

Пространственное моделирование сегментов спиральных рукавов и расстояние до центра Галактики

А. В. Веселова, И. И. Никифоров

Санкт-Петербургский государственный университет

«Современная звёздная астрономия — 2016»

КГО ГАИШ МГУ, 8–10 июня 2016 г.

Предыдущий метод. I

Ранее была рассмотрена задача определения геометрических параметров спирального рукава Галактики по его сегменту, в число которых входит расстояние до центра Галактики, в предположении логарифмической модели спирального рукава (Nikiforov, Veselova, 2015).

- Разработан **упрощенный** трехточечный метод: для каждого параметра определяется функция распределения и **медиана** его значений по всем возможным тройкам объектов.
- Применение метода к мазерам рукавов Щита и Персея (Reid et al., 2014) привело к оценке $R_0 = 8.44 \pm 0.45$ кпк.

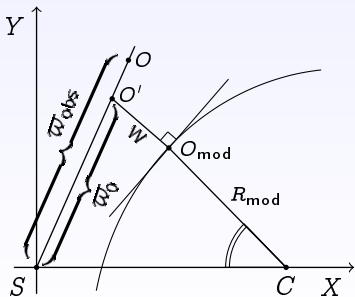
Предыдущий метод. II

- Полученные результаты говорят в пользу работоспособности подхода даже при использовании для оценивания R_0 L-статистики, что делает осмысленной разработку методов на основе M-статистик с учетом неопределенности расстояний и поперечной протяженности спирального рукава.

Метод наибольшего правдоподобия

$$R_{\text{mod}} = R_{\text{mod}}(\lambda, \vec{p}), \quad \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_M).$$

$$L = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp\left[-\frac{w^2(\varpi_{0,j}, \vec{p})}{2\sigma_w^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varpi,j}} \exp\left[-\frac{(\varpi_{\text{obs},j} - \varpi_{0,j})^2}{2\sigma_{\varpi,j}^2}\right],$$



$$\mathcal{L} = -\ln L =$$

$$= N \ln(2\pi) + \sum_{j=1}^N \ln \sigma_{\varpi,j} + N \ln \sigma_w +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \underbrace{\min_{\varpi_{0,j}} \left[\frac{w^2(\varpi_{0,j}, \vec{p})}{2\sigma_w^2} + \frac{(\varpi_{\text{obs},j} - \varpi_{0,j})^2}{2\sigma_{\varpi,j}^2} \right]}_{S_j^2},$$

$$\mathcal{L}(\vec{p}) \longrightarrow \min. \quad (1)$$

Предположения. I

- ❶ Модель спирального рукава — бесконечная логарифмическая спираль

$$R(\lambda; R_0, k, \lambda_0) = |R_0| e^{k(\lambda - \lambda_0)}, \quad (2)$$

$\lambda \in (-\infty; +\infty)$ — поворотная галактоцентрическая долгота, отсчет λ — по часовой стрелке (в направлении вращения Галактики) от направления на Солнце ($\lambda_\odot = 0 \pm 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$);

R_0 — расстояние от Солнца до полюса спирали;

$k = \operatorname{tg} i$, где i — угол закрутки спирали;

$$R(\lambda_0) = |R_0|. \quad (3)$$

Предположения. II

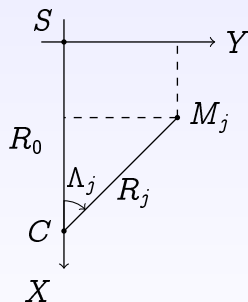
- 2 Объекты, трассирующие спиральную ветвь, принадлежат одному ее витку:

$$\max_{j_1, j_2} |\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}| < 2\pi, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, N. \quad (4)$$

- 3 Полус спирали S находится на прямой, задаваемой направлением от Солнца на центр Галактики, которое предполагается известным.

Номинальные и поворотные долги

Номинальные величины долгот:



$$-\pi < \Lambda_j \leq \pi;$$

$$\sin \Lambda_j = \frac{Y_j}{R_j}, \quad \cos \Lambda_j = \frac{R_0 - X_j}{R_j},$$

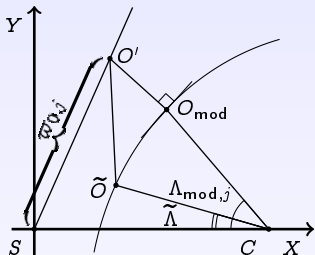
$$j = 1, \dots, N.$$

(5)

Поворотные долготы:

$$\lambda_j = \Lambda_j \pm 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Расстояние от точки до спирали



$$O'(X_{0,j}, Y_{0,j}), \tilde{O}(X(\tilde{\Lambda}), Y(\tilde{\Lambda})).$$

$$X(\tilde{\Lambda}) = R_0 - |R_0|e^{k(\tilde{\Lambda}-\lambda_0)} \cos \tilde{\Lambda},$$

$$Y(\tilde{\Lambda}) = |R_0|e^{k(\tilde{\Lambda}-\lambda_0)} \sin \tilde{\Lambda}.$$

$$|O'\tilde{O}| = \sqrt{(X(\tilde{\Lambda}) - X_{0,j})^2 + (Y(\tilde{\Lambda}) - Y_{0,j})^2}.$$

$$\Lambda_{\text{mod},j} : |O'\tilde{O}| = \min. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (X_{0,j} - R_0) \left(\sin \Lambda_{\text{mod},j} - k \cos \Lambda_{\text{mod},j} \right) - k|R_0|e^{k(\Lambda_{\text{mod},j}-\lambda_0)} + \\ + Y_{0,j} (k \sin \Lambda_{\text{mod},j} + \cos \Lambda_{\text{mod},j}) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

