Определение старшего показателя Ляпунова по псевдоэкспериментальным данным одной стационарной ротационно-симметричной модели галактики

Давыденко А. А., Распопова Н. В., Степенко Н. А.

“Современная звёздная астрономия-2017”, г. Екатеринбург, 14–16 июня

1. Рассмотрим движение звезды в плоскости симметрии звёздной системы, задающееся системой дифференциальных уравнений в полярных координатах (r, θ):

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad r^2\dot{\theta} = I.$$

Здесь интеграл площадей I является постоянной, однозначно определяемой начальным расстоянием и угловой скоростью звезды, а гравитационный потенциал $U = U(r)$, в силу ротационно-симметричности, не зависит от переменной θ. При этом будем считать, что потенциал U задаётся формулами [1] вида:

$$U(r) = \frac{\alpha}{\alpha - 1 + w(r)}, \quad w(r) = \Big(1 + \alpha^p r^p\Big)^{1/p}$$

при структурных параметрах $\alpha, p > 0$.

Тогда, с учётом вида потенциала U, окончательно получаем систему

$$\begin{aligned} &\dot{r} = v_r, \quad \dot{\theta} = \frac{I}{r^2}, \\ &\dot{v}_r = \frac{I^2}{r^3} - \frac{\alpha^{p+1} r^{p-1}\Big(1 + \alpha^p r^p\Big)^{(1-p)/p}}{\Big(\alpha - 1 + \big(1 + \alpha^p r^p\big)^{1/p}\Big)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Реконструкция аттракторов по временным рядам псевдоэкспериментальных данных.

2.1) Пусть $I = 0.7016$ и начальная точка: полярный радиус $R = 1.2$, полярный угол $\theta = 0$ и $v_R = 0$, а также фиксированные значения параметров $p = 0.4$ и $\alpha = 2$. Приведем график, отображающие наблюдения по переменной R, полученный путем численного интегрирования системы (1) (Рис. 1). Впоследствии эти наблюдения рассматриваются как псевдоэкспериментальные данные, как если бы сама динамическая система была неизвестна.

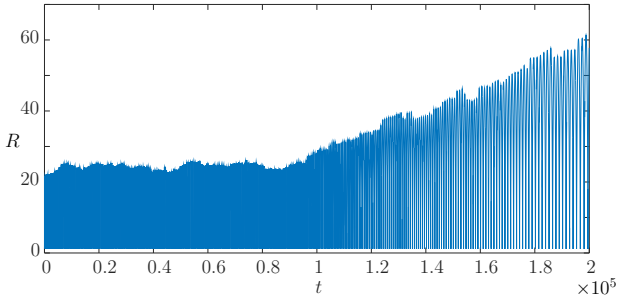

Рис. 1: Псевдоэкспериментальные данные

Временной ряд, который будет использоваться в качестве экспериментальных данных для реконструирования аттрактора системы (1),

$$R_i = R(t_i), \quad t_i = 10i, \ i = 0, 1, \ldots, 20000$$

представлен в табл. 1.

t_i	0	10	...	200000
R_i	1.200000	4.263244	...	57.766636

Таблица 1: Псевдоэкспериментальные данные

Графики основного фазового портрета системы (1) и аттрактора, восстановленного методом Такенса, изображены на рис. 2. Как видно реконструированный аттрактор достаточно точно отображает основной аттрактор системы (1) при выбранных параметрах.

Давыденко Александр Александрович – ст. преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: a.adavydenko@spbu.ru, тел.: +7(911)210-57-92

Распопова Наталья Викторовна – ст. преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: natalya_rasp@mail.ru, тел.: +7(921)595-87-21

Степенко Николай Анатольевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: nick_st@mail.ru, тел.: +7(921)945-29-32

