Расчёт спектра показателей Ляпунова для одной модели галактики

Конюхова О. И., Латыпова А. Н., Степенко Н. А.

СПбГУ, nick_st@mail.ru

1. Рассмотрим движение звезды в плоскости симметрии звёздной системы, задающееся системой дифференциальных уравнений в полярных координатах (r, θ):

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad r^2\dot{\theta} = I.$$

Здесь интеграл площадей I является постоянной, однозачно определяемой начальным расстоянием и скоростью звезды, а $U = U(r)$ — гравитационный потенциал, в силу ротационно-симметричности, не зависящий от переменной θ. При этом будем считать, что потенциал U задаётся формулами [2] вида:

$$U(r) = \frac{\alpha}{\alpha - 1 + w(r)}, \quad w(r) = \Big(1 + \alpha^p r^p\Big)^{1/p}$$

при структурных параметрах $\alpha, p > 0$.

Тогда, с учётом вида потенциала U, окончательно получаем систему

$$\dot{r} = v_r, \quad \dot{\theta} = \frac{I}{r^2}, \quad \dot{v}_r = \frac{I^2}{r^3} - \frac{\alpha^{p+1}r^{p-1}\Big(1+\alpha^p r^p\Big)^{(1-p)/p}}{\Big(\alpha - 1 + \big(1+\alpha^p r^p\big)^{1/p}\Big)^2}. \tag{1}$$

Все используемые переменные являются безразмерными. Для перехода от безразмерных единиц к размерным необходимо домножить на соответствующий размерный коэффициент.

2. Экспоненциальная скорость разбегания (сближения) соседних траекторий по разным направлениям задаёт *спектр показателей Ляпунова*. Одномерные показатели Ляпунова по каждой координате определяются через длины $p_i(t)$ главных осей эллипсоида [1]:

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)}.$$

Проведём вычисление спектра показателей Ляпунова для системы (1) методом Вольфа [1] при фиксированных параметрах $0 < \alpha \leq 4$, $0 < p \leq 4$ с шагом дискретизации изменения значений 0.01.

Определим матрицу $L\{\lambda_{\max}(i,j)\}$ элементами которой являются старшие показатели Ляпунова, расчитанные для параметров $p = i/100$ и $\alpha = j/100$ при фиксированных значениях начальной точки системы (1) и интеграла площадей I.

На рис. 1 чётко выделяются две области параметров, отвечающие нулевым (темно-синий цвет) и положительным (ярко-жёлтый цвет) значениям старшего показателя Ляпунова.

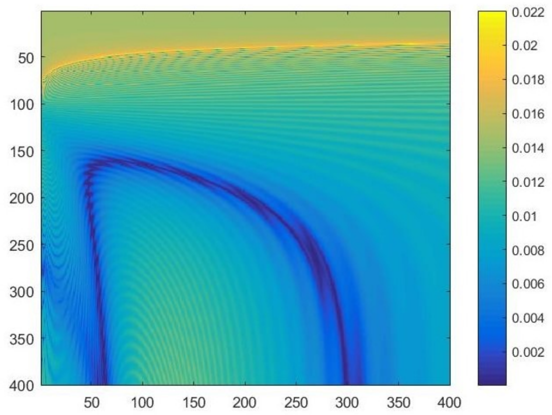

Рис. 1: Визуальное представление матрицы L старших показателей Ляпунова при $I = 0.7016$ и $r_0 = 1.2, \theta = 0, v_{r0} = 0$

3. Рассмотрим значения $I = 0.7016$ и $r_0 = 1.2, \theta = 0, v_{r0} = 0$, а также фиксированные $p = 0.4$ и $\alpha = 2$. Приведём графики, отображающие динамику движения звезды (рис. 2):

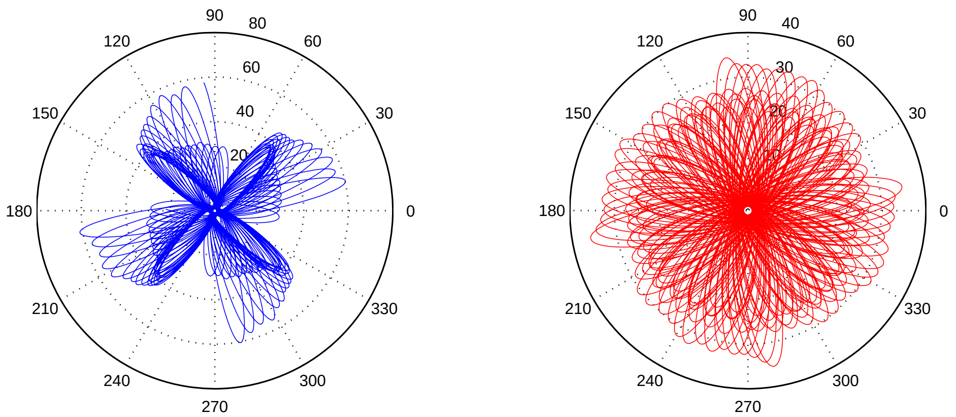

Рис. 2: Фазовые портреты для начальных точек (1.2,0,0) и (1.2001,0,0)

Движения невозмущённой звезды и возмущённой сильно отличаются, что характеризуется положительной экспоненциальной скоростью разбегания траекторий $\lambda_{\max}(40, 200) \approx 0.022$.

4. Таким образом, показана возможность наличия положительных показателей Ляпунова в ротационно-симметричной модели звёздной системы и указаны области соответствующих параметров.

Список литературы

[1] Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vasano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica 16D. 1985. P. 285–317.

[2] Davydenko A. A., Raspopova N. V., Ustimenko S. S. On mass simulations of dynamical models of galaxy // International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015.

Рассматривается алгоритм расчёта спектра показателей Ляпунова для определённых динамических систем. Показатели Ляпунова обеспечивают качественную и количественную характеристику динамического поведения. Они связаны с экспоненциальной скоростью расхождения или сближения соседних орбит в фазовом пространстве. Система с положительными показателями Ляпунова допускает наличие хаотических траекторий движений. На примере предложенной модели галактики, исследуется область возможных параметров для систем с хаотической динамикой движения звёзд. Определяются основные типы движений звёзд в галактике. Строятся графики выборочных звёздных орбит для различных наборов параметров системы.

An algorithm for calculating the spectrum of Lyapunov exponents for certain dynamical systems. Lyapunov exponents provide a qualitative and quantitative characterization of dynamic behavior. They are associated with an exponential rate of convergence and divergence of neighboring orbits in the phase space. The system with non-negative Lyapunov exponents admit the existence of chaotic trajectories of movement. For example, the proposed model of the galaxy, we investigate the range of possible options for systems with chaotic dynamics of motion of stars. Defines the main types of motions of stars in the galaxy. Plotted sample stellar orbits for different sets of parameters of the system.