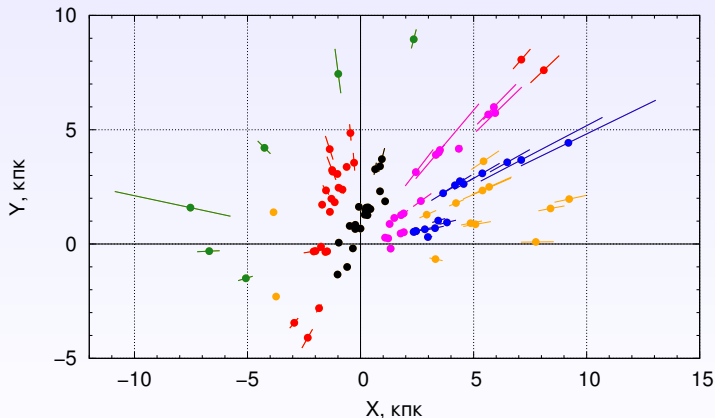
Совместное определение параметров для нескольких сегментов

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & N \ln(2\pi) + \sum_{j=1}^N \ln \sigma_{\varpi,j} + \sum_{s=1}^{N_{\text{arm}}} N_s \ln \sigma_{w,s} + \\ & + \sum_{s=1}^{N_{\text{arm}}} \sum_{j=1}^{N_s} \min_{\varpi_{0,j}} \left[\frac{w^2(\varpi_{0,j}; R_0, i_s, \lambda_{0,s})}{2\sigma_{w,s}^2} + \frac{(\varpi_{\text{obs},j} - \varpi_{0,j})^2}{2\sigma_{\varpi,j}^2} \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Неизвестные параметры (в общем случае)

R_0	i_{Sct}	$\lambda_{0, \text{Sct}}$	$\sigma_{w, \text{Sct}}$
	i_{Sgr}	$\lambda_{0, \text{Sgr}}$	$\sigma_{w, \text{Sgr}}$
	i_{Loc}	$\lambda_{0, \text{Loc}}$	$\sigma_{w, \text{Loc}}$
	i_{Per}	$\lambda_{0, \text{Per}}$	$\sigma_{w, \text{Per}}$
	i_{Out}	$\lambda_{0, \text{Out}}$	$\sigma_{w, \text{Out}}$

Распределение мазерных источников в проекции на плоскость Галактики (Reid et al., 2014)



Рукав Стрельца
Рукав Щита
Рукав Персея

Местный рукав
Внешний рукав

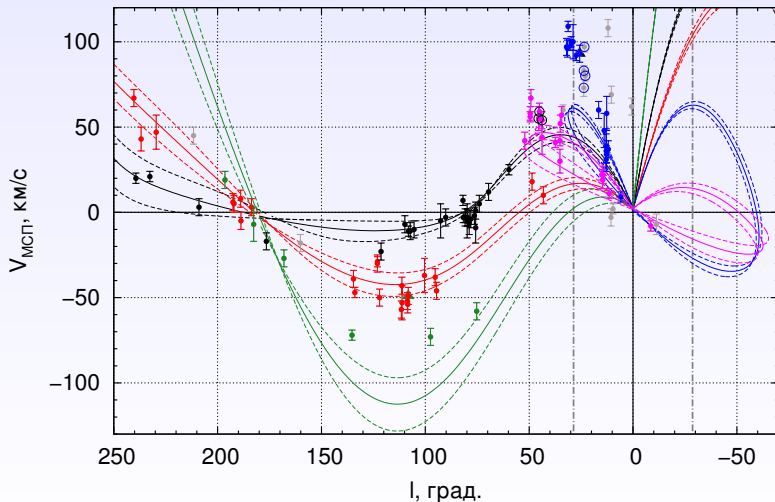
Совместное решение для пяти сегментов

R_0 , кпк	Рукав	i	λ_0	σ_w , кпк
$9.32^{+0.68}_{-0.60}$	Sct	$-23.1^{+3.4}_{-3.1}$	$-41.8^{+5.1}_{-16.5}$	(0.157 ± 0.029)
	Sgr	$-10.8^{+3.6}_{-2.5}$	$-49.0^{+9.0}_{-25.0}$	$0.210^{+0.055}_{-0.027}$
	Loc	$-17.1^{+2.9}_{-2.9}$	$+8.9^{+6.6}_{-6.2}$	$0.260^{+0.050}_{-0.027}$
	Per	$-11.4^{+1.7}_{-1.9}$	$+53.8^{+14.2}_{-6.6}$	$0.258^{+0.063}_{-0.041}$
	Out	$-16.0^{+3.5}_{-3.9}$	$+97.0^{+30.0}_{-18.0}$	(0.607 ± 0.215)