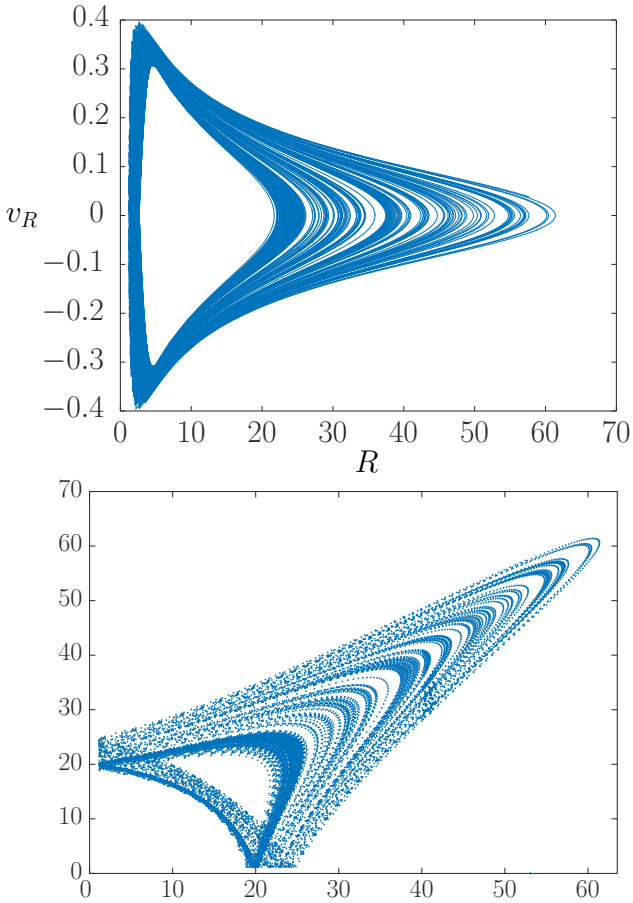

Рис. 2: Фазовый и реконструированный аттракторы

2.2) Следующий набор: интеграл площадей $I = 0.4$, полярный радиус $R = 0.5$, полярный угол $\theta = 0$, $v_R = 0.5$, а также $p = 3$ и $\alpha = 1$. График, отображающий динамику по переменной R (Рис. 3), задаётся временным рядом $R_i = R(t_i)$, где $t_i = 10i$ при $i = 0, 1, \ldots, 20000$.

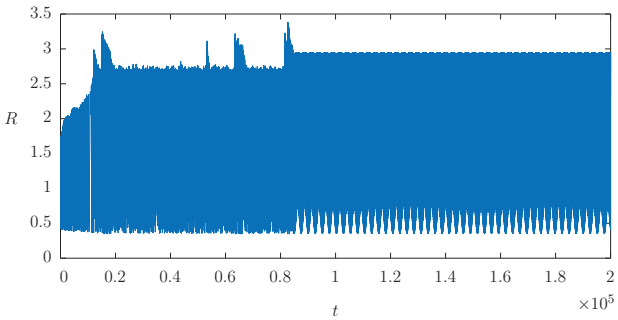

Рис. 3: Визуализация временного ряда R_i

Здесь видно, что динамика изменения значений полярного радиуса R сначала носит хаотический характер, а затем приходит к периодическому закону.

Укажем также, соответствующие аттракторы (Рис. 4).

