"Modern Stellar Astronomy – 2016"
(June 08-10 2016, Kislovodsk, Russia)

Кратность звёздных сближений и классические расходимости

Ещё раз о физических основаниях звёздной динамики

А.С. Расторгуев[1,2], О.В. Чумак[1], Н.Д. Уткин[1,2]

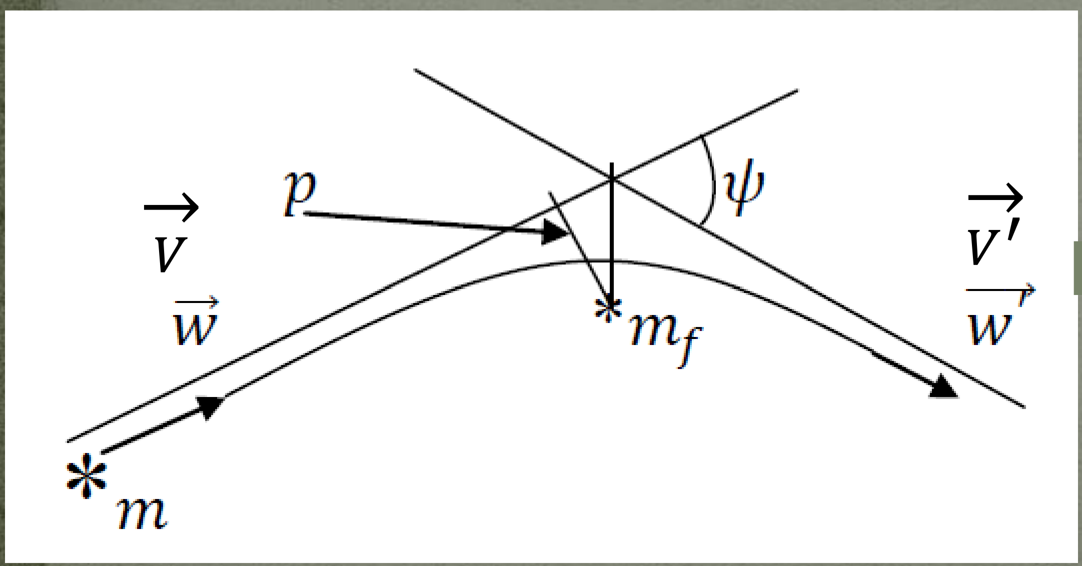
1 – ГАИШ МГУ, 2 – физфак МГУ

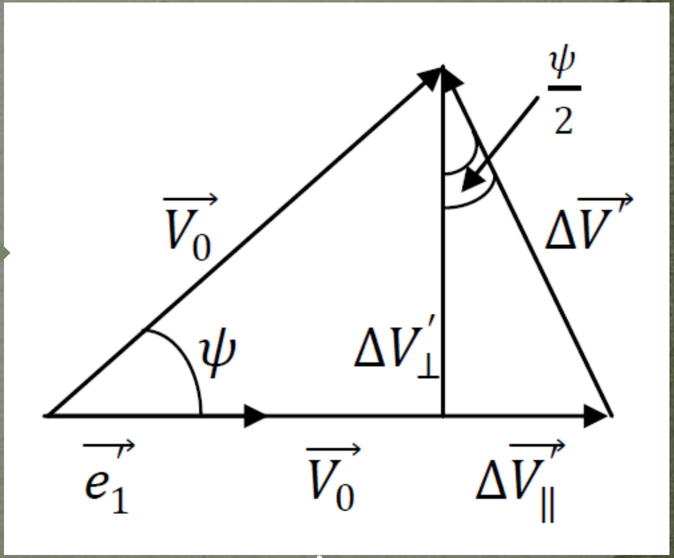
Классика: релаксация вследствие парных звёздных сближений

- S. Chandrasekhar
- R. Williamson
- К. Огородников
- В. Амбарцумян
- П. Паренаго
- Т. Агекян
- H. Kandrup
- M. Henon
- R. Cohen
- L. Spitzer … и другие

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{G\left(m + m_f\right)}{V^2\, p} = \frac{p_\perp}{p}$$

Торможение + рассеяние





Результат *полностью завершённого* парного сближения

$$p_{\perp} = \frac{G(m+m_f)}{V^2}$$ -

- прицельный параметр тесного сближения

- В солнечной окрестности $p_{\perp} \sim 1 - 2 \text{ а. е.}$
- **Основная идея столкновительной динамики:** изменение скорости (за вычетом “регулярного“ движения) за достаточно длительное время вызывается множественными сближениями с разными прицельными параметрами ***p*** кумулятивный эффект !), формально – от ***p = 0*** до ***p*** $\to \infty$
- **Основная проблема:** расходимость оценки кумулятивного эффекта при ***p*** $\to \infty$ и **физическая суть релаксации**

- Изменения скоростей в инерциальной системе
- $\Delta V_{||} = -\frac{2Gm_f p_\perp}{V} \times \frac{1}{p^2+p_\perp^2}$ $\Delta V_\perp = \frac{2Gm_f}{V} \times \frac{p}{p^2+p_\perp^2}$

