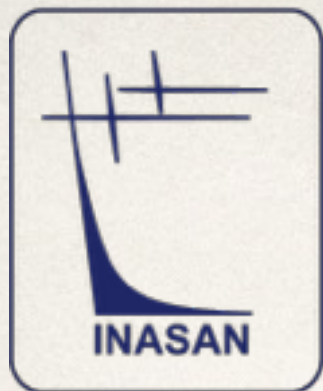


Задача АНТОНОВА

о неустойчивости сферы
с чисто радиальными орбитами
(корректное решение)

Поляченко Е.В., Шухман И.Г.

Кисловодск, 8 июня 2016

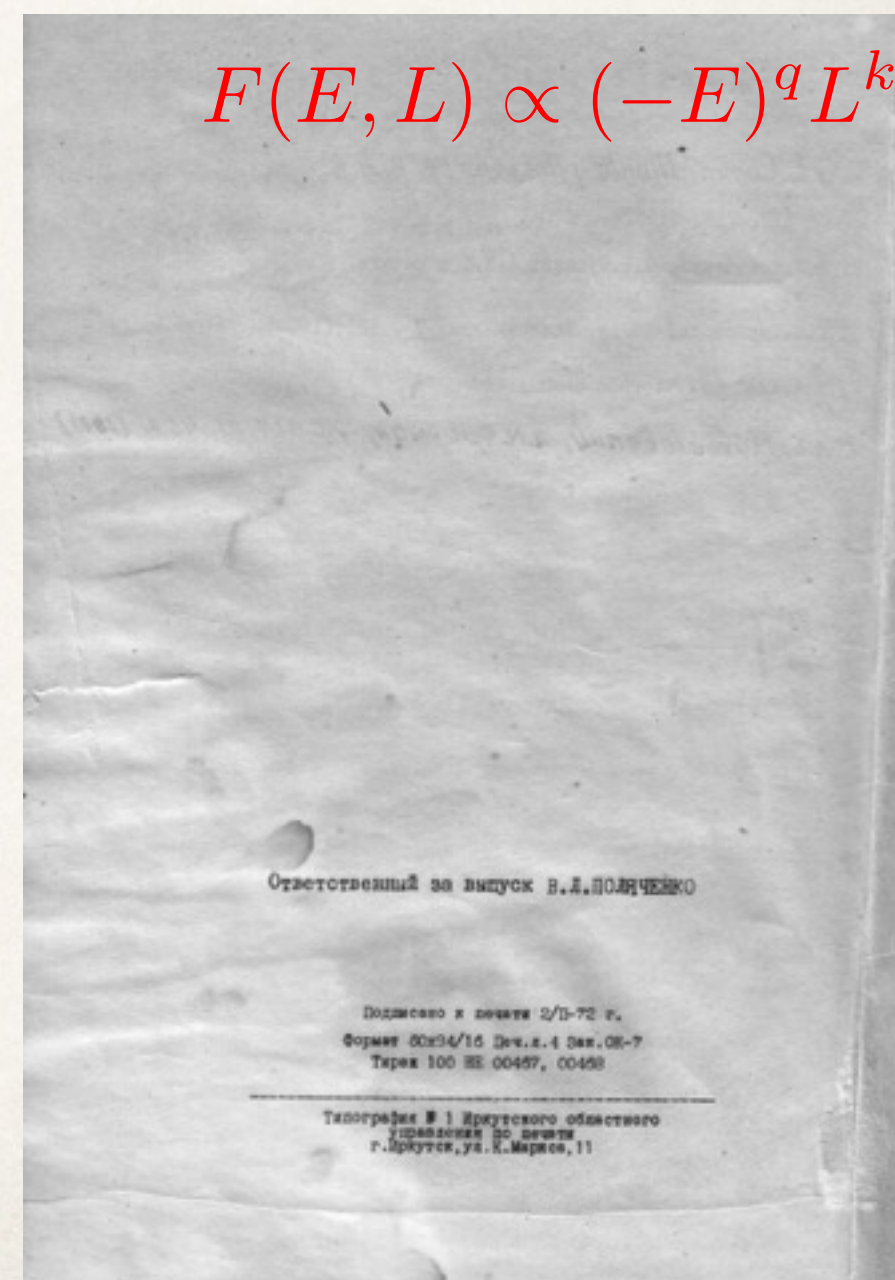
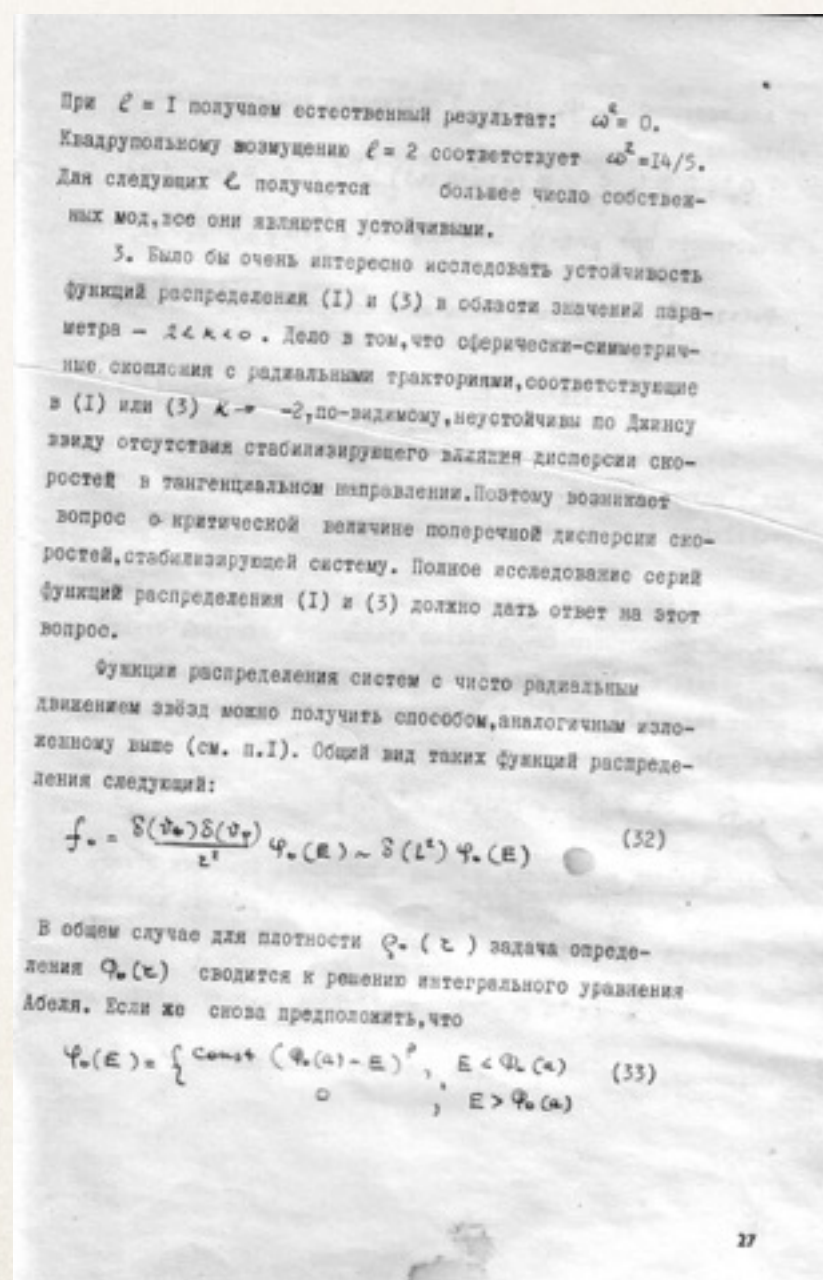
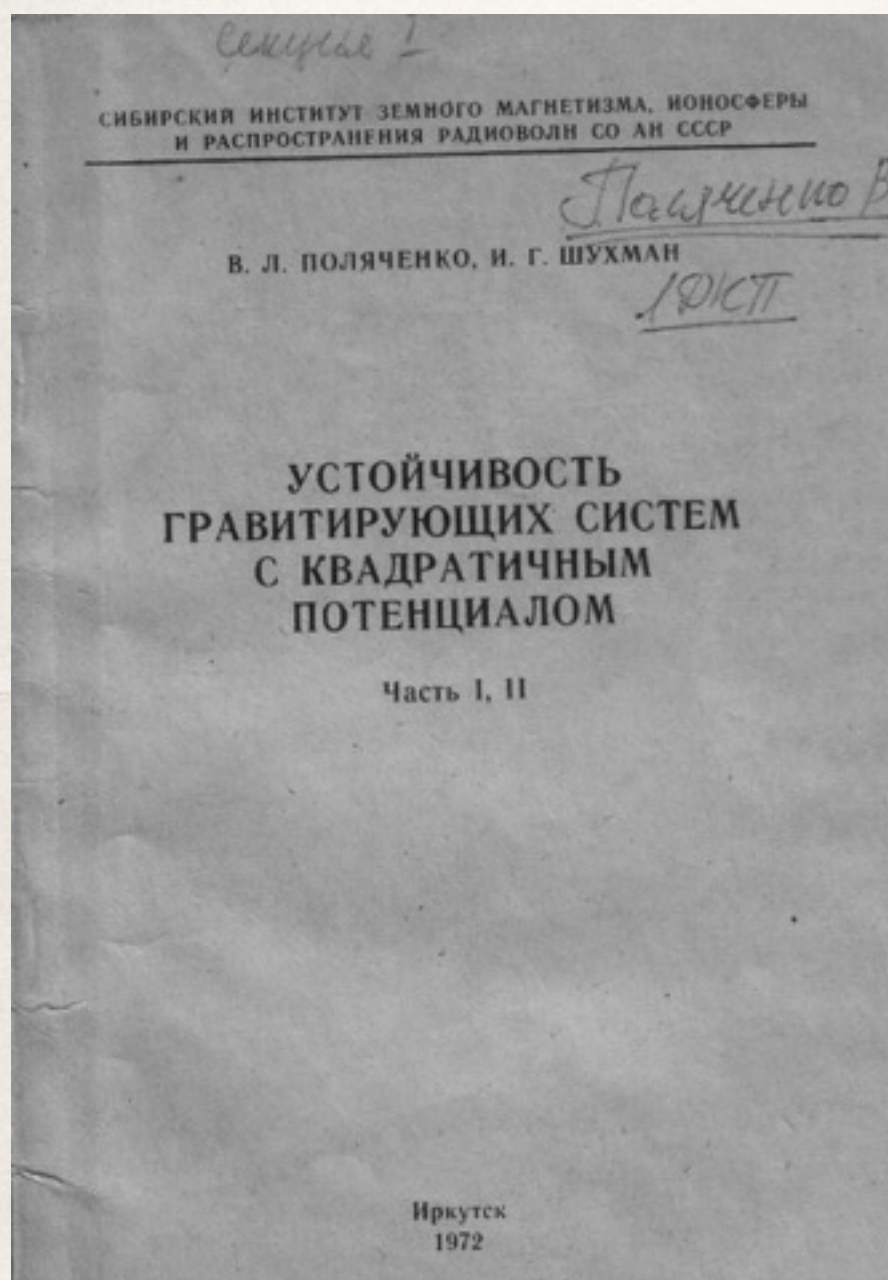
1970-е