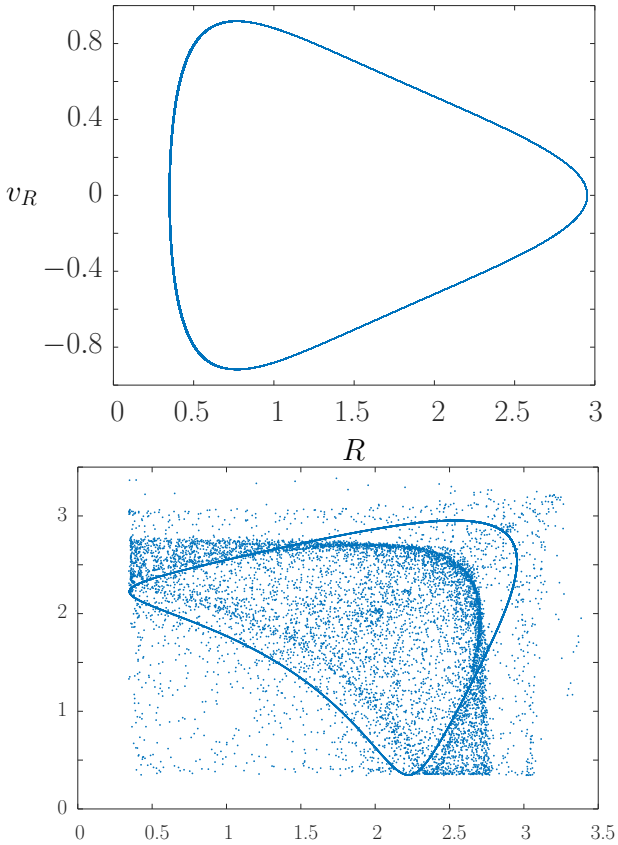

Рис. 4: Фазовый и реконструированный аттракторы

На рис. 4 отображены последние витки аттрактора установившегося периодического движения звезды — розеточная траектория, показан реконструированный аттрактор для всего интервала времени, с начальным хаотическим этапом движения звезды. Видно, что реконструированный аттрактор отражает как хаотическое поведение звезды, так и последующее установившееся периодическое.

2.3) Третий набор: $I = 0.4, R = 0.5, \theta = 0$, $v_R = 0.5$ и $p = 0.6, \alpha = 1.9$.

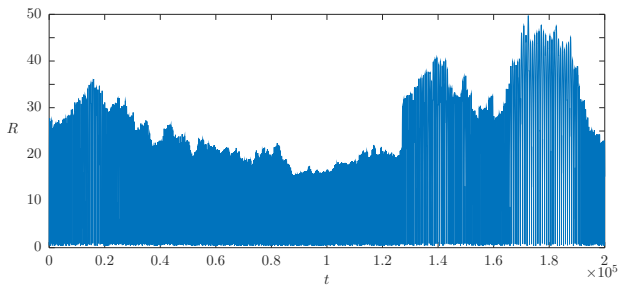

Рис. 5: Визуализация временного ряда R_i

Для реконструкции соответствующего аттрактора и расчёта старшего показателя Ляпунова рассмотрим последние 20000 значений временного ряда R_i псевдоэкспериментальных

данных R_i с шагом численного интегрирования системы, принятым равным двум. Это отразилось на виде реконструированного аттрактора по сравнению с пунктом 2.1).