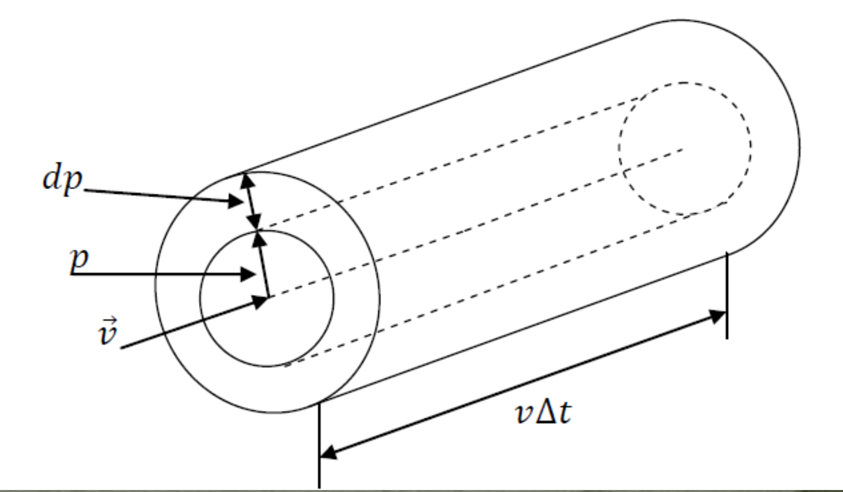
  используются для вычисления компонентов тензора диффузии ("ускорений")
- $\langle \Delta V_i \rangle, \langle \Delta V_i \cdot \Delta V_j \rangle,$

  в свою очередь, входящих в диффузионное уравнение Фоккера-Планка
- $\Delta V_{||}$, $\Delta V_\perp^2$

  интегрируют по p с весом

  $dv = 2\pi \cdot p \cdot dp \cdot V \cdot n,$

  равным числу звёзд в цилиндрическом слое



- Результаты классического интегрирования:
- Линейный коэффициент диффузии **(динамическое трение)**

$$\langle \Delta V_i \rangle \sim -2\pi G m_f \, p_\perp \, n \times \int_0^{p_{max}} \frac{2p\,dp}{p^2+p_\perp^2} =$$

$$= -\,4\pi G m_f \, p_\perp \, n \, ln \, \frac{p_{max}}{p_\perp}$$

- Квадратичный коэффициент диффузии **(рассеяние)**

- $$\left\langle \Delta V_i \cdot \Delta V_j \right\rangle \sim \frac{4\,\pi\, G^2\, m_f^2 n}{V} \times \int_0^{p_{max}} \frac{2p^3\,dp}{(p^2+p_\perp^2)^2} =$$

$$= \frac{8\,\pi\, G^2\, m_f^2 n}{V} \; ln \, \frac{p_{max}}{1.22 \cdot p_\perp}$$

- **Логарифмические расходимости !**

- **Варианты классического выхода из положения:**
- 1) p_{max} ~ R_{sys} - размер системы (Джинсовская длина, масштаб неоднородности) -
- (Амбарцумян, Огородников, King, Binney и многие специалисты по физике плазмы)

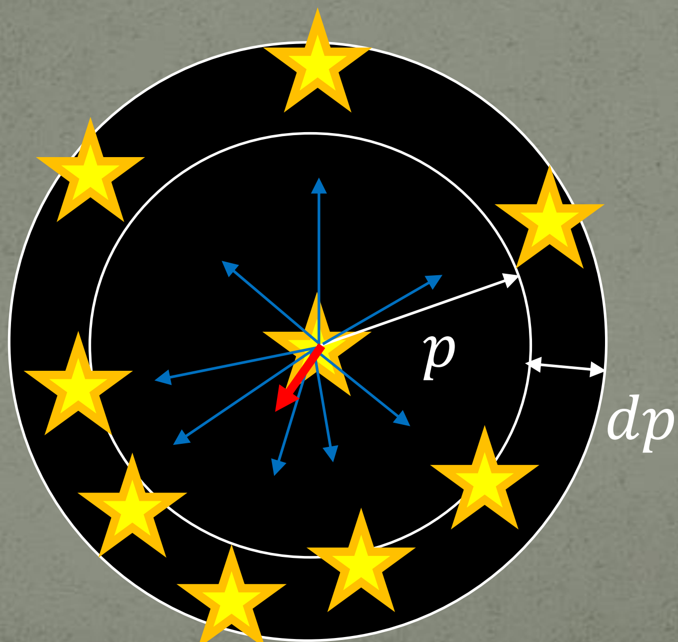
- Слабые места:
  - Чисто формально-математический подход (т.к. логарифмическая расходимость - слабая)
  - Далёкие сближения – все кратные и не завершённые
  - В иррегулярную силу фактически включается часть вклада регулярного поля, значительно завышающая изучаемый эффект сближений