- *Поляченко В.Л., Шухман И.Г.: Препринт СибИЗМИР 1-72 (1972)*
- *Зельдович Я.Б., Поляченко В.Л., Фридман А.М., Шухман И.Г.: Препринт СибИЗМИР 7-72 (1972)*
- *Антонов В.А. Доклад на конференции “Динамика галактик и звездных скоплений”, Алма-Ата (23-26 октября 1972 г.). Опубликовано на русском в 1973 г., на англ. -- 1987 г.)*

1972 г

$$F(E, L) \propto L^k [L^2 / 2a^2 - E + \Phi_0(a)]^q$$

$$F(E, L) \propto (-E)^q L^k$$



1973 Γ

the formula

$$|V_\nu| = \sqrt{2(E_\nu - \Phi(r))},$$

whereas the partial density of the matter is

$$\rho_\nu = \frac{h_\nu}{r^2 |V_\nu(r)|},$$

where ν is the number of the stream, E_ν and h_ν are certain constants characteristic of it, and $\Phi(r)$ is the gravitational potential of the system as a whole. $\rho_\nu = 0$ should be considered to be the turning point. Taking into account Poisson's equation, we

where $dm_\nu = r^2 \rho_\nu dr$ stands for the mass element along a certain diameter (more precisely, along the elementary cone), whereas the integrals are taken between the turning point of the corresponding stream. Differentiating (7) and keeping in mind the invariance of dm_ν , we get after some calculations

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \int \frac{(J_\nu^+)^2 + (J_\nu^-)^2}{r^2} dm_\nu + 2\pi G r^2 \int \left[\sum_{\nu=1}^N \rho_\nu (x_\nu^+ + x_\nu^-) \right]^2 dr > 0.$$

Равновесие — модели

- Обобщенно-политропные (GP)

$$F(E, L) \propto L^{-s} (-2E)^q$$

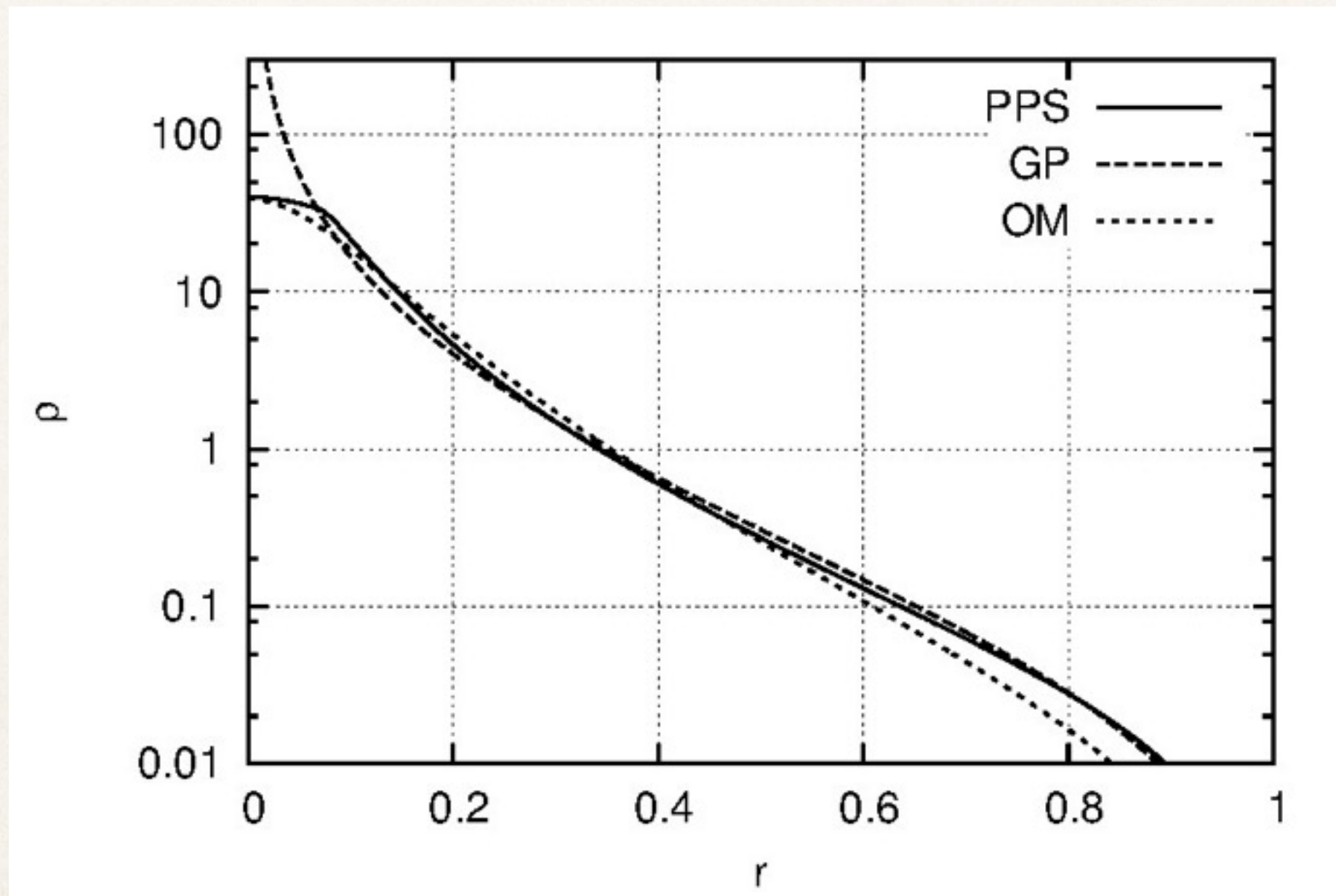
- Осипкова—Меррита (OM)