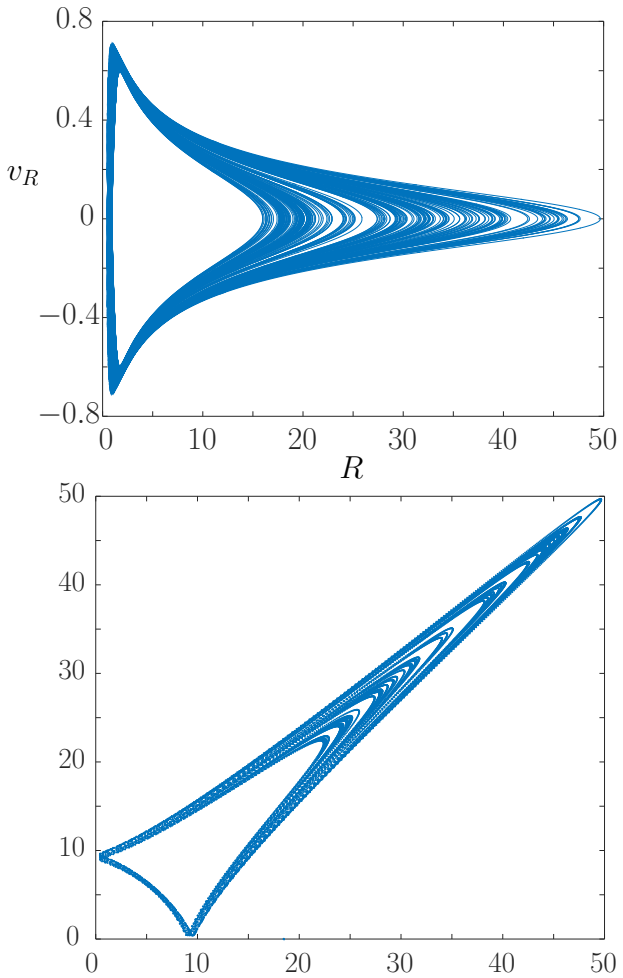

Рис. 6: Фазовый портрет и реконструированный аттрактор

Здесь чётко отражается экспоненциальная скорость разбегания траекторий, изменения значений полярного радиуса R носят хаотический характер с последующим безграничным возрастанием и соответсвующим улетанием звезды.

3. Расчет старшего показателя Ляпунова для различных классов движений звезды.

Теперь, на основе расчитанных реконструированных аттракторов, вычислим значения старших показателей Ляпунова для рассмотренныйх наборов параметров и соответствующих типах движения звезды для случая ротационно-симметричного потенциала φ.

3.1). Первый набор параметров.

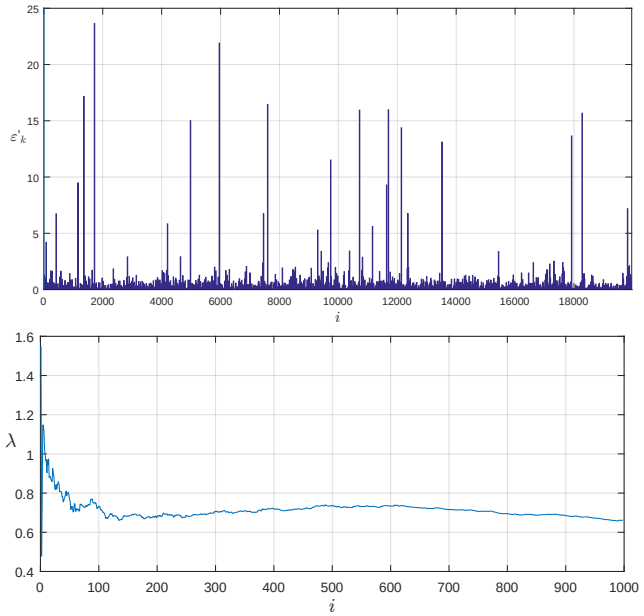

Рис. 7: График разбегания соседних траекторий и $\lambda = 0.6614$

На рис. 7 отображены: график расстояний на которые разбегаются близлежащие траектории на каждом k-м шаге в ходе выполнения метода, а так же график старшего показателя Ляпунова, характеризующего экспоненциальную скорость разбегания, соответственно.

Характер изменения полярного радиуса R, как было показано в пункте 2.1), является хаотическим, что и подтверждается положительным старшим показателем Ляпунова $\lambda = 0.6614$.

3.2) Аналогичные графики на рис. 8,9 для второго набора параметров.

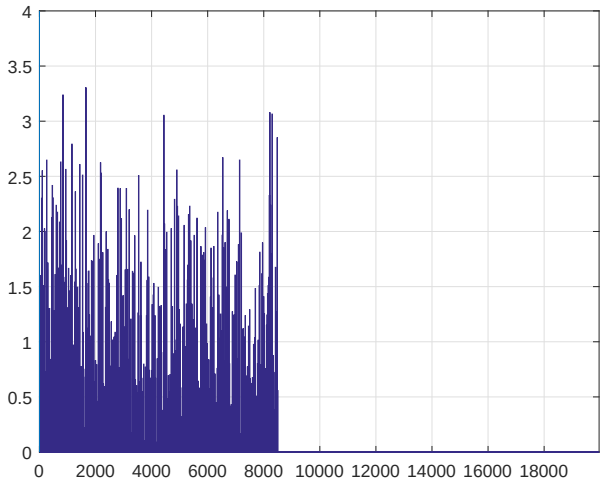

Рис. 8: График разбегания траекторий

Здесь, после 8000 условных единиц времени, псевдоэкспериментальные данные устанавли-

ваются в периодический временной ряд. Разбегание близких траекторий прекращается, остаётся исходно малым, что хорошо видно на рис. 8. Тогда расчёт старшего показателя Ляпунова начинает усредняться со всё большим количеством бесконечно малых величин и, соответственно, устремляется к нулю, что уже показано на следующем графике.