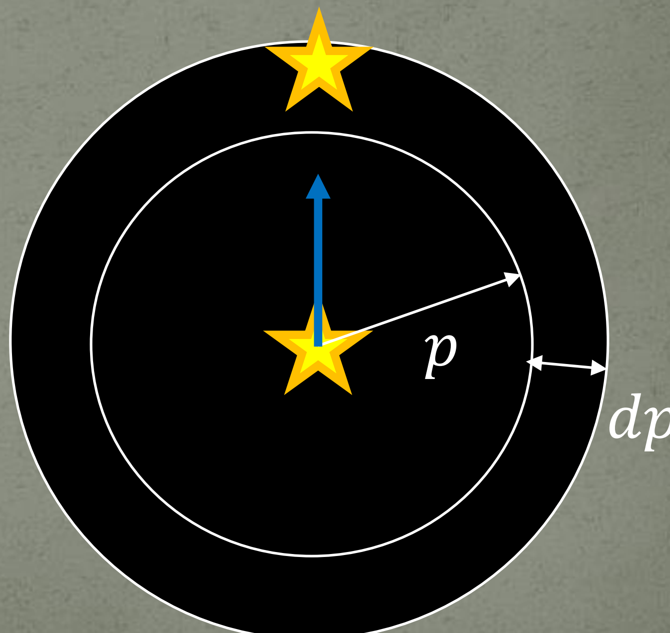
- **Варианты классического выхода из положения:**
- 2) $\boldsymbol{p_{max} \sim d_0 \approx 0.554/n^{1/3}}$ среднее межчастичное расстояние (из распределения Герца для расстояния ближайшего соседа)
- (Chandrasekhar, Williamson, Агекян и др.)

- Обоснование:
  - В основном интуитивное: такие сближения в первом приближении можно считать ***однократными и почти завершёнными,*** и к их описанию применимо приближение парных сближений

Эффект кратности далёких звёздных сближений в статической однородной звёздной среде Хольцмарка:

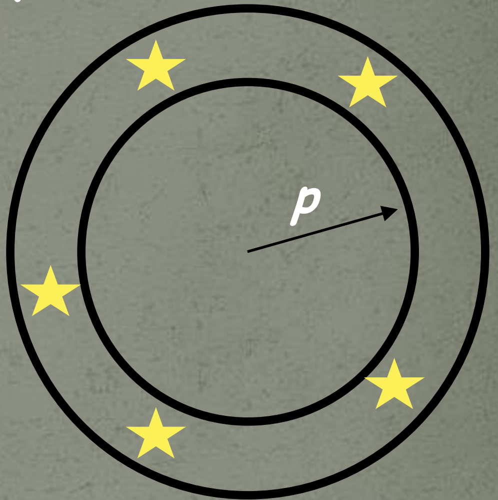
Истинная роль каждой звезды поля в среднем меньше, чем если бы эта звезда участвовала в парном сближении с пробной звездой, из-за гравитационного "нивелирования" вкладов далёких звёзд





Чем больше p, тем значительнее эти различия

- **Основа: учёт кратности звёздных сближений** (Т.А.Агекян, SvA V.5, P.809, 1962)
- При интегрировании по прицельным параметрам вклад сближений в случайную силу преувеличивается



- в $\lambda(p) = \frac{\Delta F_{rnd}}{\Sigma|F_p|}$ раз, где
- $\boldsymbol{\Delta F_{rnd}}$ - полная случайная сила, действующая на пробную звезду со стороны сферического слоя (*p, p+dp*) (модуль геометрической суммы сил)
- $\boldsymbol{\Sigma|F_p|}$ - арифметическая сумма сил, действующих на пробную звезду со стороны звёзд из сферического слоя (*p, p+dp*)

- Вывод выражения для ΔF_{rnd} аналогичен выводу распределения Хольцмарка (Чандрасекар, 1943):
- $\lambda(p) = \lambda(\bar{N})$, где
- $\bar{N}$ – среднее число звёзд в сфере радиуса p; тогда

$$\lambda(\bar{N}) \approx \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} exp\left\{-\underbrace{\frac{2\sqrt{2\pi}}{5}}_{\sim 1.003}\bar{N}x^{\frac{3}{2}}\right\}dx$$

- Уже на расстоянии d_0 эффект кратности завышает случайную силу **более чем в 3 раза !**

$\bar{N}$	$\lambda(\bar{N})$	$\bar{N}$	$\lambda(\bar{N})$
0	1.0	1.0	0.185
0.01	0.87	2	0.119
0.03	0.763	3	0.091
0.1	0.577	5	0.065
0.25	0.402	10	0.041
в пределах $\bar{d}$ → 0.50	0.279	20	0.026
0.75	0.220	100	0.009

- Сам Агекян (1962) применил фактор редукции только к выведенному им в 1959 г. выражению для вероятности звёздного сближения с заданным изменением скорости (простейший случай - Максвелловское распределение скоростей):

$$P(v^2,h)=\frac{8\sqrt{6\pi}G^2m^2n}{\overline{v_f}v^2|h^3|}\int\limits_0^{\sqrt{1+\frac{1}{2}(|h|-h)}}(4k^2+|h|)e^{-\frac{3v^2}{2\overline{v^2}}\left(k^2+\frac{|h|+h}{2}\right)}dk$$

- В результате расходимость для далёких сближений с асимптотикой ~ $h^{-3} \sim (\Delta V^2 / V^2)^{-3} \to \infty$ ослабляется до h^{-1}
- Фактор редукции был применён Агекяном (1962) при реализации подхода Колмогорова-Феллера, описывающего, в т.ч., ***тесные сближения*** с большими изменениями скоростей

Изменение скорости пробной звезды за промежуток времени Δt происходит за счёт сближений со всеми p