$$F(E, L) \propto f(Q) , \quad Q \equiv E + L^2/2r_a$$

- Несингулярные анизотропные модели (PPS)

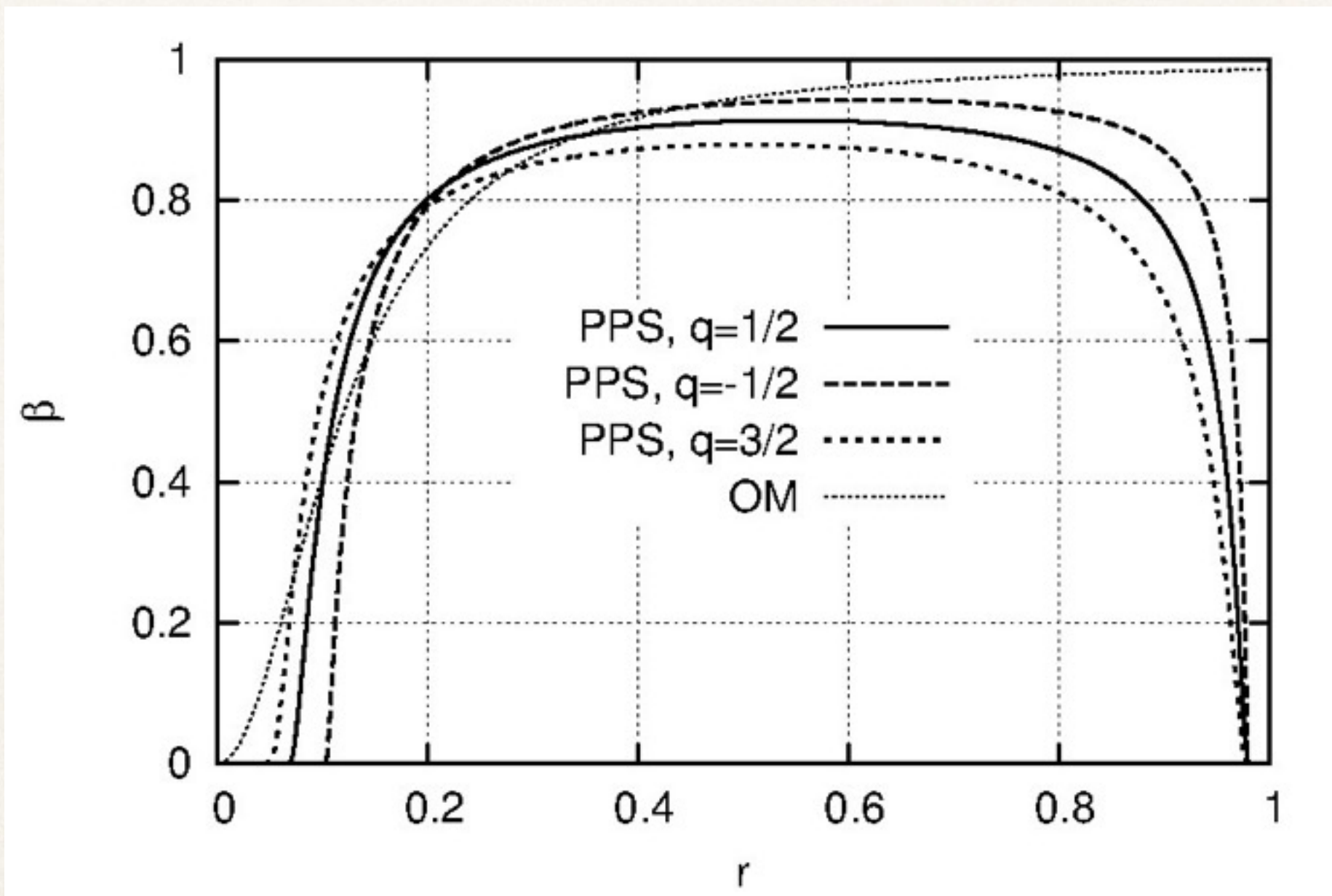
$$F(E, L) \propto \delta(L^2) (-2E)^q , \quad \delta(L^2) \rightarrow \frac{H(L_T^2 - L^2)}{L_T^2}$$