Sct, Out:

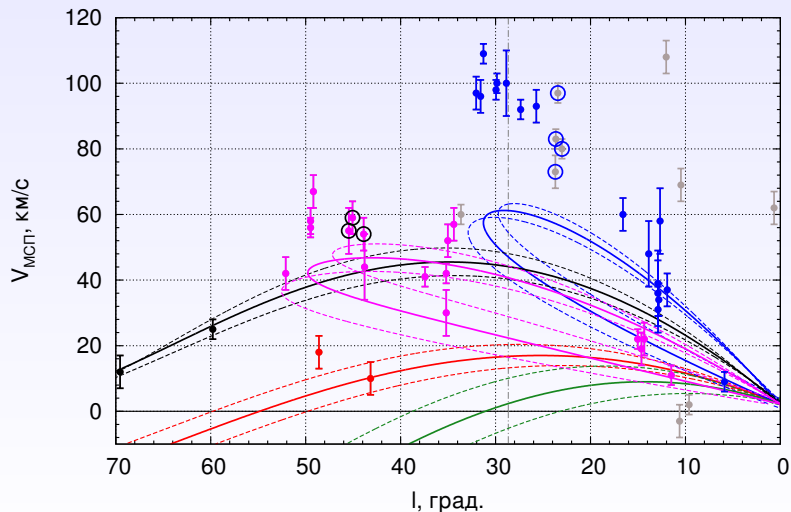
$$\sigma_w : \varsigma_{\varpi}^2 = \frac{1}{N - N_{\text{free}}} \sum_{j=1}^N \frac{(\varpi_{\text{obs},j} - \varpi_j)^2}{\sigma_{\varpi,j}^2} = 1.$$

Диаграмма $l - V_{\text{МСП}}$

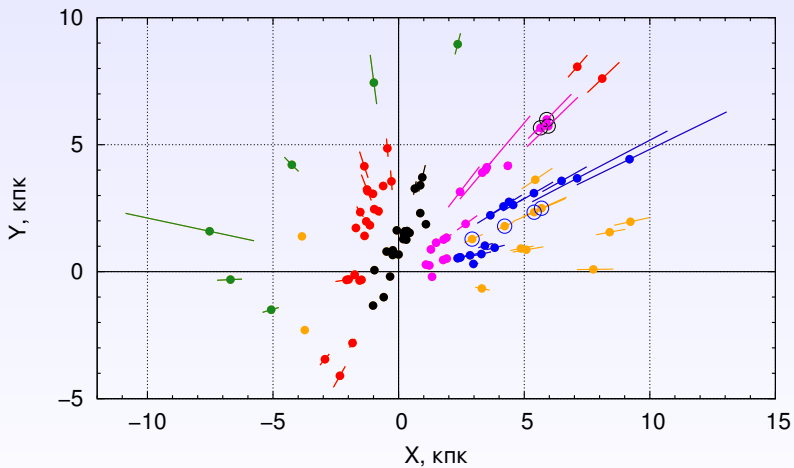


Per —●— Sgr —●— Out —●— Sct —●— Loc —●—

Диаграмма $l - V_{\text{МСП}}$



Per —●— Sgr —●— Out —●— Sct —●— Loc —●—



Рукав Стрельца
 Рукав Щита
 Рукав Персея

Местный рукав
 Внешний рукав

Результаты после переписывания объектов к конкретному сегменту

$$S_j = \min_{s=1,\dots,N_{\text{arm}}} \left\{ \min_{\varpi_{0,j}} \left[\frac{w^2(\varpi_{0,j}; R_0, i_s, \lambda_{0,s})}{2\sigma_{w,s}^2} + \frac{(\varpi_{\text{obs},j} - \varpi_{0,j})^2}{2\sigma_{\varpi,j}^2} \right] \right\}.$$

R_0 , кпк	Рукав	i	λ_0	σ_w , кпк
$8.66^{+0.54}_{-0.49}$	Sct + 4	$-21.9^{+3.4}_{-3.3}$	$-49^{\circ+7^{\circ}}_{-19^{\circ}}$	(0.188 ± 0.031)
	Sgr - 3(Loc)	$-10.6^{+2.6}_{-2.7}$	$-53^{\circ+11^{\circ}}_{-26^{\circ}}$	$0.222^{+0.062}_{-0.033}$
	Loc + 3(Sgr)	$-17.3^{+2.3}_{-2.3}$	$+9.7^{+5.5}_{-4.8}$	$0.246^{+0.046}_{-0.024}$
	Per	$-10.4^{+1.7}_{-1.8}$	$+63^{\circ+16^{\circ}}_{-8^{\circ}}$	$0.261^{+0.063}_{-0.041}$
	Out	$-14.8^{+3.5}_{-3.8}$	$+111^{\circ+35^{\circ}}_{-21^{\circ}}$	(0.607 ± 0.215)