Строго говоря, надо честно рассчитывать:

$$P(v^2, h) = \int_0^{+\infty} dp \cdot \lambda(p) \cdot (\dots)$$

Агекян для упрощения фактически применил теорему о среднем:

$$P(v^2, h) = \int_0^{+\infty} dp \cdot \lambda(p) \cdot (\dots) = \boldsymbol{\lambda(\bar{p})} \cdot \int_0^{+\infty} dp \cdot (\dots) =$$

$= \boldsymbol{\lambda(\bar{p})} \cdot \tilde{P}(v^2, h)$, где $\bar{p}$ - характерное значение прицельного параметра, сближения с которым в среднем приводят к Δv^2: $\frac{\Delta v^2}{v^2} = h$

- Уравнение баланса в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = -\int\limits_{\{\Delta\vec{v}\}} \left[f(\vec{v})\psi(\vec{v},\Delta\vec{v}) - f(\vec{v}-\Delta\vec{v})\psi(\vec{v}-\Delta\vec{v},\Delta\vec{v})\right] d\Delta\vec{v}$$

где *Ψ (V,ΔV)* – вероятность сближения,
- при малых *ΔV* сводится к диффузионному уравнению Фоккера-Планка
- при немалых *ΔV* остаётся точным уравнением типа Колмогорова-Феллера (Агекян, Петровская, Калиберда)

- **Уравнение КФ:**

+ рассчитывается темп потери массы и энергии

– большие сложности вычислений даже для простейших случаев

- Логично впервые применить этот подход к диффузионному процессу типа Фоккера-Планка
- Для этого при интегрировании выражений для коэффициентов диффузии по прицельному параметру
- $\Delta V_{\|} = -n\frac{2Gm_f p_\perp}{V}\times\frac{1}{p^2+p_\perp^2}$, $V_\perp^2 = n\frac{4G^2m_f^2}{V^2}\times\frac{p^2}{(p^2+p_\perp^2)^2}$

следует предварительно умножить их на $\lambda(p)$

- **Обоснование:**
- За время Δt: $\Delta V_{\|}$ - "ускорение" ~ F_{rnd} ~ **λ(p)**
- За время Δt: $\Delta V_\perp^2$ - изменение компонентов кинетической энергии ~ работе случайной силы ~ $F_{rnd}\cdot\Delta t$ ~ **λ(p)**

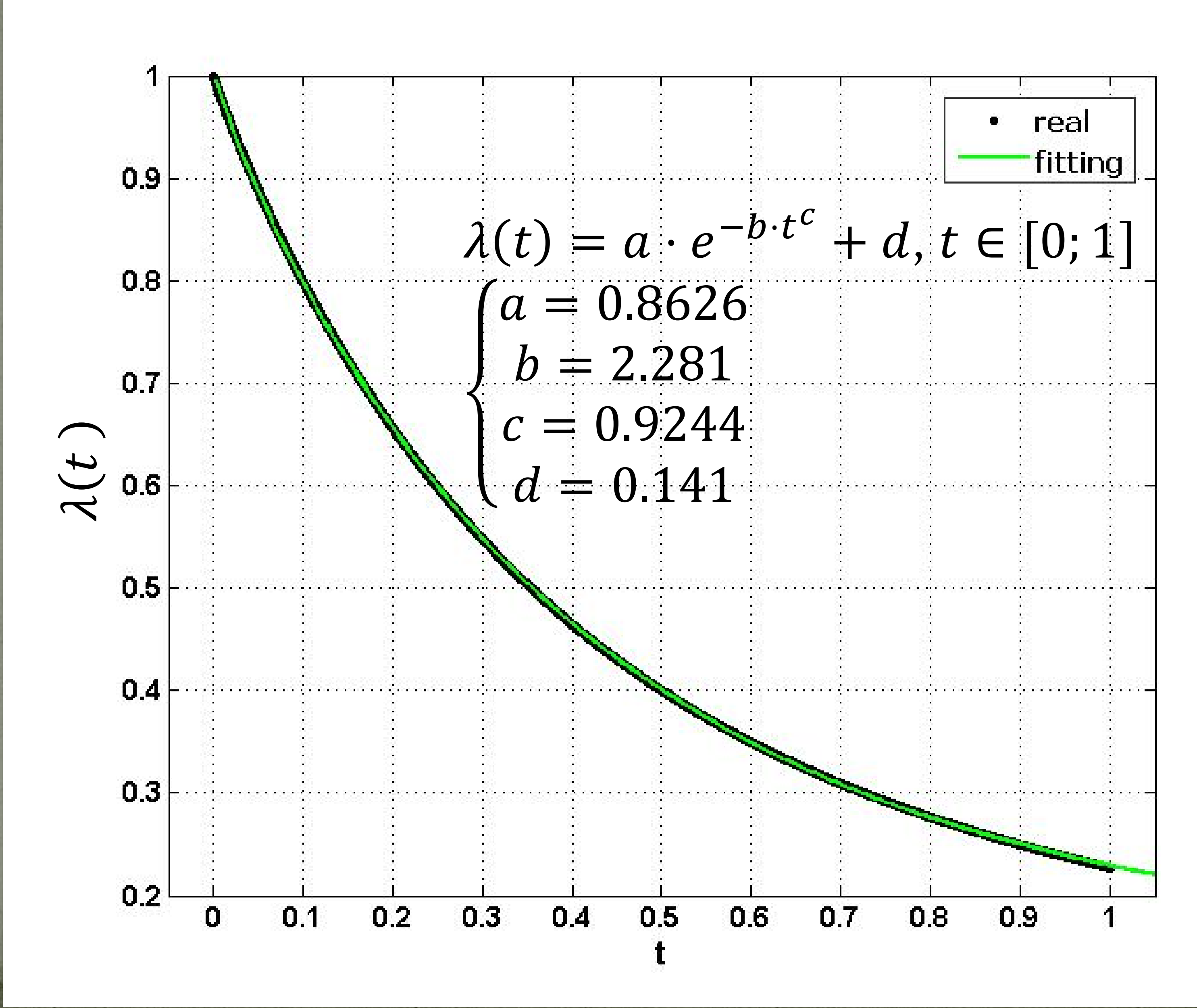
- Для оценки эффекта редукции далёких сближений найдём вначале удачную простую аппроксимацию для функции $\lambda(p) = \lambda(N)$, сделанную методом численного интегрирования точного выражения для фактора редукции
- Легко понять, что $p = d_0 \cdot \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{1}{3}}$, где

