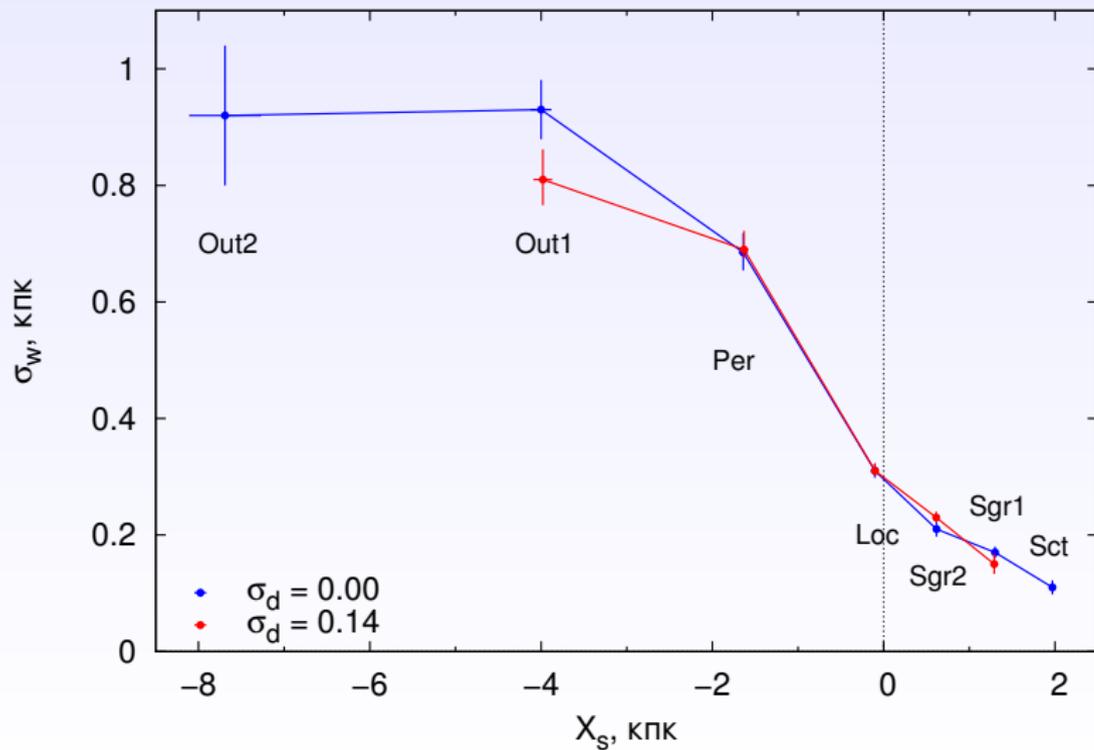
Зависимость углов закрутки от значения R_0



Оптимизация параметров при $\sigma_d = 0$

Рукав	R_0 , кпк	i	X_s , кпк	σ_w , кпк
Sct	$7.25^{+0.25}_{-0.24}$	$-10^\circ.7 \pm 0^\circ.9$	1.97 ± 0.03	(0.110 ± 0.012)
Sgr1		$-7^\circ.8 \pm 0^\circ.9$	1.30 ± 0.02	(0.170 ± 0.010)
Sgr2		$-6^\circ.7 \pm 0^\circ.7$	0.617 ± 0.023	(0.210 ± 0.012)
Loc		$-7^\circ.3 \pm 0^\circ.8$	-0.102 ± 0.033	(0.310 ± 0.012)
Per		$-6^\circ.2 \pm 1^\circ.1$	-1.64 ± 0.05	(0.685 ± 0.031)
Out1		$-9^\circ.1 \pm 1^\circ.8$	-4.00 ± 0.12	(0.930 ± 0.051)
Out2		$-8^\circ.8 \pm 2^\circ.2$	-7.69 ± 0.42	(0.92 ± 0.10)

Зависимость σ_w от X_s



Общая схема алгоритма

- 1 Первичное разделение объектов на сегменты в соответствии с минимумами функции распределения значений X_s ; выделение выборки базовых объектов сегментов, не зависящей от предположений о R_0 .
- 2 Оптимизация параметров для выборки базовых объектов, приписывание сегментам остальных объектов выборки.
- 3 Итеративное переприписывание объектов конкретным сегментам на основе разделения выборки на базовую и спорную части, оптимизация параметров для финального разделения объектов на сегменты.
- 4 Коррекция дисперсий поперек рукава (σ_w) методом Монте-Карло.
- 5 Оптимизация параметров сегментов при постоянных скорректированных значениях σ_w .

Приведение оценки R_0 к современной калибровке шкале расстояний

Бердников и др. (1996, 2000): $d_{\text{БМО}} = 18.25 \pm 0.05$.

de Grijs et al. (2014): $d_{\text{БМО}} = 18.49 \pm 0.09$.

$$\frac{r + \Delta r}{r} = 10^{0.2\Delta d} = 1.117_{-0.050}^{+0.053}.$$

$$R_0 = 7.24_{-0.26}^{+0.27} \text{ кпк} \longrightarrow R_0 = 8.09_{-0.29}^{+0.30} \Big|_{\text{stat}} \begin{matrix} +0.38 \\ -0.37 \end{matrix} \Big|_{\text{cal}} \text{ кпк}.$$

Выводы. I

- Разработана модификация алгоритма пространственного моделирования сегментов спиральных рукавов на основе метода наибольшего правдоподобия в случае неопределенности модулей расстояний объектов и большой ширины сегмента.
- Предложен способ первоначального разделения объектов на сегменты с последующим итеративным переписыванием на основе принципа разделения выборки на базовую и спорную части.
- Применение алгоритма к данным о пространственном распределении цефеид (Berdnikov et al. (2014)) привело к оценке $R_0 = 8.09^{+0.30}_{-0.29} \Big|_{\text{stat}} \begin{matrix} +0.38 \\ -0.37 \end{matrix} \Big|_{\text{cal}}$ кпк.

Выводы. II

- Получены оценки параметров для семи сегментов спиральных рукавов. Углы закрутки различных сегментов значимо друг от друга не отличаются ($(-8^{\circ}.8 \div -6^{\circ}.2) \pm (0^{\circ}.8 \div 1^{\circ}.7)$) за исключением рукава Щита ($-10^{\circ}.9 \pm 0^{\circ}.9$).
- Зависимость углов закрутки от величины R_0 носит разнонаправленный характер для различных сегментов, выделяемых по классическим цефеидам.
- Подтверждена зависимость σ_w от расстояния от центра Галактики (Reid et al., 2014; Дамбис и др., 2015) с резким увеличением значений в области между Местным рукавом и рукавом Персея.

Профиль $\mathcal{L}_m(\sigma_w)$ от σ_d для рукава Внешнего-2