Изучение свойств оценок методом Монте-Карло

R_0	8.66				
$\text{Me } R_0$	$8.69^{+0.47}_{-0.63}$				
$\text{Me } R_0 - R_0$	+0.03				
	Sct	Sgr	Loc	Per	Out
i	$-21^{\circ}9$	$-10^{\circ}6$	$-17^{\circ}3$	$-10^{\circ}4$	$-14^{\circ}8$
$\text{Me } i$	$-21^{\circ}0^{+2^{\circ}9}_{-3^{\circ}2}$	$-10^{\circ}3^{+2^{\circ}4}_{-2^{\circ}7}$	$-17^{\circ}3^{+2^{\circ}1}_{-2^{\circ}2}$	$-10^{\circ}5^{+1^{\circ}5}_{-1^{\circ}8}$	$-14^{\circ}6^{+2^{\circ}8}_{-3^{\circ}0}$
$\text{Me } i - i$	+0.9	+0.3	+0.0	-0.1	+0.2
λ_0	$-48^{\circ}6$	$-52^{\circ}8$	$+9^{\circ}7$	$+63^{\circ}4$	$+111^{\circ}$
$\text{Me } \lambda_0$	$-49^{\circ}8^{+10^{\circ}7}_{-15^{\circ}9}$	$-53^{\circ}5^{+16^{\circ}5}_{-21^{\circ}7}$	$+9^{\circ}6^{+1^{\circ}5}_{-1^{\circ}6}$	$+61^{\circ}4^{+13^{\circ}6}_{-9^{\circ}5}$	$+116^{\circ+28^{\circ}}_{-27^{\circ}}$
$\text{Me } \lambda_0 - \lambda_0$	-1.2	-0.7	-0.1	-2.0	+5.0
σ_w	(0.188)	0.222	0.246	0.261	(0.607)
$\text{Me } \sigma_w$		$0.174^{+0.049}_{-0.053}$	$0.220^{+0.037}_{-0.040}$	$0.166^{+0.066}_{-0.038}$	
$\text{Me } \sigma_w - \sigma_w$		-0.048	-0.026	-0.095	

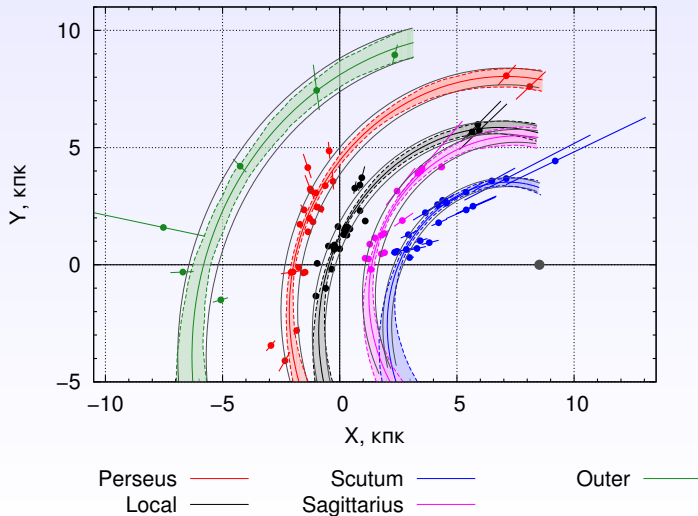
Коррекция результатов методом jackknife

R_0	$8.59^{+0.59}_{-0.52}$				
$R_{0,JK}$	8.52 ± 0.60				
	Sct	Sgr	Loc	Per	Out
i	$-21.6^{+3.6}_{-3.5}$	$-10.4^{+2.9}_{-3.0}$	$-17.0^{+2.4}_{-2.5}$	$-10.5^{+1.9}_{-2.0}$	$-14.7^{+3.5}_{-3.7}$
i_{JK}	-21.5 ± 4.1	-10.6 ± 3.1	-17.3 ± 2.9	-10.6 ± 2.7	-15.3 ± 6.3
λ_0	$-50.0^{+8.0}_{-20.0}$	$-54.0^{+13.0}_{-30.0}$	$+9.9^{+5.3}_{-4.2}$	$+64.0^{+19.0}_{-9.0}$	$+113.0^{+36.0}_{-23.0}$
$\lambda_{0,JK}$	-47.0 ± 18.0	-46.0 ± 24.0	$+9.8 \pm 1.9$	$+59.0 \pm 20.0$	$+88.0 \pm 44.0$
$\sigma_{w,МК}$	(0.188)	(0.275)	(0.272)	(0.355)	(0.607)
$\sigma_{w,МНП}$	(0.188)	$0.222^{+0.062}_{-0.033}$	$0.246^{+0.046}_{-0.024}$	$0.261^{+0.063}_{-0.041}$	(0.607)