$N_0 = N(d_0) \approx 0.7122$ - среднее число звёзд в сфере радиуса d_0

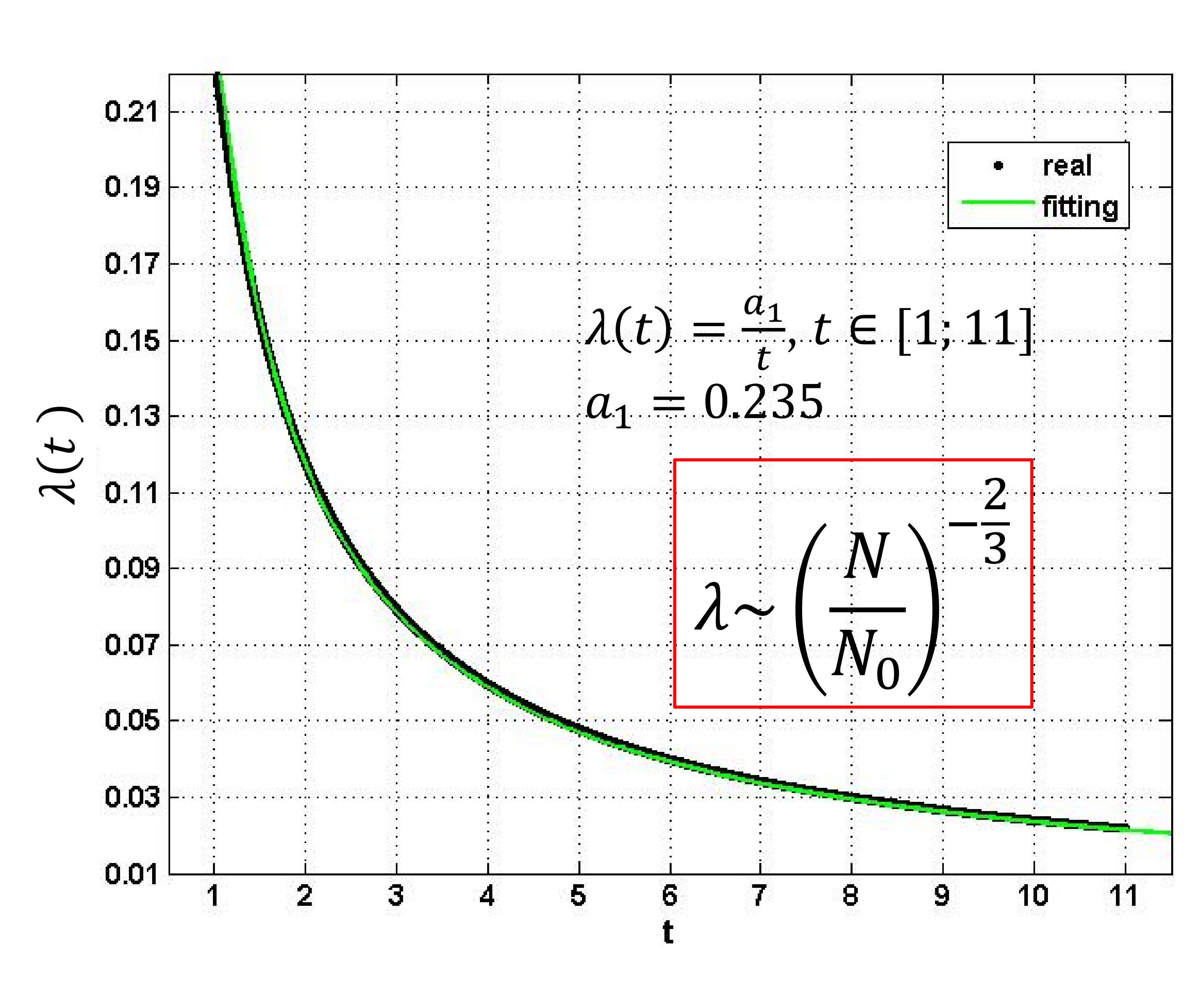
- Для удобства введём новую переменную интегрирования коэффициентов диффузии,

$$t = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Аппроксимация λ-фактора как функции $t < 1$