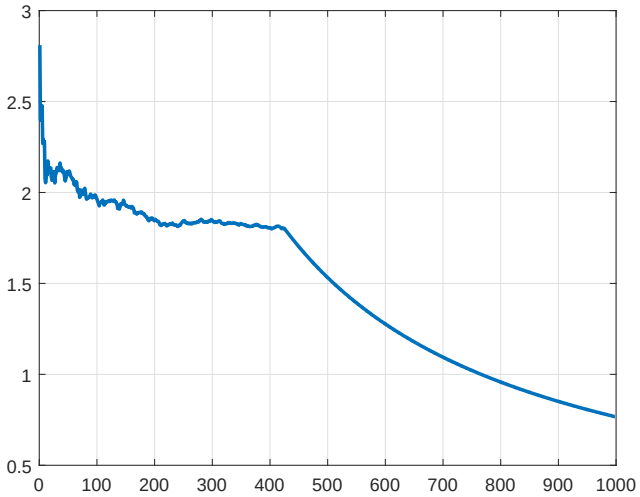

Рис. 9: График старшего показателя Ляпунова

После 1000 итерации значение старшего показателя Ляпунова высчитать не представляется возможным, т.к. оно становится меньшим нуля и забивается погрешностью ошибки наблюдения.

3.3). Третий случай. Соответствующие графики отображены на рис. 10,11.

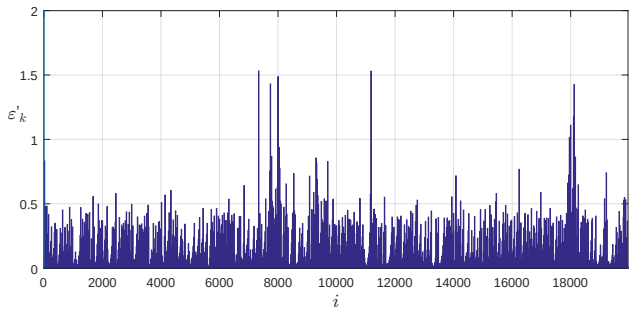

Рис. 10: График разбегания траекторий

Здесь значения расстояний разбегания соседних траекторий являются достаточно существенными, что и характеризует наличие хаотической динамики движения звезды.

Приведём далее график старшего показателя Ляпунова на рис. 11.

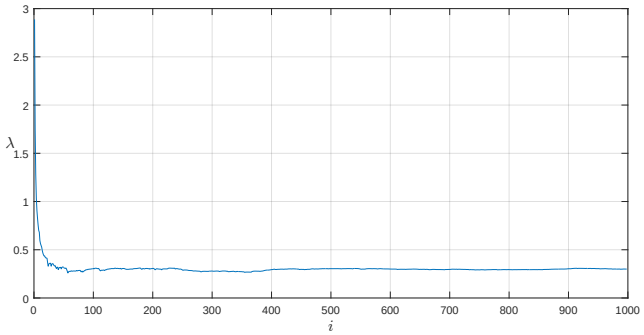

Рис. 11: График старшего показателя Ляпунова

Как видно, старший показатель Ляпунова $\lambda = 0.2984$ положительный, что и отвечает хаотическому типу движения звезды при рассмотренных наборе параметров и начальных данных, по которым производилась генерация временного ряда псевдоэкспериментальных наблюдений.

4. Таким образом, показана возможность идентификации меры хаотического поведения в траекториях ротационно-симметричной модели движения звезды по наблюдаемым данным временных рядов.

Список литературы

[1] Davydenko A. A., Raspopova N. V., Ustimenko S. S. On mass simulations of dynamical models of galaxy // International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015.

[2] Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vasano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica 16D. 1985. P. 285–317.