Итоговые оценки параметров сегментов

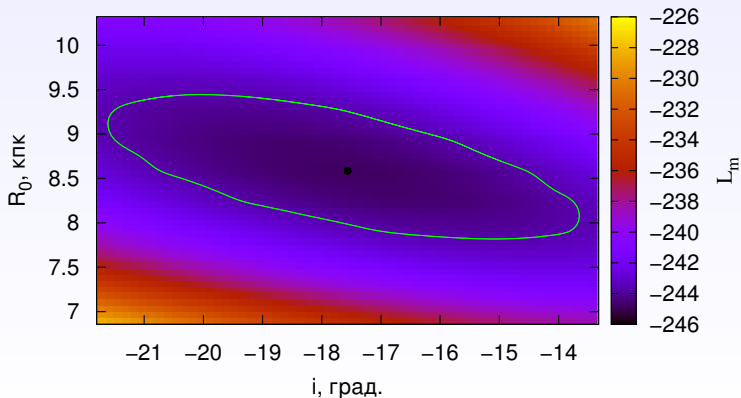
R_0 , кпк	Рукав	i	λ_0	σ_w , кпк
8.52 $^{+0.59}_{-0.52}$	Sct + 4	$-21.5^{+3.6}_{-3.5}$	$-47^{\circ+8^{\circ}}_{-20^{\circ}}$	(0.188 ± 0.031)
	Sgr - 3(Loc)	$-10.6^{+2.9}_{-3.0}$	$-46^{\circ+13^{\circ}}_{-30^{\circ}}$	$(0.275^{+0.070}_{-0.054})$
	Loc + 3(Sgr)	$-17.3^{+2.4}_{-2.5}$	$+9.8^{+5.3}_{-4.2}$	$(0.272^{+0.038}_{-0.055})$
	Per	$-10.6^{+1.9}_{-2.0}$	$+59^{\circ+19^{\circ}}_{-9^{\circ}}$	$(0.355^{+0.073}_{-0.057})$
	Out	$-15.3^{+3.5}_{-3.7}$	$+88^{\circ+36^{\circ}}_{-23^{\circ}}$	(0.607 ± 0.215)

Доверительные области для сегментов рукавов

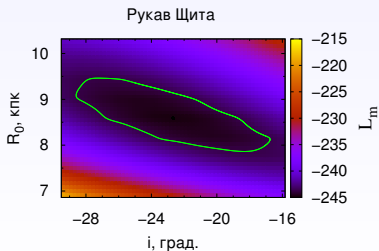
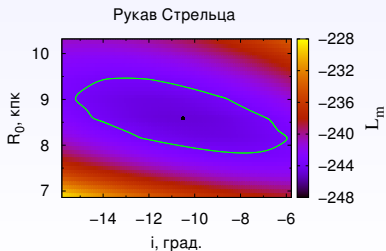
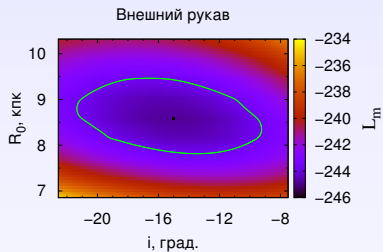
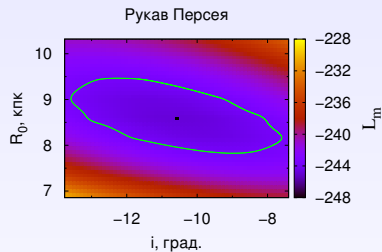


Доверительная область для параметров i и R_0 . Местный рукав

$$\mathfrak{L}_m = \mathfrak{L}_0 + 1.15; \quad \mathfrak{L}_0 \equiv \min \mathfrak{L}; \quad \mathfrak{L}_m \equiv \min_{R_0, i = \text{const}} \mathfrak{L}.$$



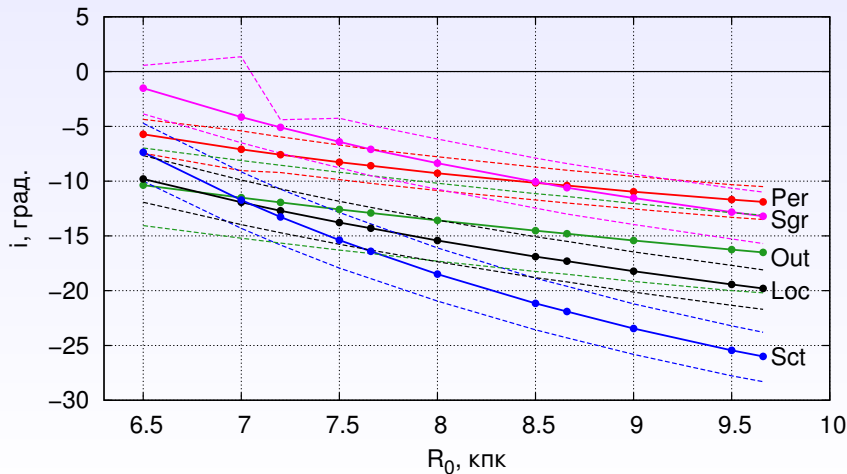
Доверительная область для параметров i и R_0



Коэффициенты корреляции для R_0 и i_s

	Sct	Sgr	Loc	Per	Out
$r(R_0, i_s)$	-0.80	-0.62	-0.73	-0.50	-0.22
P_r	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$

Зависимость углов закрутки от значения R_0



Выводы. I

- 1 В рамках метода наибольшего правдоподобия разработан алгоритм пространственного моделирования сегментов спиральных рукавов Галактики с учетом дисперсии поперек рукава и неопределенности гелиоцентрических расстояний.
- 2 В рамках предложенного подхода после коррекции дисперсий поперек рукава методом Монте-Карло и исправления оценок параметров за конечность выборки получена оценка расстояния до центра Галактики $R_0 = 8.52^{+0.59}_{-0.52}$ кпк и оценки параметров 5 сегментов спиральных рукавов Галактики.