Аппроксимация λ-фактора как функции $t > 1$



Коэффициенты диффузии:

$$\langle V_{\parallel} \rangle = -n \cdot \frac{2\pi G^2 m_f (m+m_f)}{V_0{}^2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{d(p^2)}{p^2+p_\perp^2} \cdot \lambda(p)$$

$$\langle V_\perp^2 \rangle = n \cdot \frac{4\pi G^2 m_f^2}{V_0} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{d(p^2)}{(p^2+p_\perp^2)^2} \cdot \lambda(p)$$

$$p = d_0 \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Замена переменной

$$t \equiv \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

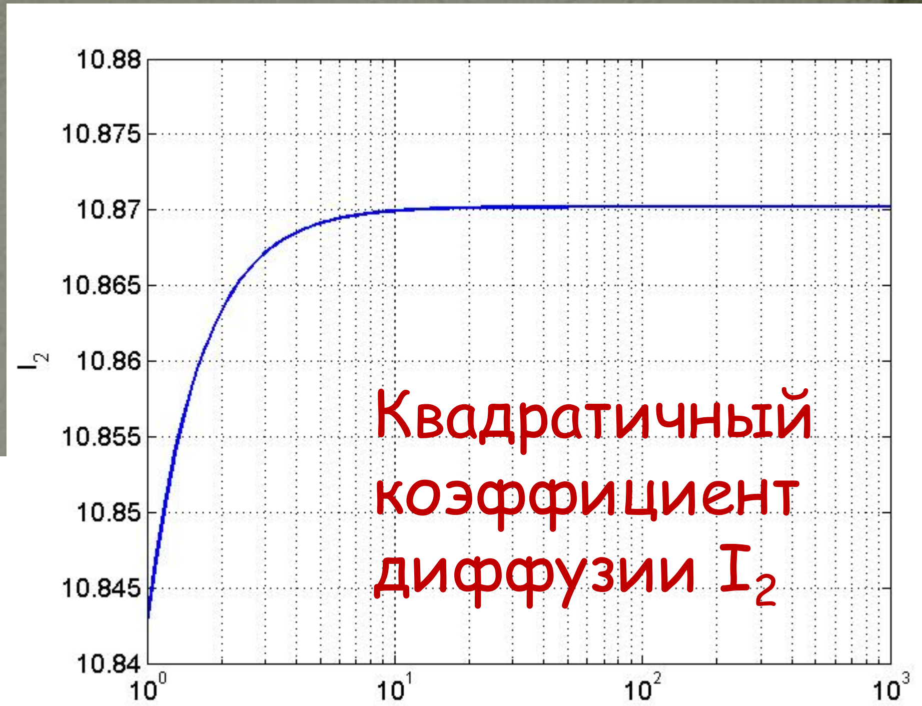
$K = {}^{d_0}\!/_{p_\perp}$ - отношение характерных масштабов звёздного поля

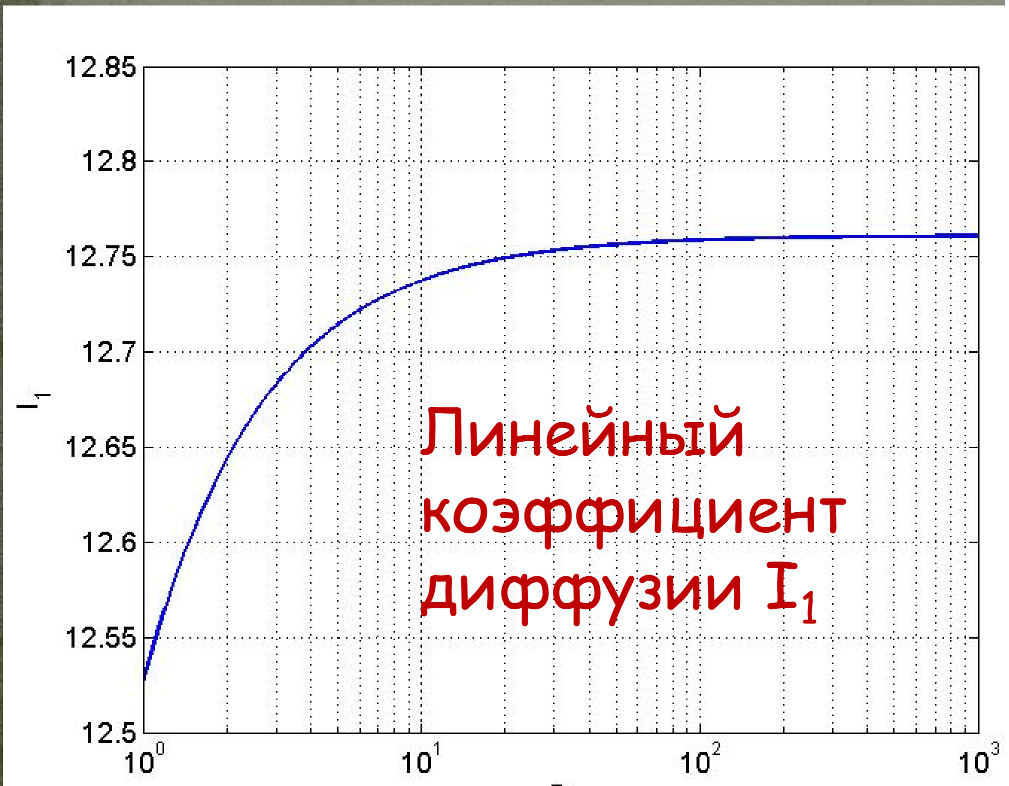
$$\boxed{\begin{aligned} I_1(K) &= K^2 \cdot \int_0^{+\infty} \cdot \frac{dt}{K^2 t+1} \lambda(t) \\ I_2(K) &= K^4 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(K^2 t+1)^2} \cdot \lambda(t) \end{aligned}}$$