Равновесие — плотность



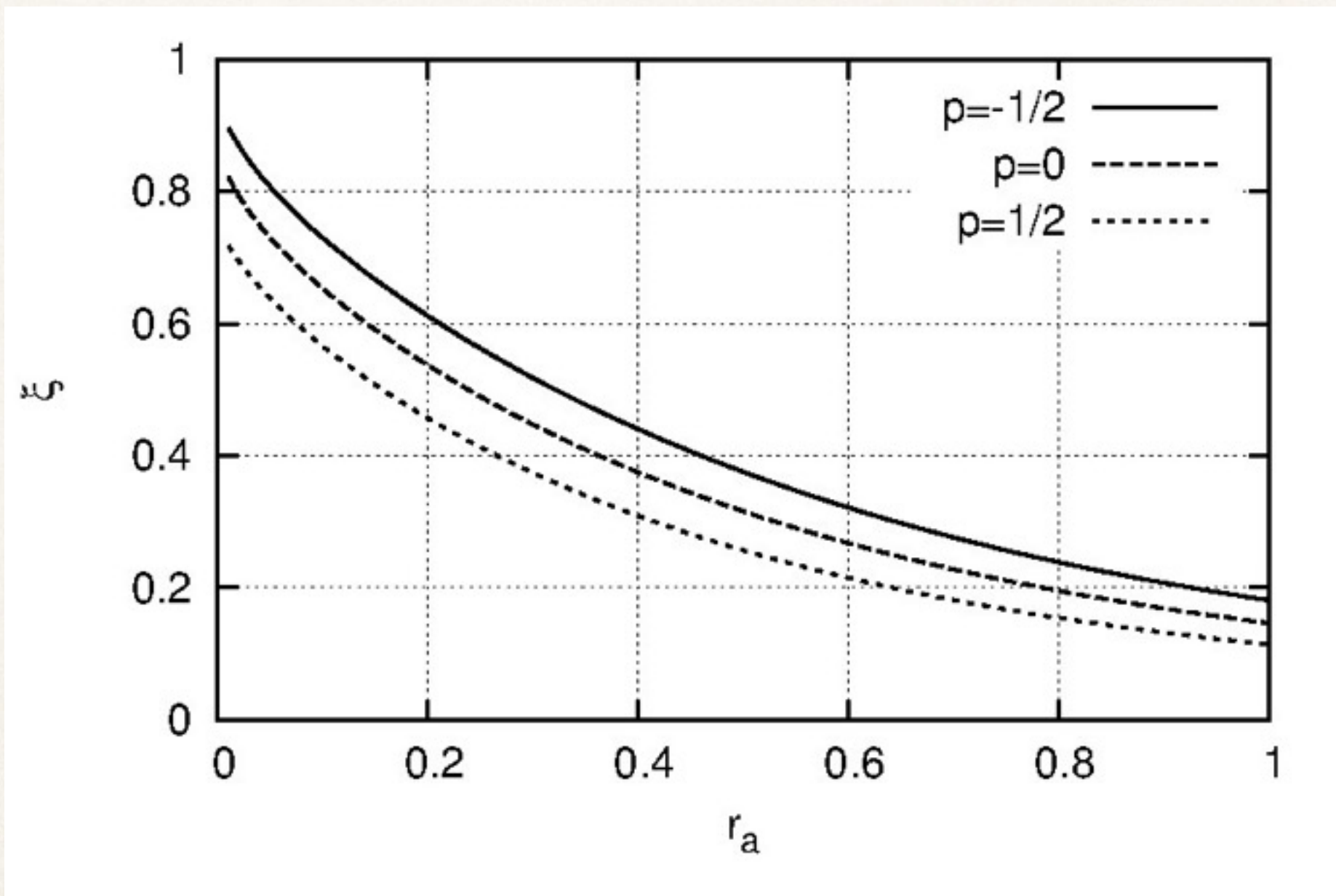
Равновесие — локальная анизотропия

$$\beta(r) = 1 - \frac{\sigma_\theta^2 + \sigma_\varphi^2}{2\sigma_r^2}$$



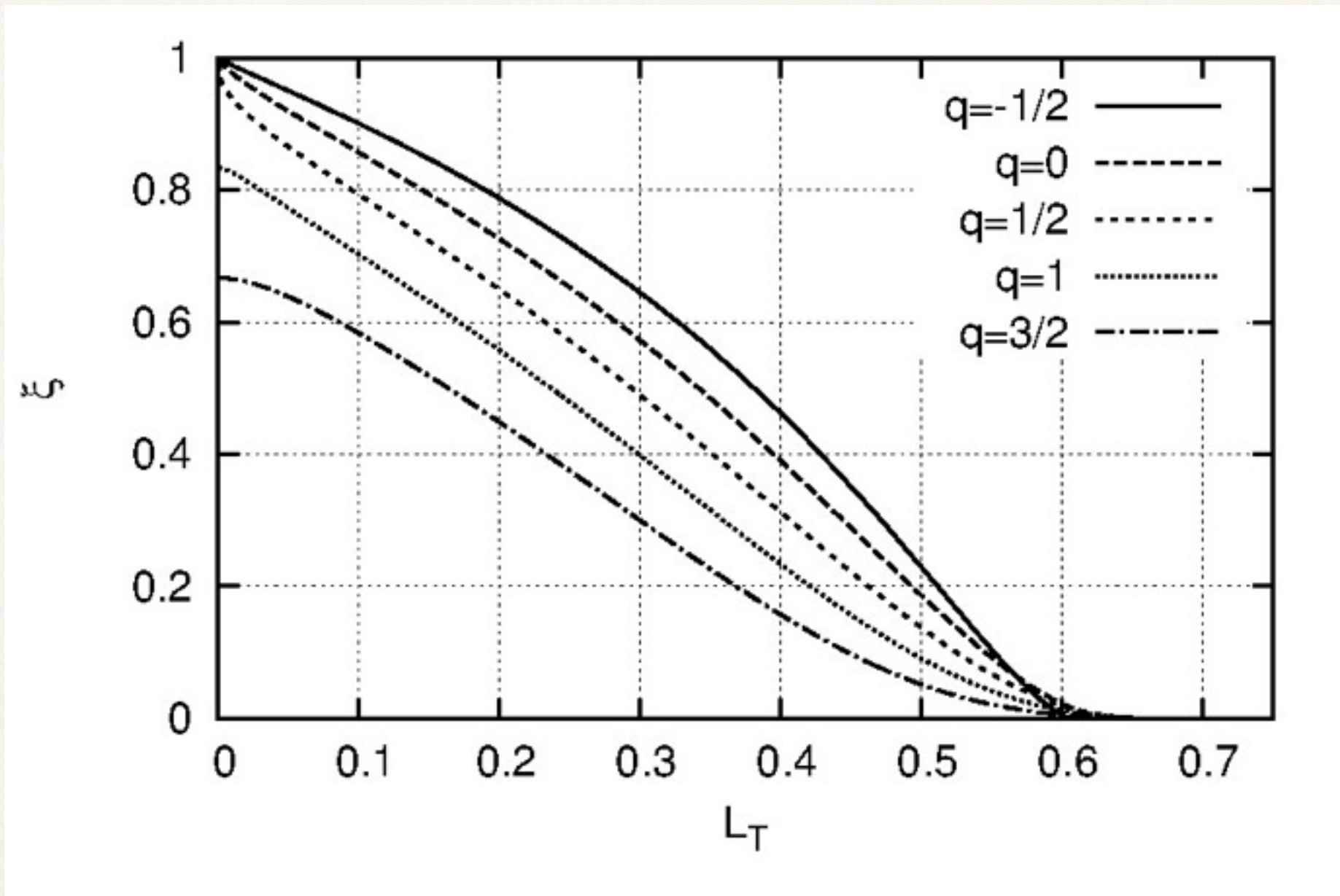
Равновесие — глоб. анизотр. (ОМ)

$$\xi = 1 - \frac{T_\theta + T_\varphi}{2T_r}, \quad T_i = \frac{1}{2} \int d\Gamma v_i^2$$