Выводы. II

- 3 Полученные результаты свидетельствуют в пользу различия углов закрутки у различных сегментов рукавов.
- 4 Обнаружена сильная зависимость оценки углов закрутки от предполагаемого значения R_0 : с увеличением значения R_0 спирали становятся более открытыми.
- 5 Разработанная техника применима к произвольным моделям сегментов и функциям распределения ошибок расстояний, а также к разным типам объектов, трассирующих спиральную структуру.

Переменность угла закрутки

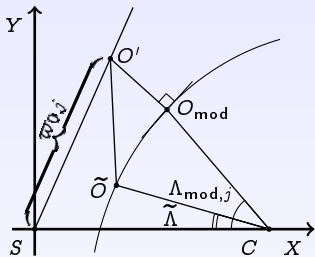
Savchenko & Reshetnikov (2013): спиральные рукава большинства галактик не могут быть описаны моделью с постоянным углом закрутки.

Рассмотрена линейная зависимость угла закрутки i от галактоцентрической долготы λ :

$$i(\lambda) = i_0 + i_1 \cdot (\lambda - \lambda_0), \quad k(\lambda) \equiv \operatorname{tg} i(\lambda), \quad (9)$$

$$R(\lambda; R_0, i_0, i_1, \lambda_0) = |R_0| e^{k(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_0)}. \quad (10)$$

Расстояние от точки до модельной кривой



$$X(\tilde{\Lambda}) = R_0 - |R_0| e^{k(\tilde{\Lambda}) \cdot (\tilde{\Lambda} - \lambda_0)} \cos \tilde{\Lambda},$$

$$Y(\tilde{\Lambda}) = |R_0| e^{k(\tilde{\Lambda}) \cdot (\tilde{\Lambda} - \lambda_0)} \sin \tilde{\Lambda}.$$

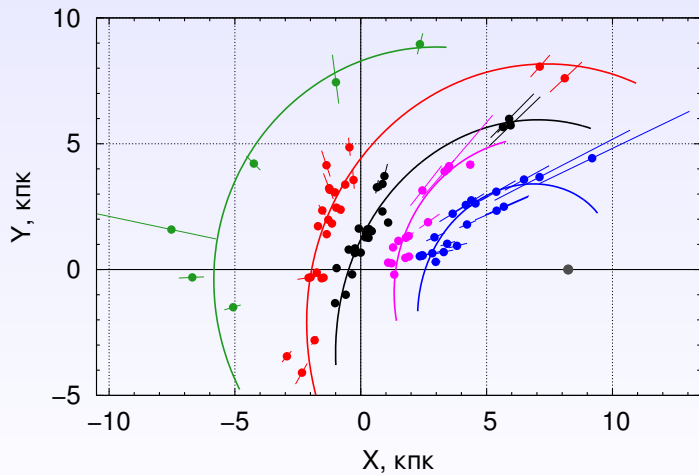
$$k(\tilde{\Lambda}) \equiv \operatorname{tg} i(\tilde{\Lambda}) = \operatorname{tg} (i_0 + i_1 \cdot (\tilde{\Lambda} - \lambda_0)).$$

$$\begin{aligned} & \left(\sin \Lambda_{\text{mod},j} - \left[k + \frac{i_1 (\Lambda_{\text{mod},j} - \lambda_0)}{\cos^2 i} \right] \cos \Lambda_{\text{mod},j} \right) (X_{0,j} - R_0) + \\ & + \left(\cos \Lambda_{\text{mod},j} + \left[k + \frac{i_1 (\Lambda_{\text{mod},j} - \lambda_0)}{\cos^2 i} \right] \sin \Lambda_{\text{mod},j} \right) Y_0 - \\ & - \left[k + \frac{i_1 (\Lambda_{\text{mod},j} - \lambda_0)}{\cos^2 i} \right] |R_0| e^{k(\Lambda_{\text{mod},j}) \cdot (\Lambda_{\text{mod},j} - \lambda_0)} = 0. \end{aligned}$$

Результаты

$$S_j = \min_{s=1,\dots,N_{\text{arm}}} \left\{ \min_{\varpi_{0,j}} \left[\frac{w^2(\varpi_{0,j}; R_0, i_{0,s}, i_{1,s}, \lambda_{0,s})}{2\sigma_{w,s}^2} + \frac{(\varpi_{\text{obs},j} - \varpi_{0,j})^2}{2\sigma_{\varpi,j}^2} \right] \right\}.$$