- Пример сходимости интегралов I_1, I_2 для линейного и квадратичного коэффициентов диффузии для значения

$$K = \frac{d_0}{p_\perp} \sim 1000$$

Зависимость от $t=(N/N_0)^{2/3}$



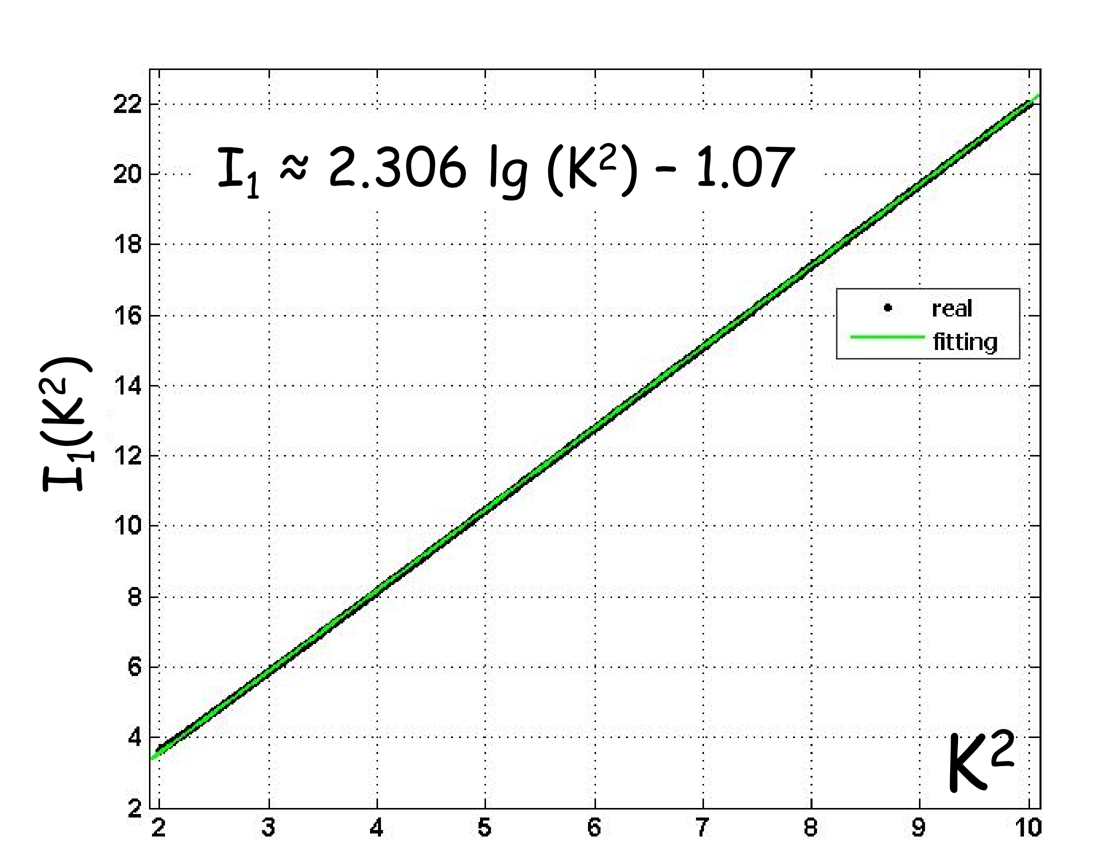


Реальное "обрезание" начинается уже с $p > 2d_0$ ($t > 4$; более 90% полного значения интеграла)

- Для определения вида зависимости коэффициентов диффузии от отношения естественных масштабных параметров звёздного поля - $K = \frac{d_0}{p_\perp}$ - вычисления проводились для значений ***K*** в интервале ***K*** $\in$ ***(1, 10⁵)***