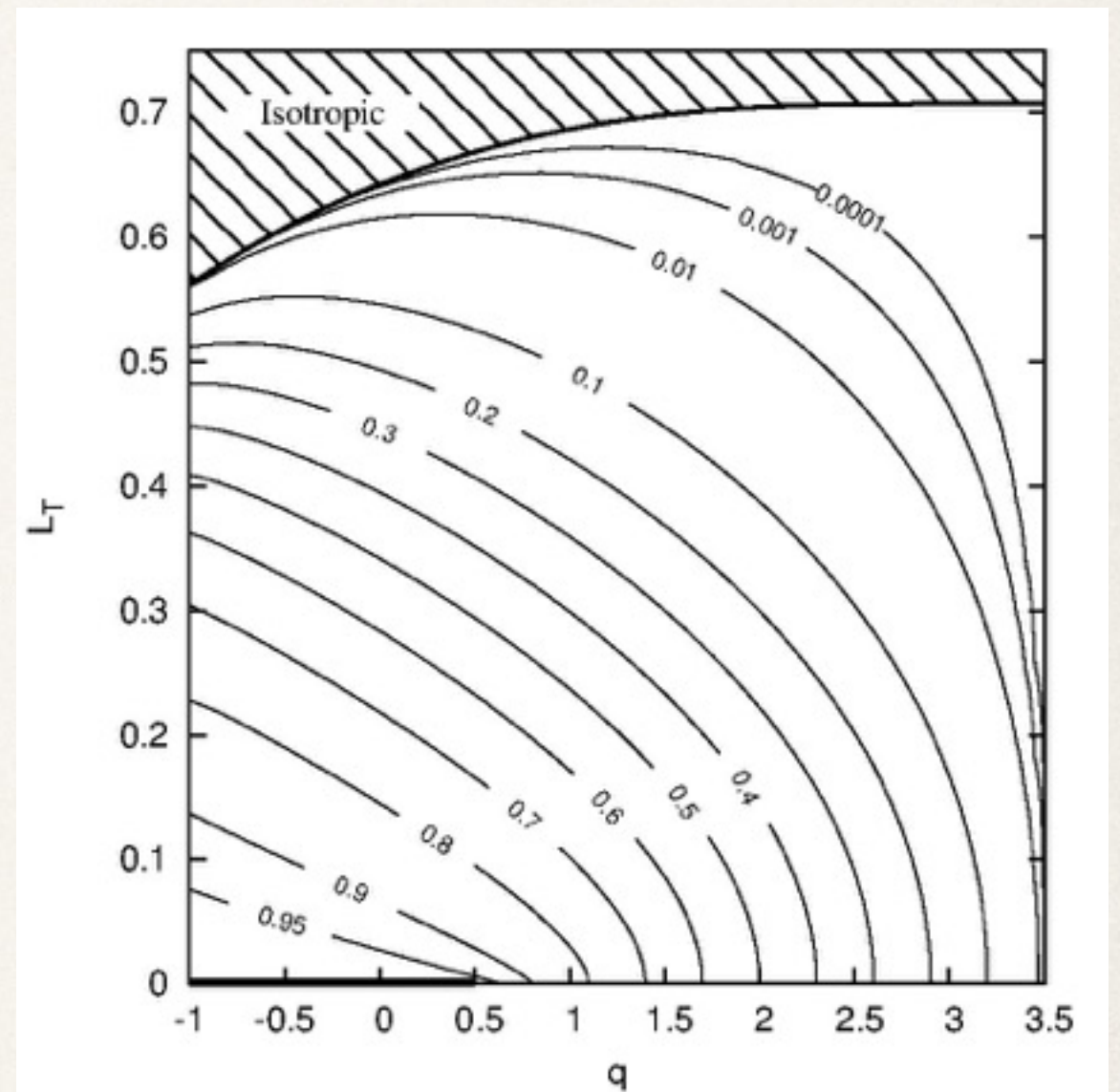
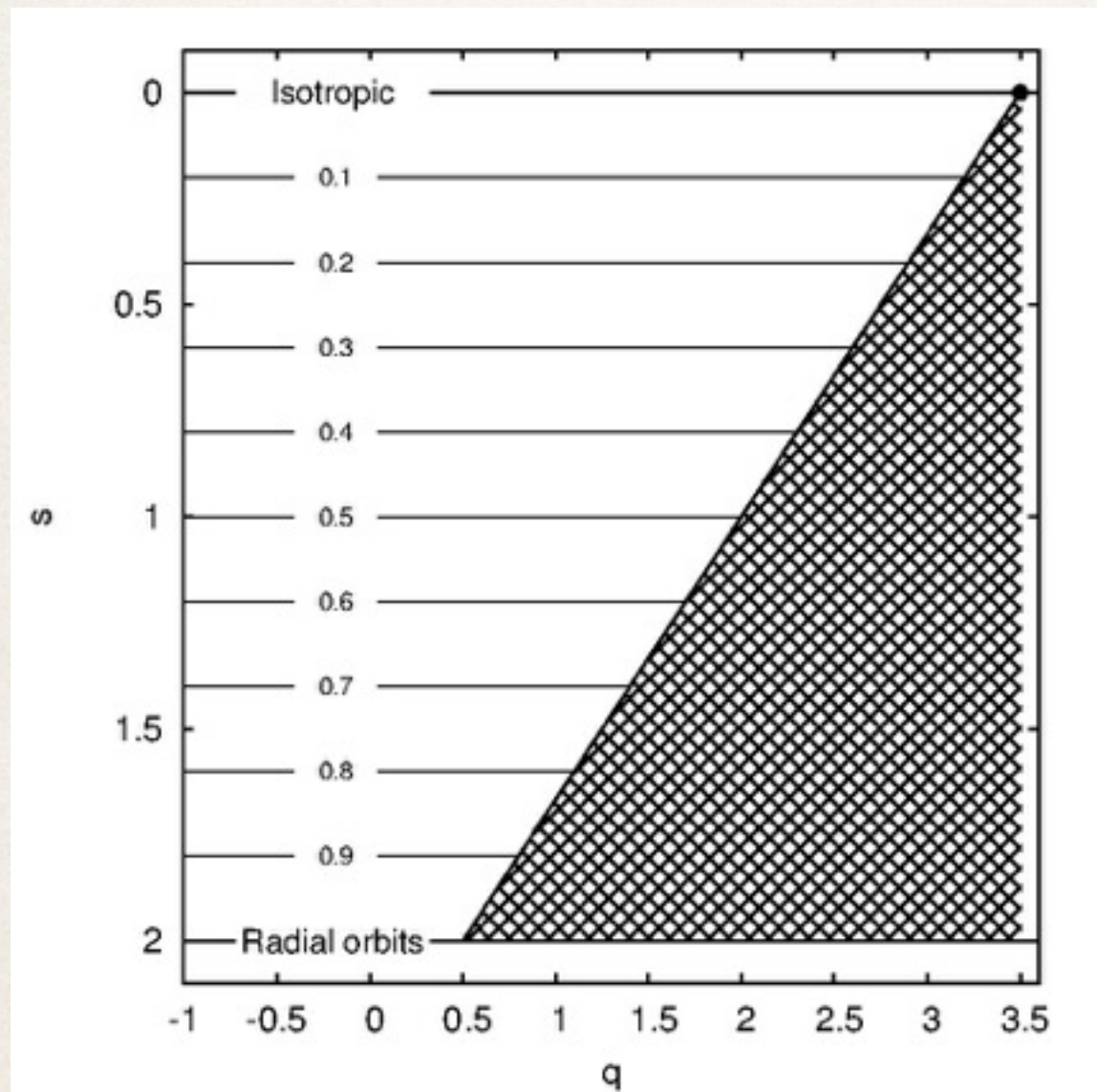


Равновесие — глоб. анизотр. (PPS)

$$\xi = 1 - \frac{T_\theta + T_\varphi}{2T_r}, \quad T_i = \frac{1}{2} \int d\Gamma v_i^2$$