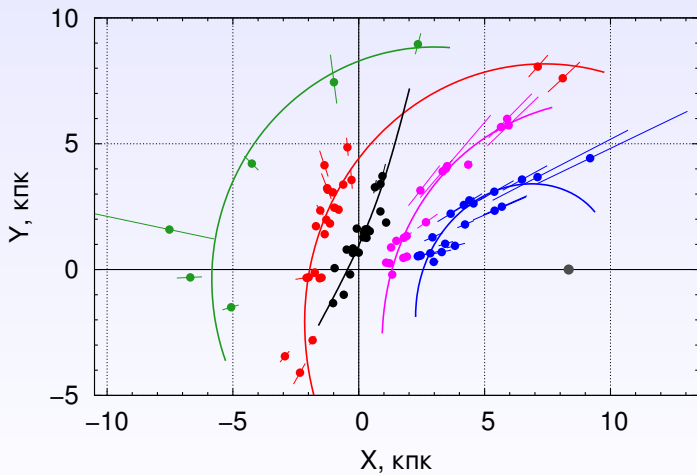
R_0 , кпк	Рукав	i_1	σ_w , кпк	$\mathcal{L}_0$
$8.24^{+1.61}_{-0.61}$	Sct + 4	-0.03 ± 0.21	(0.188)	-247.6
	Sgr - 3(Loc)	-0.027 ± 0.037	$0.217^{+0.063}_{-0.034}$	
	Loc + 3(Sgr)	$+0.04 \pm 0.11$	$0.245^{+0.046}_{-0.024}$	
	Per	$+0.029 \pm 0.076$	$0.260^{+0.063}_{-0.041}$	
	Out	-0.23 ± 0.21	(0.607)	



Per — Loc — Sct — Sgr — Out —

Результаты

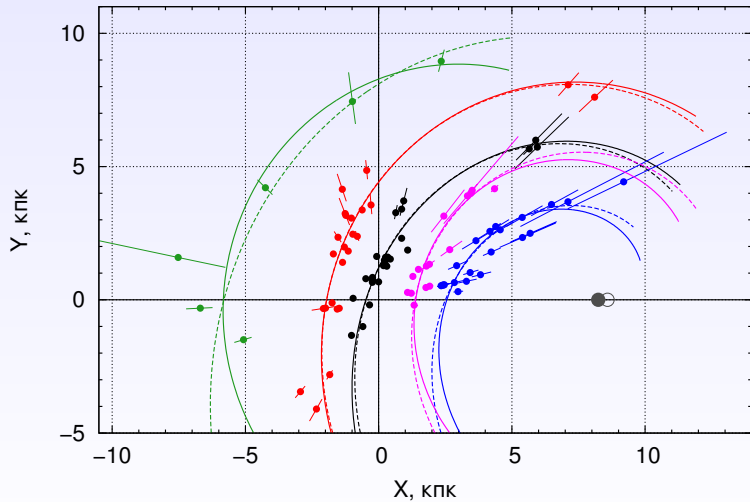
R_0 , кпк	Рукав	i_1	σ_w , кпк	$\mathcal{L}_0$
$8.34^{+1.82}_{-0.71}$	Sct + 4	-0.04 ± 0.25	(0.188)	-251.6
	Sgr	$+0.15 \pm 0.12$	$0.210^{+0.053}_{-0.027}$	
	Loc	$+0.66 \pm 0.20$	$0.231^{+0.044}_{-0.021}$	
	Per	$+0.024 \pm 0.092$	$0.260^{+0.063}_{-0.041}$	
	Out	-0.23 ± 0.22	(0.607)	



Per — Loc — Sct — Sgr — Out —

Сравнение результатов

	$i_s = \text{const}$	$i_{\text{Loc}} \neq \text{const}$	$i_s \neq \text{const}$
	3 to Loc		
$R_{0, \text{МНП}}$	$8.66^{+0.52}_{-0.49}$	$8.54^{+0.63}_{-0.57}$	$8.24^{+1.61}_{-0.61}$
$i_{1, \text{Loc}}$		$+0.025 \pm 0.067$	$+0.042 \pm 0.107$
	3 to Sgr		
$R_{0, \text{МНП}}$	$9.09^{+0.62}_{-0.56}$	$8.91^{+0.62}_{-0.56}$	$8.34^{+1.82}_{-0.71}$
$i_{1, \text{Loc}}$		$+0.668 \pm 0.206$	$+0.658 \pm 0.195$



Per — Loc — Sct — Sgr — Out —

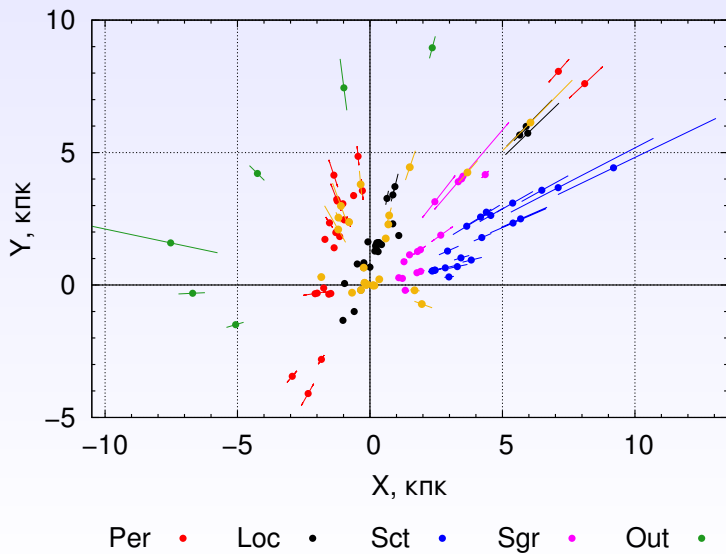
Спасибо
за внимание!