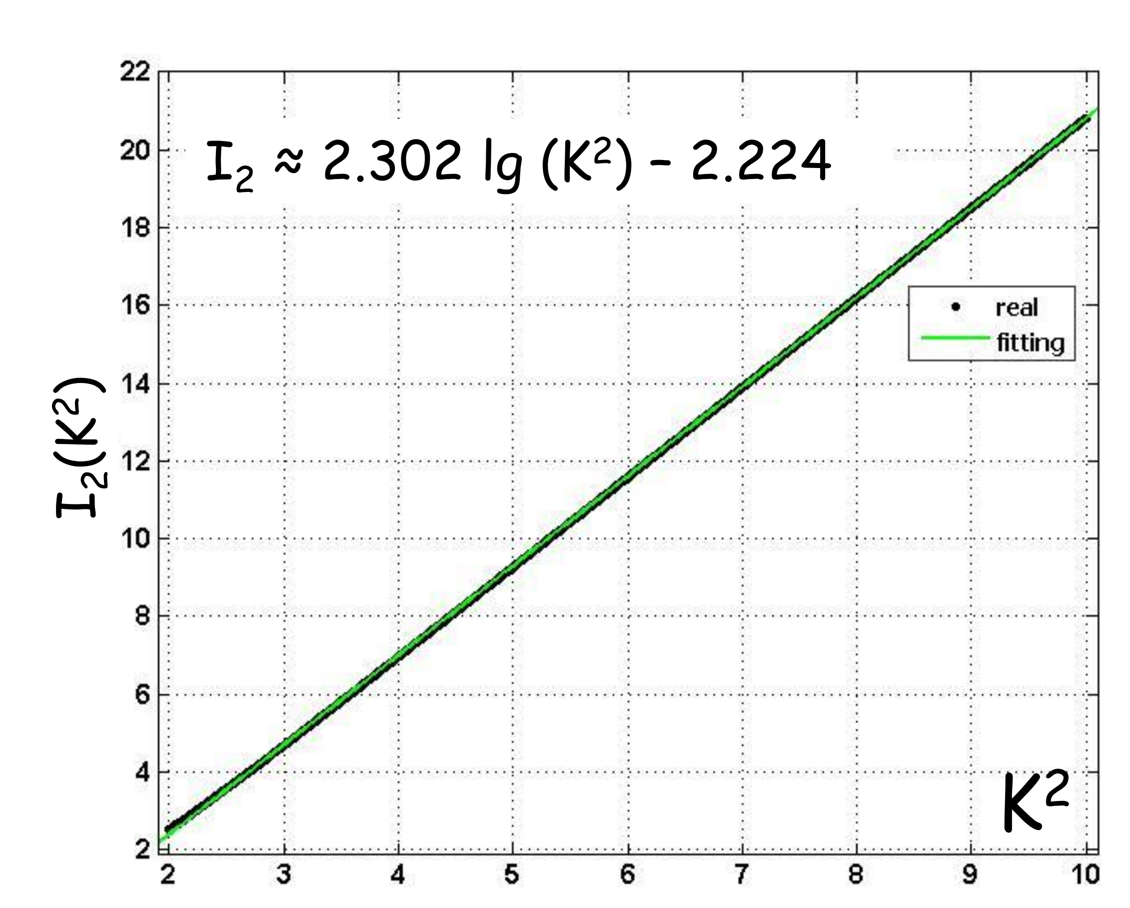
- Линейный коэффициент диффузии:

$$\langle \Delta V_\parallel \rangle \sim 2 \cdot ln\left(\frac{d_0}{1.71 \cdot p_\perp}\right)$$



- Квадратичный коэффициент диффузии:

- $\langle \Delta V_{\perp}^{2} \rangle \sim 2 \cdot ln\left(\frac{d_0}{3.04 \cdot p_{\perp}}\right)$



- Итак, в окончательном виде
- $< \Delta V_{||} > \approx -4\pi \frac{G^2 m_f (m+m_f) n}{V^2} ln\left(\frac{d_0}{1.71 \cdot p_\perp}\right)$
- $< \Delta V_\perp^2 > \approx 8\pi \frac{G^2 m_f^2 n}{V} ln\left(\frac{d_0}{3.04 \cdot p_\perp}\right)$
- **Следствия:**
  - Вклад сближений с большими прицельными параметрами конечен; логарифмической расходимости нет !
  - «Кулоновский» логарифм отношения двух независимых масштабных факторов входит в выражения естественным образом - как характеристика звёздного поля. Один из масштабных факторов – d_0 – отражает звёздную концентрацию, в то время как второй - $p_\perp$ - кинетическое состояние звёздной системы.

- **Следствия:**
  - Среднее межчастичное расстояние можно считать эффективным радиусом гравитационного “экранирования” в звёздной системе, вполне аналогичным Дебаевскому радиусу электростатического экранирования в плазме.
  - Характерные времена немного увеличиваются
  - Эффективное “обрезание” сближений среднечастичным расстоянием оправдывает применимость классического Фоккер-Планковского описания даже к пространственно неоднородным системам, у которых характерный масштаб неоднородности заметно превышает среднечастичное расстояние.
  - Неоднородности должны учитываться как источник регулярной силы либо в рамках коллективных эффектов.

- **Ближе всех к подобному выводу подошёл H. Kandrup (1980-1981)**
- H. Kandrup's Thesis (Physics Reports, Review Section of Physics Letters, V.63, No.1, 1980): **"It is quite clear that, for distances greater than or of the order of the mean stellar separation, the approximation that the forces are purely additive results in a serious over-estimation".**
- H. Kandrup (ApJ, 244, 1039-1063, 1981) более сложным путём вывел квадратичный к-т диффузии и отметил: **"This equation is precisely the standard Fokker-Planck equation of conventional stellar dynamics, differing only in that here the logarithmic factor is not a divergence, but instead the ratio of two well defined lengths."**
- Его результаты полностью согласуются с нашими представлениями и роли случайных сил в локально-однородных звёздных системах и отсутствии расходимости

VOLGA

View On the Life of GAlaxies

Благодарим за внимание !