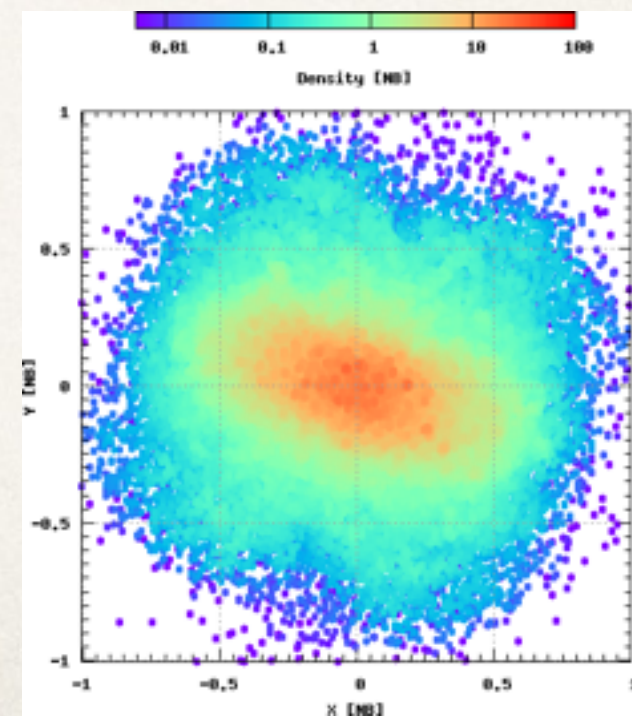
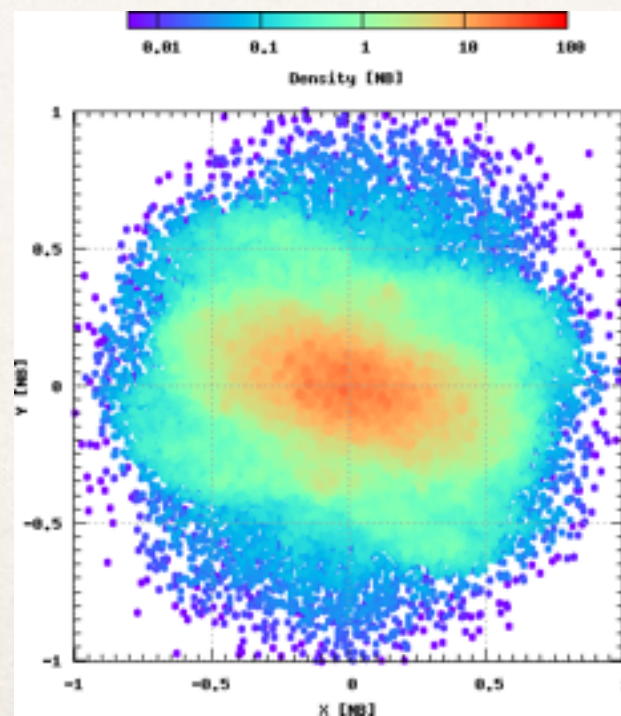
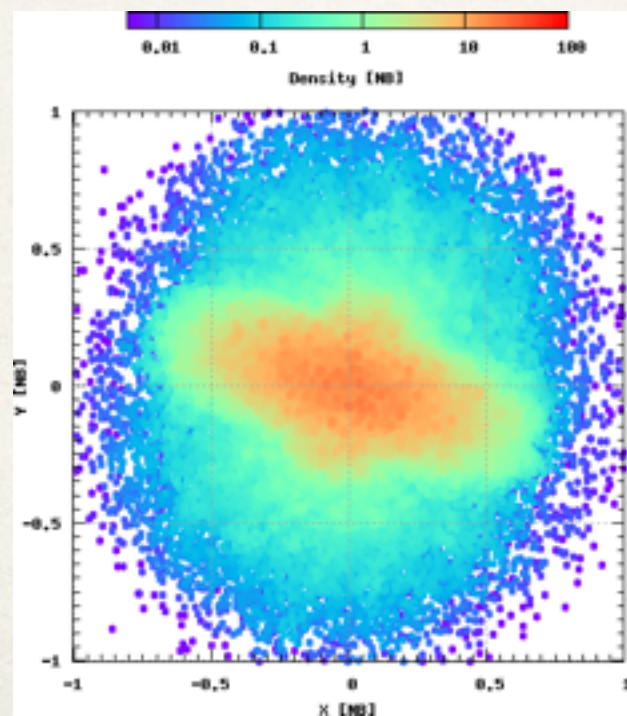
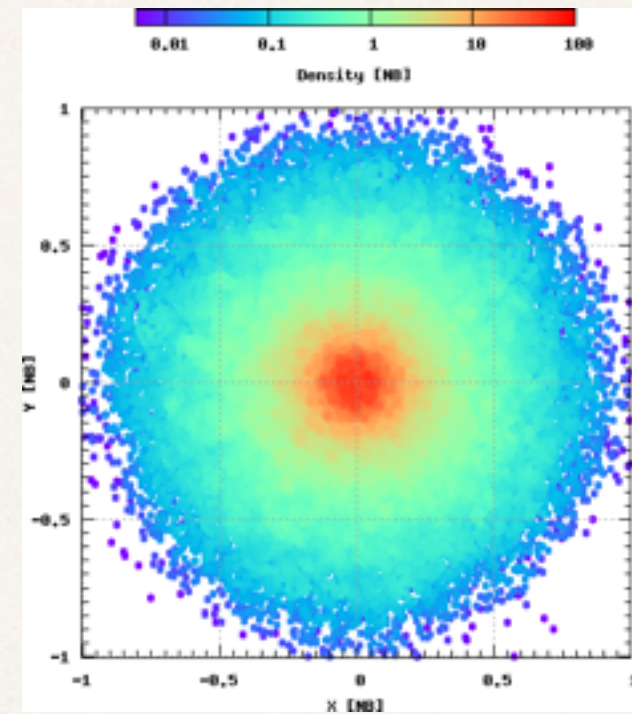
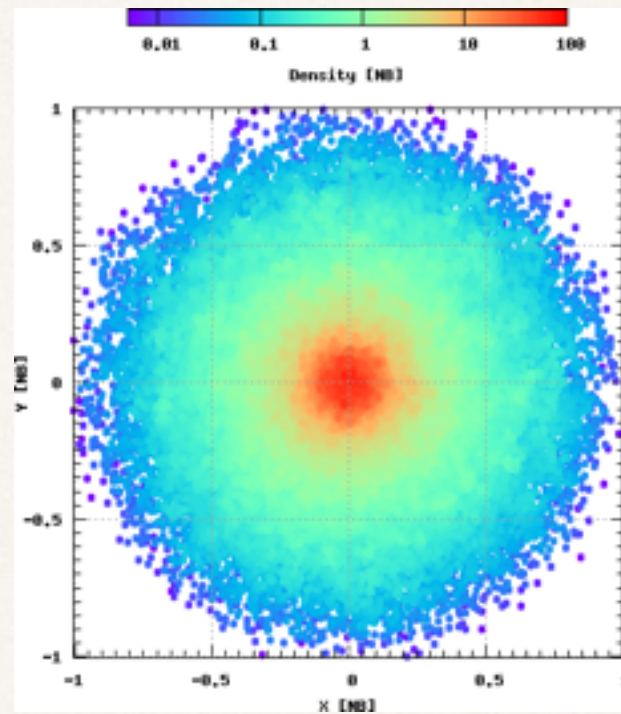
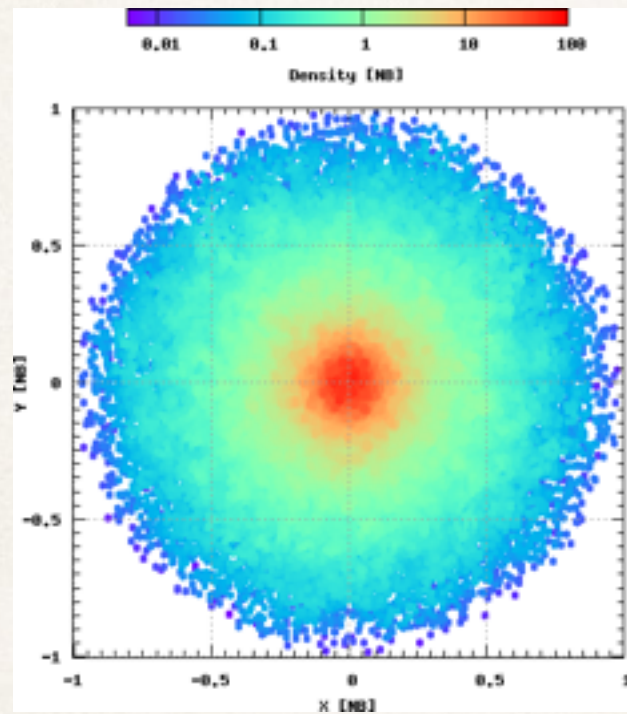
Равновесие — глоб. анизотр. (GP&PPS)



$$F(E, L) \propto L^{-s} (-2E)^q$$

$$F(E, L) \propto \frac{H(L_T^2 - L^2)}{L_T^2} (-2E)^q$$

Неустойчивость — PPS ($q=0$, $L_T=0.1796$)