Параметры сегментов в случае переменного угла закрутки

R_0 , кпк	Рукав	i_0	i_1	λ_0	σ_w , кпк
$8.34^{+1.82}_{-0.71}$	Sct + 4	$-12^{\circ+67^{\circ}}_{-34^{\circ}}$	-0.04 ± 0.25	$-75^{\circ+51^{\circ}}_{-271^{\circ}}$	(0.188)
	Sgr	$-23^{\circ+9^{\circ}.6}_{-6^{\circ}.8}$	$+0.15 \pm 0.12$	$-28^{\circ+5^{\circ}}_{-24^{\circ}}$	$0.210^{+0.053}_{-0.027}$
	Loc	$-15^{\circ+3^{\circ}.6}_{-3^{\circ}.5}$	$+0.66 \pm 0.20$	$+8^{\circ+47^{\circ}}_{-7^{\circ}}$	$0.231^{+0.044}_{-0.021}$
	Per	$-7^{\circ+31^{\circ}}_{-11^{\circ}}$	$+0.024 \pm 0.092$	$+77^{\circ+180^{\circ}}_{-40^{\circ}}$	$0.260^{+0.063}_{-0.041}$
	Out	$-39^{\circ+17^{\circ}}_{-15^{\circ}}$	-0.23 ± 0.22	$+76^{\circ+38^{\circ}}_{-17^{\circ}}$	(0.607)

Параметры сегментов в случае переменного угла закрутки

R_0 , кпк	Рукав	i_0	i_1	λ_0	σ_w , кпк
$8.24^{+1.61}_{-0.61}$	Sct + 4	$-15^{\circ+53^{\circ}}_{-32^{\circ}}$	-0.03 ± 0.21	$-72^{\circ+42^{\circ}}_{-205^{\circ}}$	(0.188)
	Sgr -3(Loc)	$-0^{\circ+48^{\circ}}_{-45^{\circ}}$	-0.027 ± 0.037	$-150^{\circ+730^{\circ}}_{-970^{\circ}}$	$0.217^{+0.063}_{-0.034}$
	Loc+3(Sgr)	$-17.2^{+2.6}_{-2.9}$	$+0.04 \pm 0.11$	$+10.2^{+5.7}_{-8.0}$	$0.245^{+0.046}_{-0.024}$
	Per	$-6^{\circ+34^{\circ}}_{-11^{\circ}}$	$+0.029 \pm 0.076$	$+82^{\circ+192^{\circ}}_{-47^{\circ}}$	$0.260^{+0.063}_{-0.041}$
	Out	$-39^{\circ+18^{\circ}}_{-15^{\circ}}$	-0.23 ± 0.21	$+77^{\circ+37^{\circ}}_{-16^{\circ}}$	(0.607)



Типы объектов выборки

28 объектов (Rastorguev et al., 2016).

Type	Number		Type	Number
X-ray binary	2		YSO	2
young binary	2		HMYSO	1
microquasar	1		IMYSO	1
HMSFR	1		LMYSO	1
MSFR	3		young star	4
IMSFR	1		protostellar system	1
SFR	3		T Tau	4

Природа источника IRAS 22555+6213 не проясняется авторами работы (Chibueze et al., 2014).

Сравнение результатов

	$i_s = \text{const}$	$i_{\text{Loc}} \neq \text{const}$	$i_s \neq \text{const}$
	4 to Loc		
$R_{0, \text{МНП}}$	$8.50^{+0.50}_{-0.44}$	$8.68^{+0.53}_{-0.59}$	$8.03^{+1.45}_{-0.44}$
$i_{1, \text{Loc}}$		-0.039 ± 0.067	$+0.001 \pm 0.068$
	4 to Sgr		
$R_{0, \text{МНП}}$	$9.26^{+0.59}_{-0.52}$	$9.01^{+0.58}_{-0.52}$	$8.43^{+1.30}_{-0.64}$
$i_{1, \text{Loc}}$		$+0.596 \pm 0.163$	$+0.591 \pm 0.172$

Результат переприписывания зависит от начального приближения для набора параметров.

Определение границ доверительных интервалов

- Точные значения границ доверительного интервала для параметра a_j удовлетворяют уравнению

$$\mathfrak{L}_m(a_j) = \mathfrak{L}_0 + \frac{1}{2}; \quad \mathfrak{L}_0 = \min \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}_m(a_j) = \min_{a_j = \text{const}} \mathfrak{L}.$$

- Параболическое приближение:

$$a_j^- = a_j - \Delta a_j, \quad a_j^+ = a_j + \Delta a_j;$$
$$\sigma^- = \frac{\Delta^2 a_j}{\mathfrak{L}_m(a_j^-) - \mathfrak{L}_0}, \quad \sigma^+ = \frac{\Delta^2 a_j}{\mathfrak{L}_m(a_j^+) - \mathfrak{L}_0}.$$

Доверительный интервал имеет вид $(a_j - \sigma^-, a_j + \sigma^+)$.