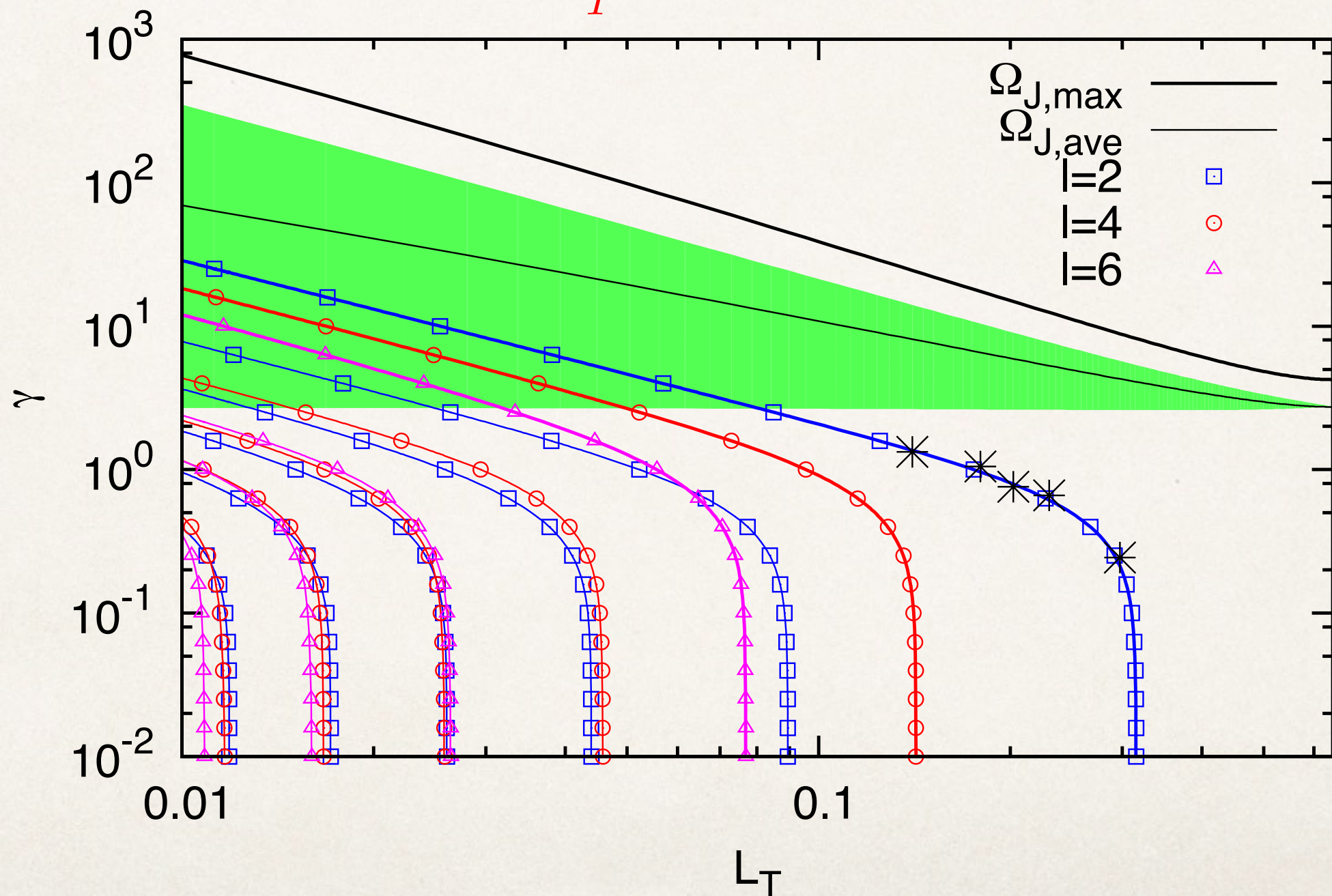


Неустойчивость — матричные методы

- М.м. Калнайса (общее, диск)
Kalnajs A. (1971, 1977)
- М.м. Калнайса (сфера) $\Phi_1 \propto \hat{\Phi}_1(r) P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t}$
Поляченко В.Л., Шухман И.Г. (1981)
- Линейный м.м. (общее, диск) $Ax = \omega x$
П. (2005)
- Линейный м.м. (сфера)
П., Поляченко В.Л., Шухман И.Г. (2007)

Неустойчивость — PPS ($q=0, \text{Re } \omega = 0$)

$$F(E, L) = \frac{H(L_T - L)}{L_T^2} F_0(E), \quad F_0(E) \propto (-2E)^q$$

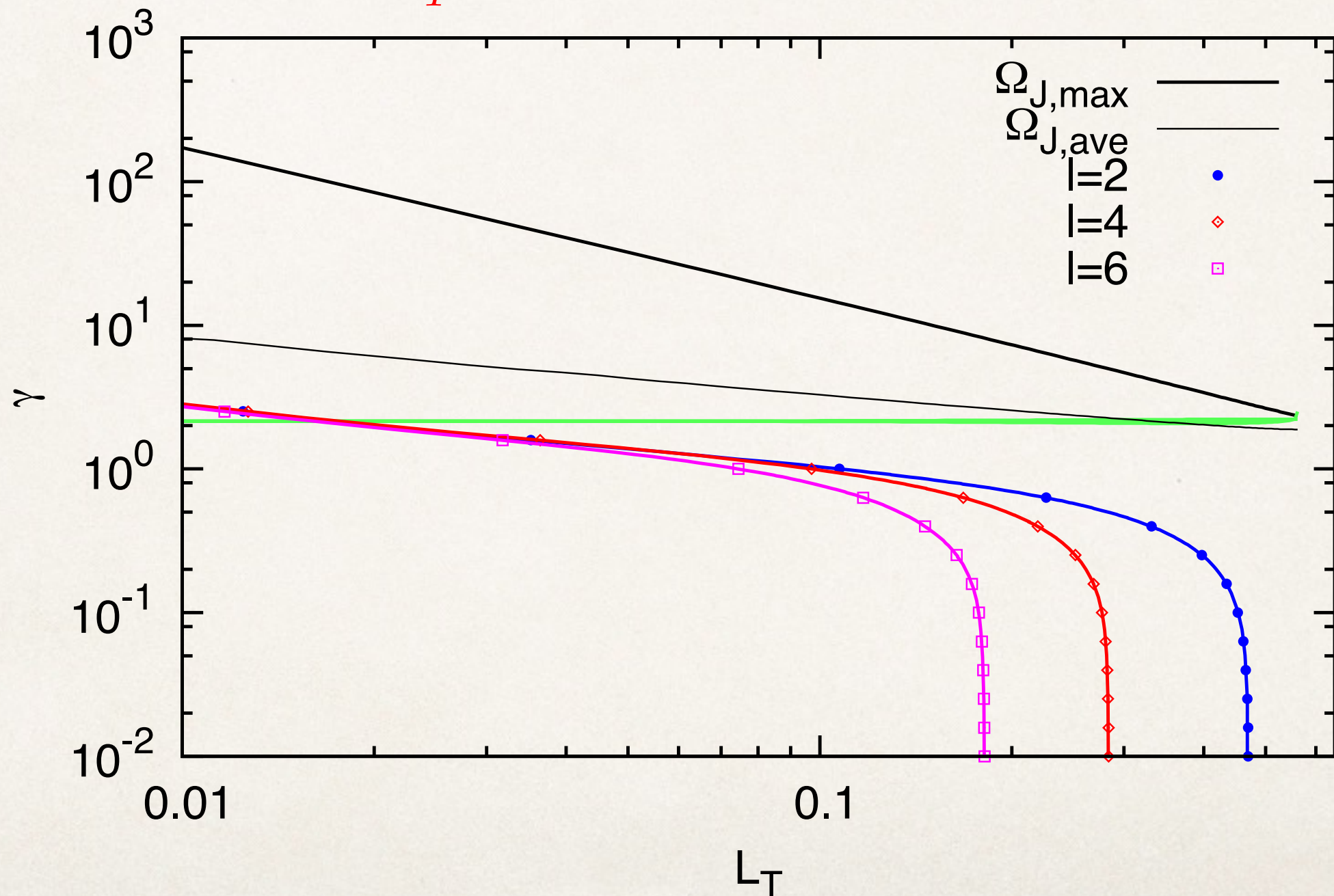


Неустойчивость — типы решений (PPS)

- $q = 0$:
 - четные сферические гармоники ℓ
 - несколько апериод. решений ($\text{Re } \omega = 0$) для каждого ℓ
 - осциллирующие решения ($\text{Re } \omega \neq 0$)
- $q = -1, q = -1/2$:
 - четные и нечетные ℓ
 - одно апериод. решение для каждого ℓ
 - осциллирующие решения

Неустойчивость — PPS ($q = -1$)

$$F(E, L) = \frac{H(L_T - L)}{L_T^2} F_0(E), \quad F_0(E) \propto (-2E)^q \propto \delta(E)$$



Чисто радиальные орбиты

- Невозмущенная ФР

$$F(E, L) = \delta(L^2) F_0(E) = \frac{\pi}{r^2} \delta(v_\theta) \delta(v_\varphi) F_0(E)$$

- Разложение по δ -функциям

$$f_1(t, r, \theta, \varphi, v_r, v_\theta, v_\varphi) = A(t, r, \theta, \varphi, v_r) \delta(v_\theta) \delta(v_\varphi) + \\ + B(t, r, \theta, \varphi, v_r) \delta'(v_\theta) \delta(v_\varphi) + C(t, r, \theta, \varphi, v_r) \delta(v_\theta) \delta'(v_\varphi)$$

- Система уравнений (четные ℓ)

$$-i(\omega - k\Omega) A_k + l(l+1) \sum_{k'=-\infty}^{\infty} p_{k-k'} B_{k'} = i\pi k \Phi_k F'_0(E)$$

$$-i(\omega - k\Omega) B_k = \pi \Phi_k F_0(E) \quad p_k(E) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\cos(kw)}{r^2(E, w)} dw$$

$$\Phi_k(E) = -\frac{2G}{2l+1} \int \frac{dE'}{\Omega(E')} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{kk'}^{\text{even}}(E, E') A_{k'}(E')$$

Почти радиальные орбиты

- Невозмущенная ФР

$$F(E, L) = \frac{H(L_T - L)}{L_T^2} F_0(E) , \quad F_0(E) \propto (-2E)^q$$

- предел $L_T \rightarrow 0$

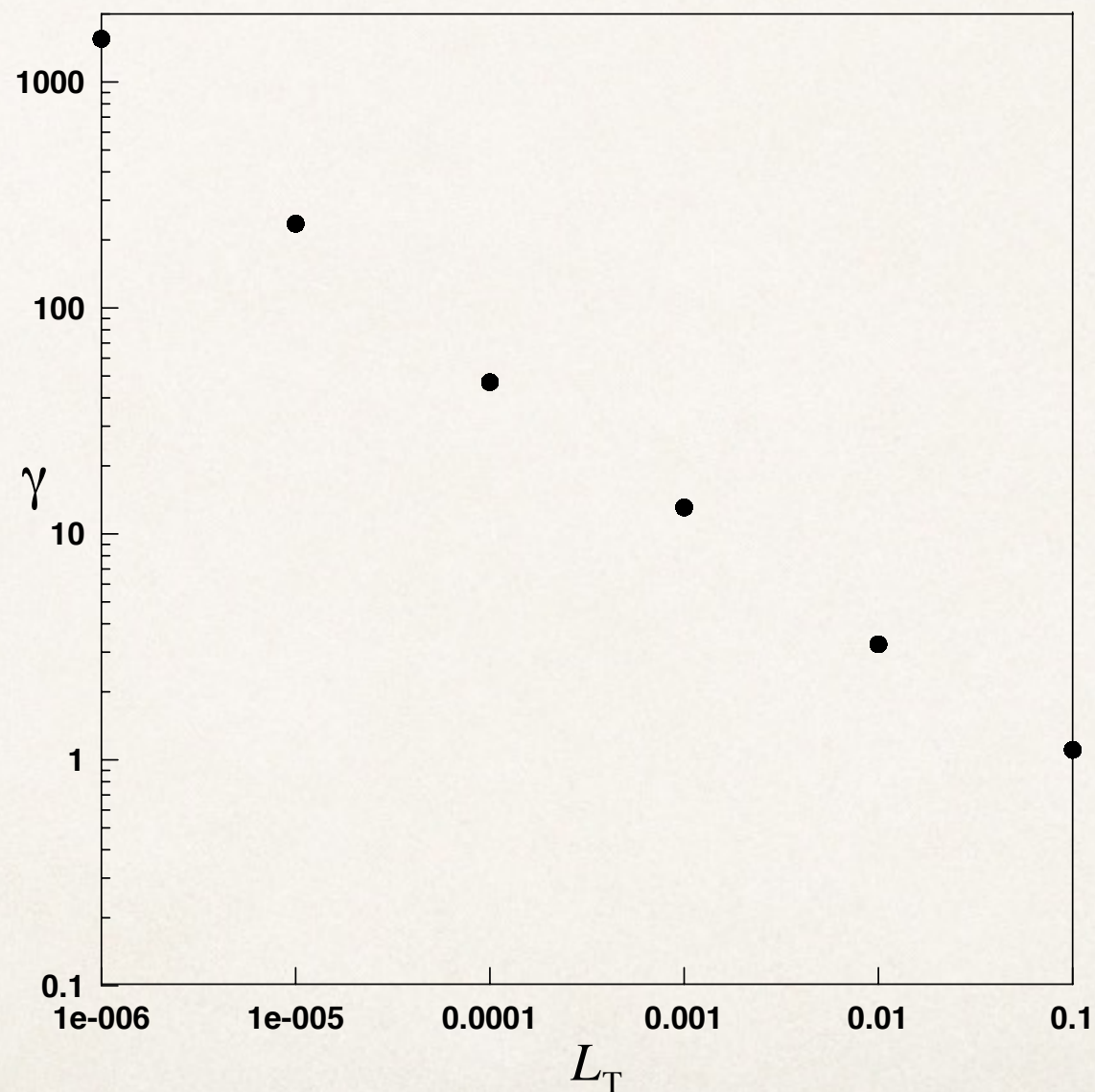
$$p_0(E) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dw}{r^2(w)} \rightarrow \lim_{L_T \rightarrow 0} \frac{\Omega_{\text{pr}}(L_T)}{L_T}$$

- Скорость прецессии орбит

$$\Omega_{\text{pr}}(L_T) \equiv \Omega_2(L_T) - \frac{1}{2} \Omega_1(L_T) \propto L_T^\lambda , \quad \lambda \approx 1/4$$

Неустойчивость при $L_T \rightarrow 0$ ($q = -1$)

$$F(E, L) = \frac{H(L_T - L)}{L_T^2} F_0(E), \quad F_0(E) \propto (-2E)^q \propto \delta(E)$$



Заключение

- Рассмотрение неустойчивости модели чисто радиальных орбит требует исследования семейства почти радиальных орбит
- Инкременты нарастания неустойчивости стремятся к бесконечности при переходе от системы почти радиальных орбит к чисто радиальным